数理解析研究所講究録
第 1616 巻 2008 年 195-208

微分非線形 Schrödinger 方程式の周期進行波解列

広島大学大学院理学研究科　今村　耕也 (Imamura Kouya)
Graduate School of Sciences
Hiroshima University

1　導入

本小論は [2] の続きである. 次の微分非線形 Schrödinger 方程式

$$\mathrm{i}u_t + u_{xx} + \mathrm{i}(|u|^2 u)_x = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \tag{1.1}$$

の周期進行波解について考察する. すなわち

$$u(t,x) = \phi(kx-\omega t) = \phi(\xi) \quad (\xi = kx - \omega t)$$

となる周期関数 $\phi(\xi)$ について考える. ここで

$$k: \text{波数}, \quad \omega: \text{角振動数}$$

であり, $\omega, k > 0$ としておく. (1.1) はプラズマ中の Alfvén 波の挙動を記述する電磁流体モデルの縮約方程式として [5] 等で導出された.

定理 1. (1.1) の周期進行波 $\phi(\xi)$

$$\begin{cases} \phi(\xi) = X(\xi) + \mathrm{i}Y(\xi) \quad (X(\xi), Y(\xi) \in \mathbb{R}), \\ \phi(0) = r_0 \in \mathbb{R}, \\ \phi'(0) = \mathrm{i}D_0 \in \mathrm{i}\mathbb{R}, \end{cases}$$

は次のように表現される :

$$X(\xi) = \begin{cases} \sqrt{k}r\cos(d-r^2)\xi \quad (A=0), \\ \dfrac{\sqrt{k}(U(\xi)^2 - B)}{A} \quad (A \neq 0), \end{cases}$$

$$Y(\xi) = \begin{cases} \sqrt{k}r\sin(d-r^2)\xi \quad (A=0), \\ -\dfrac{2\sqrt{k}U'(\xi)}{A} \quad (A \neq 0), \end{cases}$$

ここで,

$$\begin{aligned} A &= 4(r^3 - dr + D), \\ B &= r^4 - 2dr^2 - Ar + d^2, \\ r &= \frac{r_0}{\sqrt{k}}, \\ D &= \frac{D_0}{\sqrt{k}}, \\ d &= \frac{\omega}{k^2}. \end{aligned}$$

$U(\xi), U'(\xi)$ については, 形が複雑なので, §3 で述べることにする.

2 周期解の求め方

2.1 周期軌道

$u(t,x)=\phi(kx-\omega t)=\phi(\xi)$ $(\xi=kx-\omega t)$ を (1.1) に代入すると

$$-\mathrm{i}\omega\phi'+k^2\phi''+\mathrm{i}k(|\phi|^2\phi)'=0 \quad \left('=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right).$$

これを一回積分すると

$$-\mathrm{i}\omega(\phi-\phi(0))+k^2(\phi'-\phi'(0))+\mathrm{i}k(|\phi|^2\phi-|\phi(0)|^2\phi(0))=0.$$

$\phi(0)=r_0\in\mathbb{R}$ とする. さらに, 次の補題 1 より, $\phi'(0)$ を $\phi(0)\perp\phi'(0)$, すなわち,

$$\phi'(0)=\mathrm{i}D_0 \ (D_0\in\mathbb{R})$$

となるようにとることが出来る.

補題 1. $u(t,x)$ が (1.1) の解ならば, 任意の $\theta\in\mathbb{R}$ に対して

$$v_{\mathrm{r}}(t,x):=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}u(t,x)$$

も (1.1) の解である.

