数理解析研究所講究録
第 1615 巻 2008 年 20-27

RIESZ BASIS と FRAME の関係について

東海大学開発工学部　中村 昭宏 (Akihiro Nakamura)
Department of Mathematics
Tokai University

ABSTRACT. 最近, P.G. Casazza, O. Christensen, S. Li and A. Lindner は [2] において, ある条件を満たす複素指数関数系は $L^2[-\pi,\pi]$ において, Riesz basis であるか frame にならないかのいずれかであることを示した. これは見方を変えれば, frame が Riesz basis となるための条件を与えるものであるとも考えられる. 本ノートにおいて, 彼らの結果を少し拡げた結果を報告する.

1. INTRODUCTION

まず, ここで扱う点列の定義を述べる. ヒルベルト空間 H における相異なる点列 $\{f_n\}$ は, それらによって生成される線形部分空間が H において dense ならば *complete* in H であるという. このことを $\overline{\text{span}}\{f_n\}=H$ と表す. また, $\{f_n\}$ のどの要素も他のものによって生成される部分空間の閉包に属さないならば, $\{f_n\}$ は *minimal* であるという. つまり, $f_k\notin\overline{\text{span}}\{f_n\}_{n\neq k}$ のときである. 次に, もし, $\sum_n\alpha_nf_n=0$ とすると $\alpha_n=0$ for all n となるならば, $\{f_n\}$ は *ω-independent* であるという. 明らかに, $\{f_n\}$ が minimal ならば ω-independent である.

次に, $\{f_n\}$ が *frame* for H であるとは正の定数 $A,B>0$ が存在して,

$$A\|f\|^2\le\sum_{n=1}^{\infty}|(f,f_n)|^2\le B\|f\|^2$$

が成り立つことである. 定数 A,B は *frame bounds* と呼ばれる. 定義の中で, H を $\overline{\text{span}}\{f_n\}$ に置き換えるならば $\{f_n\}$ を *frame sequence* であるという.[1]

$\{f_n\}$ が complete であり, かつ正の定数 $A,B>0$ が存在して, 任意の有限数列 $\{c_n\}$ に対して

$$A\sum|c_n|^2\le\left\|\sum c_nf_n\right\|^2\le B\sum|c_n|^2$$

が成り立つならば, $\{f_n\}$ は *Riesz basis* for H であるという. 定数 A,B に特に呼び名はないが, 本ノートでは *Riesz bounds* と呼ぶことにする. 定義の中で, H を $\overline{\text{span}}\{f_n\}$ に置き換えるならば $\{f_n\}$ を *Riesz sequence* であるという. Riesz basis は frame となり, このとき, frame bounds と Riesz bounds は一致することが知られている. また, 逆に, ある条件の下で frame が Riesz basis となるときもこれらの定数

[1] *2000 Mathematical Subject Classification*: 42C15, 42C30, 42C99.
keywords: Riesz basis, Riesz sequence, frame, frame sequence.

は一致することが知られている (例えば, Young[12, pp.126 $\sim$ 131] を参照). frame が Riesz basis となるための以下の結果もよく知られている:

Proposition A (e.g. Young [12, pp.154 $\sim$ 158).
If $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ is a frame and is ω-independent, then it is a Riesz basis.

複素数列 $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は, もし

$$\inf_{n\neq m} |\lambda_n - \lambda_m| > 0$$

を満たすならば, *separated* であるといわれる. 本ノートにおいて, 我々はヒルベルト空間として $H = L^2[-\pi,\pi]$ を, そして, $\sup_n |\mathrm{Im}\ \lambda_n| < \infty$ を満たす separated 複素数列 $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に対して, $\{f_n\} = \{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を考えて, Riesz bases (Riesz sequences) と frames (frame sequences) との間の関係を調べる.

まず, §2 において, 上記に述べた性質を持つ, あるいは持たない, いくつかの例を挙げる.

最近, P.G. Casazza, O. Christensen, S. Li, and A. Lindner は [2] において, Balan [3] 等の結果を用いて, 次の結果を得た:

Theorem A ([2, Proposition 16.10]).
Let $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ be a sequence of real numbers such that

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |\lambda_k - k| = \frac{1}{4}. \tag{1.1}$$

Then either $\{e^{i\lambda_k t}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ is a Riesz basis for $L^2[-\pi,\pi]$ or it is not a frame for $L^2[-\pi,\pi]$.

§3 において, 我々は Theorem A における条件 (1.1) をはずした結果を得る.

