数理解析研究所講究録
第1615巻 2008年 95-98

Dunkl-Williams型不等式と幾何学的定数

高橋泰嗣 (Yasuji TAKAHASHI)
岡山県立大学・情報工学部
(Department of System Engineering, Okayama Prefectural University)

加藤幹雄 (Mikio KATO)
九州工業大学・工学研究院
(Department of Basic Sciences, Kyushu Institute of Technology)

X をノルム空間, $S_X=\{x\in X:\|x\|=1\}$ とする.

Dunkl-Williams inequality [2]: For any nonzero $x,y\in X$

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|\leq\frac{4\|x-y\|}{\|x\|+\|y\|}. \tag{1}$$

X の幾何学的性質は単位球面 S_X の形状で決定されることを念頭において, $u=\frac{x}{\|x\|}, v=-\frac{y}{\|y\|}, t=\frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}$ とおくと, この不等式は次のように書き変えられる:

$u,v\in S_X$, $0<t<1$ に対し

$$\|u+v\|\leq 4\|tu+(1-t)v\| \tag{2}$$

この不等式は Dunkl-Williams 不等式と同値である. X が内積空間のときは, $u,v\in S_X$, $0<t<1$ に対し

$$\|tu+(1-t)v\|=\|(1-t)u+tv\|$$

が成り立つことから

$$\|u+v\|\leq 2\|tu+(1-t)v\|$$

が成立する. そこで, $0\leq t\leq 1$ を固定し, 任意の $u,v\in S_X$ に対して

$$\|u+v\|\leq D\|tu+(1-t)v\| \tag{3}$$

が成立するような定数 D と X の幾何学的性質との関係を考察する. この不等式を **Dunkl-Williams 型不等式**と呼ぼう. また, 最良定数 D を $DW(X,t)$ で表し, そ

Mathematics subject classification (2000): 46B20
Key words: Dunkl-Williams 型不等式, Dunkl-Williams 型定数, uniformly non-square space

れを **Dunkl-Williams 型定数**と言うことにする．上記の考察から，任意のノルム空間 X と任意の $0 \leq t \leq 1$ に対し

$$2 \leq DW(X,t) \leq 4$$

であることが分かる．明らかに，$DW(X,0) = DW(X,1/2) = DW(X,1) = 2$, $DW(X,t) = DW(X,1-t)$ である．

Remark 1. 最近, Melado-Fuster-Navarro [4] は Dunkl-Williams 定数 $DW(X)$ を導入して X の幾何学的性質を考察した．任意のノルム空間 X に対して

$$2 \leq DW(X) \leq 4$$

であり，$DW(X) = 2$ は内積空間を特徴づける (cf. [3], [6], see also [1])．また，$DW(X) < 4$ により uniform non-square な空間が特徴づけられること (cf. [4]) 等が知られている．

$$DW(X) = \sup\{DW(X,t) : 0 \leq t \leq 1\} \tag{4}$$

であることは容易に分かる．

Theorem 1. *For $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ with $\alpha + \beta = 1$, let $\lambda = \max(\alpha, \beta)$. Then for any normed space X and for any $u, v \in S_X$*

$$\|u+v\| \leq \frac{1}{\lambda}\|\alpha u + \beta v\| + 2 - \frac{1}{\lambda}. \tag{5}$$

Proof. $\alpha \leq \beta$ とすると $\lambda = \beta$. このとき, $u + v = \frac{1}{\beta}(\alpha u + \beta v + \beta u - \alpha u)$ より結論を得る．

Remark 2. Theorem 1 より次の Maligranda 不等式 [7] が得られる．

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{\|x-y\| + |\|x\| - \|y\||}{\max(\|x\|, \|y\|)}. \tag{6}$$

実際, $u = x/\|x\|, v = -y/\|y\|$, $\alpha = \|x\|/(\|x\| + \|y\|)$, $\beta = \|y\|/(\|x\| + \|y\|)$ とおけばよい．なお，$\lambda = \min(\alpha, \beta) > 0$ のとき，Theorem 1 の逆不等式が得られる．