$\phi=X+\mathrm{i}Y$ $(X,Y\in\mathbb{R})$ とおくと

$$\begin{cases} X'=\dfrac{1}{k^2}(kX^2+kY^2-\omega)Y, \\ Y'=-\dfrac{1}{k^2}(kX^2+kY^2-\omega)X-\dfrac{\omega r_0}{k^2}+\dfrac{r_0^3}{k}+D_0. \end{cases}$$

$D_0=0$ とすると $(p,q)=(r_0,0)$ が平衡解となる. よって, $D_0\neq 0$ とできる. 以下, 簡単のため, $D_0>0$ とする. $X=\sqrt{k}p, Y=\sqrt{k}q, r_0=\sqrt{k}r, D_0=\sqrt{k}D$ でリスケールすると

$$\begin{cases} p'=(p^2+q^2-d)q, \\ q'=-(p^2+q^2-d)p+\dfrac{A}{4}. \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで $A=0$ とすると

$$\begin{cases} p'=(r^2-d)q, \\ q'=-(r^2-d)p, \end{cases}$$

となり,

$$p+\mathrm{i}q=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(d-r^2)\xi}$$

すなわち

$$\phi(\xi)=\sqrt{k}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(d-r^2)\xi}$$

を得る.

以下, $A \neq 0$ とする. (2.1) は

$$H(p,q) := \frac{1}{4}(p^2+q^2)(p^2+q^2-2d) - \frac{A}{4}p$$

をハミルトン関数とするハミルトン系である. よって周期軌道は $H(p,q)$ の等高線に含まれる. 従って, $(p,q) = (r,0)$ を通る等高線を見つける必要がある. この等高線は

$$H(p,q) - H(r,0) = 0$$

で定められる. これを解いて,

$$q^4 - 2(d-p^2)q^2 + p^4 - 2dp^2 - Ap - r^4 + 2dr^2 + Ar = 0.$$

q^2 について解くと

$$q^2 = \begin{cases} d - p^2 - \sqrt{f(p)} & (d \geq 0 \text{ かつ } |p + \mathrm{i}q| \leq \sqrt{d}), \\ d - p^2 + \sqrt{f(p)} & (\text{otherwise}), \end{cases} \tag{2.2}$$

ここで

$$f(p) := Ap + B$$

である.

$$U = \begin{cases} \sqrt{f(p)} & (d \geq 0 \text{ かつ } |p + \mathrm{i}q| \leq \sqrt{d}), \\ -\sqrt{f(p)} & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

で変数変換すると

$$p = \frac{U^2 - B}{A}.$$

また, (2.1), (2.2) より, $p' = -Uq$ であるから

$$q = -\frac{2U'}{A}.$$

次に, U を ξ の関数として表す. ここでは $|p + \mathrm{i}q| \leq \sqrt{d}$ $(d \geq 0)$ の場合を考えるが, 他の場合も同様の方法により同じ結果 (すなわち (2.3)) を得る.

$$\begin{cases} p' = -\sqrt{f(p)}(d - p^2 - \sqrt{f(p)})^{1/2} =: -G(p), \\ p(0) = r. \end{cases}$$

これは次のように解ける.

$$\int_0^{\xi} \frac{p'(\xi)}{G(p(\xi))} \mathrm{d}\xi = -\xi = \int_r^{p(\xi)} \frac{\mathrm{d}p}{G(p)}$$

この最右辺を計算する.

$$R := d - r^2$$

とおくと

$$\int_r^{p(\xi)} \frac{\mathrm{d}p}{G(p)} = 2\int_R^U \frac{\mathrm{d}U}{\sqrt{g(U)}}.$$

ここで

$$g(U) = -U^4 + 2BU^2 - A^2U + dA^2 - B^2.$$

よって

$$\xi = -2\int_R^U \frac{\mathrm{d}U}{\sqrt{g(U)}} \tag{2.3}$$

を得る.