もう 1 つの結果を述べる前に, 我々は "excess" と呼ばれる概念を導入する. 複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ から, N 個の項を取り除いたとき, complete のままで minimal となるならばそれは *excess* N を持つといい,

$$E(\boldsymbol{\lambda}) = N$$

と表す. 逆に, $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に N 個の項

$$e^{i\mu_1 t}, \cdots, e^{i\mu_N t}$$

を付け加えると, complete かつ minimal となるならば

$$E(\boldsymbol{\lambda}) = -N$$

と表す. 複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が minimal または complete であることは excess を用いると以下のようにまとめられることが知られている:

- $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が minimal であるための必要十分条件は $E(\boldsymbol{\lambda}) \leq 0$.

- $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が complete かつ minimal であるための必要十分条件は $E(\boldsymbol{\lambda}) = 0$.

便宜上, 任意有限個の項を取り除いても complete 性が失われない場合は, $E(\boldsymbol{\lambda}) = \infty$ であると考え, また任意有限個の項を付け加えても complete にならない場合は, $E(\boldsymbol{\lambda}) = -\infty$ であると考える.

本ノートのもう 1 つの結果は excess を用いた, Riesz basis と frame との関係について述べたものである.

2. いくつかの例

ここでは, 複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の Riesz basis, basis, minimal, ω-independent, separated, complete といった性質を持つ例と持たない例をいくつか挙げる. 以下のように記号を定める. ここで, 単なる "basis" とは, Riesz basis の定義における無条件収束の仮定をはずしたものをさす.

$$\text{RB} = \text{Riesz basis},\ \ \text{B} = \text{basis},\ \ \text{F} = \text{frame}.$$

$$\text{CM} = \text{complete かつ minimal},\ \ \text{C}\omega = \text{complete かつ}\ \omega\text{-independent}.$$

$$\text{CSP} = \text{complete かつ separated},\ \ \text{C} = \text{complete}.$$

すぐにわかることもあるが, 次の関係が成り立つ：

$$\text{RB} \longrightarrow \text{B} \longrightarrow \text{CM} \longrightarrow \text{C}\omega.$$

$$\text{RB} \longrightarrow \text{F} \longrightarrow \text{C}.$$

$$\text{CM} \longrightarrow \text{CSP}.$$

これらの関係の逆は, "B $\longrightarrow$ RB" が未知である他は全て成り立たないことが知られている.

例 1. $\{e^{i\lambda_n t}\} \in$CM, $\notin$B かつ $\notin$F なる例 (Levinson [5] ; Young [10], [11]; Casazza, Christensen, Li and Lindner [2]).

$$\mu_n = \begin{cases} n - \frac{1}{4}, & n > 0, \\ n + \frac{1}{4}, & n < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\lambda_n = \begin{cases} n + \frac{1}{4}, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ n - \frac{1}{4}, & n < 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

これらの例が CM であることは, [5] で示されており, basis でないことは [10], [11] の結果であり, frame でないことは Theorem A より明らかである. 実はこれら 2 つの例は実質的には 1 つである. $L^2[-\pi,\pi]$ 上の *isometric isomoriphism*,

$$\phi(t) \longmapsto e^{-i\frac{t}{2}}\phi(t)$$

を施すと, (2.1) は (2.2) に移ることがわかる.

例 2. $\{e^{i\lambda_n t}\}$ $\in$F かつ $\notin$CM; $\{e^{i\lambda_n t}\}$ $\in$CSP かつ $\notin$Cω なる例.

$$\{e^{i\frac{t}{2}},\ e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

これは, ほとんど明らかな例である.

例 3. $\{e^{i\lambda_n t}\}$ $\in$CSP, $\in$Cω かつ $\notin$CM (Young [10] and Singer [9]), $\notin$ F (Casazza, Christensen, Li and Lindner [2]) なる例.

$$\lambda_n = \begin{cases} n - \frac{1}{4}, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ n + \frac{1}{4}, & n < 0. \end{cases}$$

Cω であることは, [9] の §6, Example 6.1 の b) において述べられている一般の Banach 空間の議論を, (2.1) で与えられる $\{e^{i\mu_n t}\}_{n\neq 0}$ が basis でないことを示した [10] の結果にそのまま適用すれば示される. $\{e^{i\lambda_n t}\}$ $\in$Cω かつ $\notin$CM(従って, $\notin$RB) だから, Proposition A より, $\{e^{i\lambda_n t}\}$ $\notin$ F であることがわかる. この結果は [2, Example 16.11] でも述べられてあるが, 我々は別証明を与えた.