Corollary 1. *For $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ with $\alpha + \beta = 1$, let $\lambda = \max(\alpha, \beta)$. Then for any normed space X and for any $u, v \in S_X$*

$$\|u+v\| \leq \frac{2}{\lambda}\|\alpha u + \beta v\|. \tag{7}$$

Remark 3. 上記の不等式において等号が成立する条件を考える．$\lambda = 1/2$ のときは，等号成立条件は $u + v = 0$ である．X が strictly convex のとき，$\lambda \neq 1/2$

で等号が成立するのは，$\lambda = 1, u = v$ の場合のみである．従って，$\lambda \neq 1/2, \lambda \neq 1$ のとき等号が成立するような $u, v \in S_X$ が存在するならば，X は striclly convex ではない．

Corollary 2. *For any normed space X and for any $0 \le t \le 1$*

$$2 \le DW(X,t) \le \frac{2}{\max(t, 1-t)}. \tag{8}$$

ノルム空間 Y が *finitely representable in* X であるとは，Y の任意の有限次元部分空間 F と任意の $\lambda > 1$ に対して，X の有限次元部分空間 E で, dim E=dim F かつ $d(E,F) < \lambda$ を満たすものが存在することである．ここで $d(E,F)$ は E と F の Banach-Mazur distance である: $d(F,E) := \inf\{\|T\|\|T^{-1}\| :$ T is an isomorphism of F onto $E\}$.

Theorem 2. *Let Y be finitely representable in X. Then $DW(Y,t) \le DW(X,t)$ for all $0 \le t \le 1$ and hence $DW(Y) \le DW(X)$.*

Example. Let $Y = (R^2, \| \ \|_\infty)$. Then, for each $0 \le t \le 1$ there exists $u, v \in S_Y$ such that

$$\|u+v\| = \frac{2}{\lambda}\|tu + (1-t)v\|,$$

where $\lambda = \max(t, 1-t)$. Hence we have

$$DW(Y,t) = 2/\max(t, 1-t)$$

for any $0 \le t \le 1, t \neq 1/2$. If Y is finitely representable in X, then

$$DW(X,t) = 2/\max(t, 1-t).$$

Of course,

$$DW(X, 1/2) = DW(Y, 1/2) = 2.$$

$J(X)$ を X の **James 定数**とする．すなわち

$$J(X) = \sup\{\min(\|u-v\|, \|u+v\|) : u, v \in S_X\}.$$

$J(X) < 2$ のとき X は **uniformly non-square** であるという．[4] で

$$DW(X) \le 2 + J(X).$$

が示された. これより X が uniformly non-square であれば

$$DW(X,t) \leq DW(X) < 4 \quad \text{for all } 0 \leq t \leq 1$$

となる.

Corollary 3. *Let X be not uniformly non-square. Then*

$$DW(X,t) = 2/\max(t, 1-t) \tag{9}$$

for all $0 \leq t \leq 1,\ t \neq 1/2$.

Theorem 3. *X is uniformly non-square if and only if there exists* $0 < t < 1$ $(t \neq 1/2)$ *such that*

$$DW(X,t) < 2/\max(t, 1-t). \tag{10}$$

References

[1] G. Benítez and D. Yánez, Middle points, medians and inner products, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 1725-1734.

[2] C. F. Dunkl and K. S. Williams, A simple inequality, Amer. Math. Monthly **71** (1964), 53-54.

[3] N. I. Gurari and Y. I. Sozonov, On normed spaces which have no basis of the unit sphere, Math. Notess **7** (1970), 187-189.

[4] A. Jiménez-Melado, E. Llorens-Fuster and E. M. Mazcunán-Navarro, The Dunkl-Williams constant, convexity, smoothness and normal structure, to appear.

[5] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, Sharp triangle inequality and its reverse in Banach spaces, Math. Inequal. & Appl. **10** (2007), 461-470.

[6] W. A. Kirk and M. F. Smiley, Another characterization of inner product spaces, Amer. Math. Monthly **72** (1964), 890-891.

[7] L. Maligranda, Simple norm inequalities, Amer. Math. Monthly **113** (2006), 256-260.

[8] J. L. Massera and J. J. Schäffer, Linear differential equations and functional analysis I, Ann. of Math. **67** (1958), 517-573.

[9] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and A. M. Fink, Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1993.