(2.3) のように

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{F(x)}} \quad (F \text{ は } x \text{ の 3 次または 4 次関数})$$

の形をした積分は楕円積分と呼ばれ，普通は初等的な方法で求めることは出来ない．このため，ヤコビの楕円関数を導入する必要がある．

2.2 ヤコビの楕円関数

$$y = \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-\kappa^2 z^2)}} \quad (0 < \kappa < 1) \tag{2.4}$$

の逆関数を

$$z = \mathrm{sn}\, y = \mathrm{sn}(y, \kappa)$$

と記す．(2.4) の右辺を (第一種楕円積分の) 標準形と呼ぶ．

$$K = K(\kappa) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-\kappa^2 z^2)}}$$

とおくと，$\mathrm{sn}(y, \kappa)$ は $4K$ を周期とする周期関数となる．また，cn, dn を

$$\mathrm{cn}(y,\kappa) = \begin{cases} \sqrt{1-\mathrm{sn}^2(y,\kappa)} & (-K \le y \le K), \\ -\sqrt{1-\mathrm{sn}^2(y,\kappa)} & (K \le y \le 3K), \end{cases}$$
$$\mathrm{dn}(y,\kappa) = \sqrt{1-\kappa^2\mathrm{sn}^2(y,\kappa)},$$

のように定義する．$\mathrm{cn}\, y$ は周期 $4K$, $\mathrm{dn}\, y$ は周期 $2K$ の関数である．微分は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathrm{sn}\, y = \mathrm{cn}\, y\ \mathrm{dn}\, y$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathrm{cn}\, y = -\mathrm{sn}\, y\ \mathrm{dn}\, y$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathrm{dn}\, y = -\kappa^2\mathrm{sn}\, y\ \mathrm{cn}\, y$$

となる．詳細については，[1],[3],[4] 等を参照.

2.3 楕円積分の計算の準備

$$\int_R^U \frac{\mathrm{d}U}{\sqrt{g(U)}}$$

を標準形にするとき, 次の 2 つの情報が必要となる:

1. $g(U)=0$ の実数解の (重根を含めた) 個数 (これを $i(g)$ とおく).
2. 実数解の大きさの順序 (R は何番目に大きい解であるか).

R は必ず $g(U)=0$ の実数解となることに注意する.

まず, $i(g)$ が 2 と 4 のどちらになるか, という条件を求める. $g(U)$ は

$$g(U)=-(U-R)(U^3+RU^2-(2B-R^2)U+A^2-(2B-R^2)R)$$

と因数分解できる. よって $i(g)$ の値を求めるには,

$$U^3+RU^2-(2B-R^2)U+A^2-(2B-R^2)R=0$$

の実数解の個数を求めればよい. このため, 次の補題を用いる.

補題 2. z の 3 次方程式

$$z^3+az+b=0 \quad (a,b\in\mathbb{R})$$

が実数解を 3 つ持つための必要十分条件は,

$$b^2+\frac{4}{27}a^3\leq 0$$

となることである.

補題 2 を使うため, $U=U_0-R/3$ とおくと

$$g(U)=-\left(U_0-\frac{4}{3}R\right)\left\{U_0^3+\left(\frac{2}{3}R^2-2B\right)U_0+A^2-\frac{4}{3}BR+\frac{20}{27}R^3\right\}.$$

(i) $r=0$ のとき
補題 2 より, $i(g)=4$ となる必要十分条件は

$$\begin{aligned}&\left(A^2-\frac{4}{3}BR+\frac{20}{27}R^3\right)^2+\frac{4}{27}\left(\frac{2}{3}R^2-2B\right)^3\\&=\frac{256}{27}D^2(27D^2-2d^3)\leq 0.\end{aligned}$$

よって

$$i(g)=\begin{cases}4 & \left(d\geq 0 \text{ かつ } 0<D\leq\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}d\sqrt{d}\right),\\ 2 & (\text{otherwise}).\end{cases}$$

(ii) $r \neq 0$ のとき
補題 2 より, $i(g) = 4$ となる必要十分条件は

$$\left(A^2 - \frac{4}{3}BR + \frac{20}{27}R^3\right)^2 + \frac{4}{27}\left(\frac{2}{3}R^2 - 2B\right)^3$$
$$= \frac{16}{27}r^6A^2\left\{27\tilde{D}^2 + 4(2-9\chi)\tilde{D} - 2\chi^3 + 8\chi^2 - 8\chi\right\} < 0$$