例 4. $\{e^{i\lambda_n t}\}$ $\in$F かつ $\notin$SP なる例.

$$\mu_n = \begin{cases} n + \frac{1}{5}, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ n - \frac{1}{5}, & n < 0. \end{cases}$$

$$\gamma_n = \begin{cases} n + \frac{1}{5} + \varepsilon_n, & n > 0, \\ n - \frac{1}{5} - \varepsilon_n, & n < 0. \end{cases}$$

ここで, $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n \neq 0$ を満たす. そのとき, $\{e^{i\mu_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \{e^{i\gamma_n t}\}_{n\neq 0}$ $\in$F かつ $\notin$SP であることは明らかである.

3. Main Results

ここでは, まず, Theorem A の結果を少し拡げた結果を述べる. 意外と simple な事実から得られる. 次に, excess を用いた, Riesz basis と frame との関係の結果を述べる.

Proposition 3.1. *If $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ is minimal, then it is either a Riesz sequence or not a frame sequence in $L^2[-\pi,\pi]$.*

この結果は, Proposition A を用いて, ただちに得られる. また, "minimal" の仮定は "ω-independent" に置き換えてもよい.

Corollary 3.1. *If $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ is incomplete, then it is either a Riesz sequence or not a frame sequence in $L^2[-\pi,\pi]$.*

これは, $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が complete でないならば minimal になるという結果 (Schwarz; see Alexander and Redheffer [1, p.61, Remark 4]) を使えば, Proposition 3.1 から ただちに得られる. 次の Corollary は Theorem A を含む結果と考えられる.

Corollary 3.2. *Let a, b be nonnegative constants and $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ be a complex sequence such that*

$$\varepsilon_0 = 0,\ \sup_n |\mathrm{Re}\ \varepsilon_n| < \frac{1}{4},\ \sup_n |\mathrm{Im}\ \varepsilon_n| < \infty.$$

If we define the sequence $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ as follows,

$$\lambda_n = \begin{cases} n + \varepsilon_n + a, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ n + \varepsilon_n - b, & n < 0, \end{cases}$$

then $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ is either a Riesz sequence or not a frame sequence in $L^2[-\pi,\pi]$.

この結果は Kadec's 1/4-Theorem と [4, Theorem] および Proposition 3.1. を用いて証明される.

Corollary 3.2 において, 特に, $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は実数列とし, $\sup_{n\neq 0}|\varepsilon_n| < \frac{1}{4}$ を満たすとし, $a = b = 1/4$ ととる. つまり,

$$\lambda_n = \begin{cases} n + \frac{1}{4} + \varepsilon_n, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ n - \frac{1}{4} + \varepsilon_n, & n < 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

とすると, $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は Riesz sequence であるか, frame sequence でないかのいずれかであることがわかる. さらに,

$$\varepsilon_n \begin{cases} \leq 0, & n > 0, \\ \geq 0, & n < 0, \end{cases}$$

かつ $\inf_{n\neq 0} |\varepsilon_n| = 0$ とすると，これは Theorem A を与える．
次に，Redheffer and Young [8, Theorem 3] によって与えられた次の例を考える：

Theorem B.
Let

$$\mu_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ 1, & n = 1, \\ n + \dfrac{1}{4} + \dfrac{\beta}{\log n}, & n \geq 2 \\ -\mu_{-n}, & n < 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

then $\{e^{i\mu_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *is complete in* $L^2[-\pi, \pi]$ *if* $0 \leq \beta \leq 1/4$ *and not if* $\beta > 1/4$.

$\beta \neq 0$ のときは，$\sup_n |\mu_n - n| > 1/4$ だから，この例に Theorem A は適用できないが，Corollary 3.2 が適用できる．我々は $\varepsilon_n = \beta/\log n$ $(n \geq 2)$ ととる．Redheffer [7, Theorem 47] と [4] から，$E(\boldsymbol{\mu}) = 0$ for $0 \leq \beta \leq 1/4$ かつ $E(\boldsymbol{\mu}) = -1$ for $\beta > 1/4$ となることがわかる．さらに，[6, Theorem 2.1 and §3] において，$0 \leq \beta \leq 1/4$ に対して，$\{e^{i\mu_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は Riesz basis ではなく，$\beta > 1/4$ に対しては，Riesz sequence でないことが得られた．その結果，Corollary 3.2 から，$0 \leq \beta \leq 1/4$ に対しては，$\{e^{i\mu_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は frame でなく，$\beta > 1/4$ に対しては，frame sequence でないことがわかる．なお，$0 < \beta \leq 1/4$ のとき，$\{e^{i\mu_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が basis となるかどうかは未解決である ([6, Problem 3.1])．
次の結果は Young [12, p.156, Lemma 6] から，帰納的に得られる．