である. ここで,

$$\tilde{D} := \frac{D}{r^3},$$
$$\chi := \frac{d}{r^2} - 1.$$

これにより,

$$i(g) = \begin{cases} 4 & \left(\chi \geq -\dfrac{2}{3} \text{ かつ } h_- \leq \tilde{D} \leq h_+\right), \\ 2 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

ここで,

$$h_\pm := \frac{18\chi - 4 \pm \sqrt{2(3\chi+2)^3}}{27}.$$

次に, 実数解の大きさの順序 (R は何番目に大きいか) を考える. $i(g) = 2$ の場合は, $g'(R)$ の正負を調べればよい. $i(g) = 4$ の場合は, $g(U) = 0$ の R 以外の実数解を $P < Q < S$ とおくと, 以下の 3 つの情報

1. $g'(R)$ の正負,
2. $dA^2 - B^2 (= g(0))$ の正負,
3. R の正負,

および以下の 3 つの事実

1. $P + Q + R + S = 0$ 　($g(U)$ の 3 次の項が 0 より),
2. $g(-R) = 2A^2R$,
3. R の大きさの順序が入れ替わるとき, $g'(R) = 0$ となる,

により, 実数解の大きさの順序が次ページのように決定される. なお, $g'(R)$ の正負については, $r = 0$ のときは $g'(R) = -16D^2$ より, 恒等的に $g'(R) < 0$ となる. また, $r \neq 0$ のときは

$$g'(R) = -16r^6\tilde{D}(\tilde{D} - \chi)$$

より, $\tilde{D} > 0$(すなわち $r > 0$) のとき

$$g'(R) \gtrless 0 \Longleftrightarrow \tilde{D} \lessgtr \chi,$$

$\tilde{D} < 0$(すなわち $r < 0$) のとき

$$g'(R) \gtrless 0 \Longleftrightarrow \tilde{D} \gtrless \chi,$$

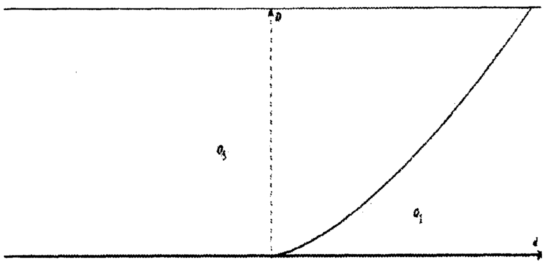

Figure 1: $r = 0$ のとき

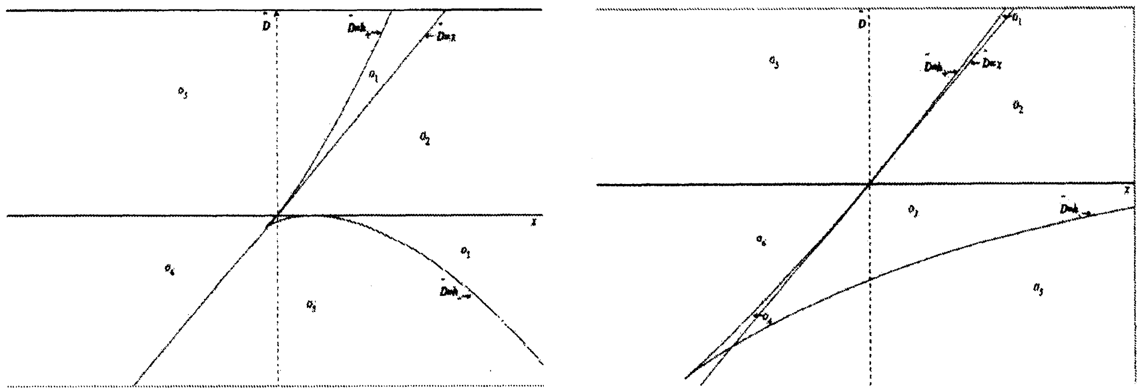

Figure 2: $r \neq 0$ のとき (右図は原点付近を拡大したもの)

境界は実線で表す (点線は境界ではない). 各領域での実数解の大きさの順序は次のようになる.

$\mathcal{O}_1$	$\mathcal{O}_2$	$\mathcal{O}_3$	$\mathcal{O}_4$	$\mathcal{O}_5$	$\mathcal{O}_6$
$P < Q < S < R$	$P < Q < R < S$	$P < R < Q < S$	$R < P < Q < S$	$S < R$	$R < S$

となる.

例として, $\mathcal{O}_2$ の場合を考える. このとき, $g'(R) > 0, R > 0, i(g) = 4$ である. $g'(R) > 0$ より, R は 2 番目または 4 番目に大きい解である. ここで, R は 4 番目に大きい解 (すなわち一番小さい解) であるとすると, $R > 0$ であるから, $P + Q + R + S = 0$ に矛盾する. 従って, R は 2 番目に大きい解である.

2.4 楕円積分の計算

この小節では, (2.3), すなわち $U(\xi)$ を, 楕円関数を用いて表現する計算方法を紹介する ([1],[3] 参照).

2.4.1 $i(g) = 4$ の場合

ここでは, $\mathcal{O}_2$ の場合 (すなわち $P < Q < R < S$ の場合) を考える.

$$U(\xi) = \frac{R + SV(\xi)^2}{1 + V(\xi)^2}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} I &:= \int_R^U \frac{\mathrm{d}U}{\sqrt{g(U)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{(S-P)(S-Q)}} \int_0^V \frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{\left(\frac{R-P}{S-P} + V^2\right)\left(\frac{R-Q}{S-Q} + V^2\right)}} \end{aligned}$$

となる.

$$a = \sqrt{\frac{R-P}{S-P}}, \quad b = \sqrt{\frac{R-Q}{S-Q}}$$

とおく. さらに

$$V(\xi)^2 = \frac{b^2 W(\xi)^2}{1 - W(\xi)^2}$$

とおくと

$$I = \frac{2}{\sqrt{(R-P)(S-Q)}} \int_0^W \frac{\mathrm{d}W}{\sqrt{(1-W^2)(1-\kappa^2 W^2)}},$$

ここで $\kappa = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ である. $2I = -\xi$ であったから,

$$\int_0^W \frac{\mathrm{d}W}{\sqrt{(1-W^2)(1-\kappa^2 W^2)}} = -\frac{\sqrt{(R-P)(S-Q)}}{4}\xi.$$

よって

$$W(\xi) = -\mathrm{sn}\,(L\xi, \kappa) \quad \left(L := \frac{\sqrt{(R-P)(S-Q)}}{4}\right).$$

以上より

$$U(\xi) = \frac{(S-Q)R - (S-R)QW(\xi)^2}{S-Q-(S-R)W(\xi)^2}.$$

$i(g) = 4$ の他の領域も, 似たような方法で計算できる.

2.4.2 $i(g) = 2$ の場合

ここでは $\mathcal{O}_5$ の場合を考える ($\mathcal{O}_6$ の場合も同様の方法でできる). R 以外の実数解を S, 複素数解を $P, \overline{P}$ ($\mathrm{Im}P > 0$) とおく. z の 2 次方程式

$$(b_1 - b_2)z^2 + 2(c_1 - c_2)z + b_2c_1 - b_1c_2 = 0$$
$$(b_1 = -(R+S),\ b_2 = -(P+\overline{P}),\ c_1 = RS,\ c_2 = P\overline{P})$$

は 2 つの実数解を持つ. その実数解を m, n とする.