Proposition B.
Let $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *be a frame in a Hilbert space* H *and* I *be a finite subset of* $\mathbb{N}$,

$$I = \{n_1, n_2, ..., n_m\}.$$

Then $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}-I}$ *leaves either a frame or an incomplete set.*

これを用いると, 以下の結果が得られる：

Theorem 3.1. *Let $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ be a sequence of complex numbers satisfying*

$$|\lambda_n - n| \le L, \tag{3.3}$$

where L is a positive constant and assume that $E(\boldsymbol{\lambda}) = m \ge 1$, and let I be any subset of m-elements from $\mathbb{Z}$,

$$I = \{n_1, n_2, ..., n_m\} \subset \mathbb{Z}.$$

Then $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}-I}$ is a Riesz basis if and only if $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ is a frame.

この結果はこれまで述べてきた安定性の結果と異なる, Riesz basis と frame との関係を与えるものである.

Remark 3.1. Theorem 3.1 を用いると, Theorem A の結果をもう少し詳しく述べることができる. すなわち, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n - n| = \frac{1}{4}$$

を満たす実数列とする. このとき, [7, Theorem 47] を用いると, $E(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ または 1 となることがわかる. もし, $E(\boldsymbol{\lambda}) = 1$ とすると, $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は Riesz basis でないから, Theorem A より frame でないことがわかる. その結果, Theorem 3.1 から, 任意の $n_1 \in \mathbb{Z}$ に対して, $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\ne n_1}$ は Riesz basis でないことがわかる.

最後に frame でない例を 2 つ挙げる. これらの例が frame でないことは, Theorem A からただちに導かれるが, 我々の結果を用いた別証明を述べる.

Example 3.1.

$$\mu_n = \begin{cases} n - \frac{1}{4}, & n > 0, \\ n + \frac{1}{4}, & n < 0, \end{cases}$$

とすると, [5, p.67] (see [12, Theorem 5, p.103]) によって, $\{e^{i\mu_n t}\}_{n\ne 0}$ は *complete and minimal* であることがわかる. また, [10, Theorem 2] から, それは *basis* でないこともわかる. 従って, *Riesz basis* でもないから, Proposition 3.1 より, *frame* でないことがわかる.

次の例が frame でない別証明をすでに, p.4 で与えたが, 以下に述べるように Theorem 3.1 を用いても導かれる.

Example 3.2. *Let*

$$\lambda_n = \begin{cases} n - \frac{1}{4}, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ n + \frac{1}{4}, & n < 0, \end{cases}$$

then $E(\boldsymbol{\lambda}) = 1$ *and* $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\neq 0}$ *is not a* Riesz basis *as shown by the above example. Consequently,* $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *is not a frame by* Theorem 3.1.

REFERENCES

[1] W.O. Alexander and R.M. Redheffer, *The excess of sets of complex exponentials*, Duke Math. **34** (1967), 59-72.

[2] P.G. Casazza, O. Christensen, S. Li, and A. Lindner, *Density Results for Frames of Exponentials*, Harmonic analysis and applications, 359-369, Appl. Numer. Harmon. Analy., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[3] R. Balan, *Stability theorems for Fourier frames and wavelet Riesz bases*, J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997), 499-504.

[4] N. Fujii, A. Nakamura and R.M. Redheffer, *On the Excess of Sets of Complex Exponentials*, Proc. Amer. Math. Soc.**127** (1999), 1815-1818.

[5] N. Levinson, *Gap and Density Theorems*, AMS Colloquium Publications **26**(1940).

[6] A. Nakamura, *Basis properties and complements of complex exponential systems*, Hokkaido Math. J. 36 (2007), 195-208.

[7] R.M. Redheffer, *Completeness of Sets of Complex Exponentials*, Adv. Math. **24** (1977), 1-62.

[8] R.M. Redheffer and R.M. Young, *Completeness and Basis Properties of Complex Exponentials*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 93-111.

[9] I. Singer, *Bases in Banach spaces*, Springer Verlag, Berlin and New York, 1970.

[10] R.M. Young, *On a Theorem of Ingham on Nonharmonic Fourier Series* , Proc. Amer. Math. Soc. Vol.**92**(1984), 549 - 553.

[11] R.M. Young, *On the Stability of Exponential Bases in* $L^2[-\pi,\pi]$, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 117-122.

[12] R.M. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, revised first edition, Academic Press 2001.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKAI UNIVERSITY, 316 NISHINO, NUMAZU, SHIZUOKA, 410-0395, JAPAN

E-mail address: a-nakamu@wing.ncc.u-tokai.ac.jp