$$U(\xi) := \frac{m + nV(\xi)}{1 + V(\xi)} \tag{2.5}$$

とおく. この変換により, R と S は実軸上に, 原点に対して対称に写り, P と $\overline{P}$ は虚軸上に, 原点に対して対称に写る. 写った点をそれぞれ $V_R, V_S, V_P, V_{\overline{P}}$ とおくと, $V_R = \tau, V_S = -\tau, V_P = \tilde{\tau}, V_{\overline{P}} = -\tilde{\tau}$ $(\tau, \tilde{\tau} > 0)$ とすることができる.

$$\begin{cases} R = \dfrac{m + n\tau}{1+\tau}, & S = \dfrac{m - n\tau}{1-\tau} \\ P = \dfrac{m + \mathrm{i}n\tilde{\tau}}{1+\mathrm{i}\tilde{\tau}}, & \overline{P} = \dfrac{m - \mathrm{i}n\tilde{\tau}}{1-\mathrm{i}\tilde{\tau}} \end{cases}$$

まず τ を求める. 後の計算のために $\tau < 1$ の必要がある.

$$m = \frac{(1+\tau)R + (1-\tau)S}{2} = \frac{(1+\mathrm{i}\tilde{\tau})P + (1-\mathrm{i}\tilde{\tau})\overline{P}}{2}$$
$$\Longrightarrow \tilde{\tau} = \frac{(R-S)\tau + R + S - P - \overline{P}}{\mathrm{i}(P - \overline{P})}$$

であり, また

$$n = \frac{(1+\tau)R - (1-\tau)S}{2\tau} = \frac{(1+\mathrm{i}P)\tilde{\tau} - (1-\mathrm{i}\tilde{\tau})\overline{P}}{2\tilde{\tau}}$$
$$\Longrightarrow \tilde{\tau} = \frac{(P - \overline{P})\tau}{\mathrm{i}\{R - S + (R + S - P - \overline{P})\tau\}}$$

であるから

$$MN\tau^2 + (M^2 + N^2 + J^2)\tau + MN = 0.$$

ここで

$$M := R - S$$
$$N := R + S - P - \overline{P} (= 2(R+S))$$
$$J := \frac{P - \overline{P}}{\mathrm{i}}$$

補題 3. $M > 0, N < 0$ および $J > 0$.

Proof. $R > 0$ のとき, $g(-R) < 0$ であるから, $N = 2(R+S) < 0$. また, $R < 0$ のとき, $S < R$ であるから, $N = 2(R+S) < 0$. 他は自明. □

$M > 0, N < 0$ であり, また, $\tau < 1$ の必要があるから

$$\tau = \frac{-(M^2+N^2+J^2)+\sqrt{(M^2+N^2+J^2)^2-4M^2N^2}}{2MN}.$$

次に $\tilde{\tau}$ を求める.

$$\begin{aligned} m &= \frac{(1+\tau)R+(1-\tau)S}{2} = \frac{(1+\mathrm{i}\tilde{\tau})P+(1-\mathrm{i}\tilde{\tau})\overline{P}}{2} \\ \Longrightarrow \tau &= \frac{P+\overline{P}-R-S+\mathrm{i}(P-\overline{P})\tilde{\tau}}{R-S} \end{aligned}$$

であり, また

$$\begin{aligned} n &= \frac{(1+\tau)R-(1-\tau)S}{2\tau} = \frac{(1+iP)\tilde{\tau}-(1-\mathrm{i}\tilde{\tau})\overline{P}}{2\tilde{\tau}} \\ \Longrightarrow \tau &= \frac{-(R-S)\tilde{\tau}}{(R+S-P-\overline{P})\tilde{\tau}+\mathrm{i}(P-\overline{P})} \end{aligned}$$

であるから

$$\tilde{\tau}^2 - \frac{M^2-N^2+J^2}{NJ}\tilde{\tau} - 1 = 0 \tag{$\star$}$$

$(\star)$ の左辺に $\tilde{\tau} = 0$ を代入すると (左辺) $= -1$ となるので, $(\star)$ の解は正負 1 つずつ. $NJ < 0$ および $\tilde{\tau} > 0$ より

$$\tilde{\tau} = \frac{M^2-N^2+J^2-\sqrt{(M^2-N^2+J^2)^2+4N^2J^2}}{2NJ}.$$

(2.5) より

$$\int_R^U \frac{\mathrm{d}U}{\sqrt{g(U)}} = \frac{2\tilde{\tau}}{J}\sqrt{\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}}\int_\tau^V \frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{(\tau^2-V^2)(\tilde{\tau}^2+V^2)}}.$$

さらに

$$V(\xi) = \frac{\kappa\tilde{\tau}W(\xi)}{\sqrt{1-\kappa^2W(\xi)^2}}, \quad \kappa = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+\tilde{\tau}^2}}$$

により変数変換すると

$$\int_\tau^V \frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{(\tau^2-V^2)(\tilde{\tau}^2+V^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\tau^2+\tilde{\tau}^2}}\int_1^W \frac{\mathrm{d}W}{\sqrt{(1-Z^2)(1-\kappa^2W^2)}}$$

となるから (この方程式より, $\tau < 1$ となることが必要),

$$\xi = -2\int_R^U \frac{\mathrm{d}U}{g(U)} = \frac{4\tilde{\tau}}{J}\sqrt{\frac{1-\tau^2}{(1+\tilde{\tau}^2)(\tau^2+\tilde{\tau}^2)}}\int_1^W \frac{\mathrm{d}W}{\sqrt{(1-W^2)(1-\kappa^2W^2)}}.$$

よって

$$\int_0^W \frac{\mathrm{d}W}{\sqrt{(1-W^2)(1-\kappa^2W^2)}}$$
$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}W}{\sqrt{(1-W^2)(1-\kappa^2W^2)}} - \frac{J}{4\tilde{\tau}}\sqrt{\frac{(1+\tilde{\tau}^2)(\tau^2+\tilde{\tau}^2)}{1-\tau^2}}\xi.$$

したがって

$$W(\xi) = \mathrm{sn}(K - L\xi, \kappa).$$

ここで

$$K = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}W}{\sqrt{(1-W^2)(1-\kappa^2W^2)}},$$
$$L = \frac{J}{4\tilde{\tau}}\sqrt{\frac{(1+\tilde{\tau}^2)(\tau^2+\tilde{\tau}^2)}{1-\tau^2}}.$$

以上より

$$U(\xi) = \frac{m+nV(\xi)}{1+V(\xi)}$$
$$= \frac{m\sqrt{1-\kappa^2W(\xi)^2}+n\kappa\tilde{\tau}W(\xi)}{\sqrt{1-\kappa^2W(\xi)^2}+\kappa\tilde{\tau}W(\xi)}$$

となる.

3 $U(\xi)$ の具体的な表現

この節では, 各領域における $U(\xi)$ の表現を述べる.

3.1 $\mathcal{O}_1$ $(i(g)=4, P<Q<S<R)$ のとき

$$U(\xi) = \frac{(S-P)R-(S-R)PW(\xi)^2}{S-P-(S-R)W(\xi)^2},$$
$$U'(\xi) = \frac{2(S-P)(S-R)(R-P)W(\xi)W'(\xi)}{(S-P-(S-R)W(\xi)^2)^2},$$

ここで,

$$W(\xi) = \mathrm{sn}(L\xi, \kappa),$$
$$W'(\xi) = -L\mathrm{cn}(L\xi,\kappa)\mathrm{dn}(L\xi,\kappa),$$
$$L = \frac{\sqrt{(S-P)(R-Q)}}{4},$$
$$\kappa = \sqrt{\frac{(R-S)(Q-P)}{(R-Q)(S-P)}}.$$

3.2 $\mathcal{O}_2$ $(i(g)=4, P<Q<R<S)$ のとき

$$U(\xi)=\frac{(S-Q)R-(S-R)QW(\xi)^2}{S-Q-(S-R)W(\xi)^2},$$
$$U'(\xi)=\frac{2(S-Q)(S-R)(R-Q)W(\xi)W'(\xi)}{(S-Q-(S-R)W(\xi)^2)^2},$$

ここで,

$$W(\xi)=\mathrm{sn}(L\xi,\kappa),$$
$$W'(\xi)=-L\mathrm{cn}(L\xi,\kappa)\mathrm{dn}(L\xi,\kappa),$$
$$L=\frac{\sqrt{(R-P)(S-Q)}}{4},$$
$$\kappa=\sqrt{\frac{(S-R)(Q-P)}{(S-Q)(R-P)}}.$$

3.3 $\mathcal{O}_3$ $(i(g)=4, P<R<Q<S)$ のとき

$$U(\xi)=\frac{(Q-P)R-(R-P)QW(\xi)^2}{Q-P-(R-P)W(\xi)^2},$$
$$U'(\xi)=\frac{2(Q-P)(R-P)(R-Q)W(\xi)W'(\xi)}{(Q-P-(R-P)W(\xi)^2)^2},$$

ここで,

$$W(\xi)=\mathrm{sn}(L\xi,\kappa),$$
$$W'(\xi)=-L\mathrm{cn}(L\xi,\kappa)\mathrm{dn}(L\xi,\kappa),$$
$$L=\frac{\sqrt{(S-R)(Q-P)}}{4},$$
$$\kappa=\sqrt{\frac{(S-Q)(R-P)}{(S-R)(Q-P)}}.$$

3.4 $\mathcal{O}_4$ $(i(g)=4, R<P<Q<S)$ のとき

$$U(\xi)=\frac{(S-P)R-(R-P)SW(\xi)^2}{S-P-(R-P)W(\xi)^2},$$
$$U'(\xi)=\frac{2(S-P)(R-P)(R-S)W(\xi)W'(\xi)}{(S-P-(R-P)W(\xi)^2)^2},$$

ここで,

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \mathrm{sn}(L\xi, \kappa), \\ W'(\xi) &= -L\mathrm{cn}(L\xi, \kappa)\mathrm{dn}(L\xi, \kappa), \\ L &= \frac{\sqrt{(S-P)(Q-R)}}{4}, \\ \kappa &= \sqrt{\frac{(S-Q)(P-R)}{(S-P)(Q-R)}}. \end{aligned}$$

3.5 $\mathcal{O}_5$ $(i(g) = 2, S < R)$ のとき

$$\begin{aligned} U(\xi) &= \frac{m\sqrt{1-\kappa^2 W(\xi)^2} + n\kappa\tilde{\tau}W(\xi)}{\sqrt{1-\kappa^2 W(\xi)^2} + \kappa\tilde{\tau}W(\xi)}, \\ U'(\xi) &= \frac{(n-m)\kappa\tilde{\tau}W'(\xi)}{(\sqrt{1-\kappa^2 W(\xi)^2} + \kappa\tilde{\tau}W(\xi))^2\sqrt{1-\kappa^2 W(\xi)^2}}, \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \mathrm{sn}(K - L\xi, \kappa), \\ W'(\xi) &= -L\mathrm{cn}(K - L\xi, \kappa)\mathrm{dn}(K - L\xi, \kappa), \\ K &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}Z}{(1-Z^2)(1-\kappa^2 Z^2)}, \\ L &= \frac{J}{4\tilde{\tau}}\sqrt{\frac{(1+\tilde{\tau}^2)(\tau^2+\tilde{\tau}^2)}{1-\tau^2}}, \\ \kappa &= \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+\tilde{\tau}^2}}, \\ \tau &= \frac{-(M^2+N^2+J^2) + \sqrt{(M^2+N^2+J^2)^2 - 4M^2N^2}}{2MN}, \\ \tilde{\tau} &= \frac{M^2-N^2+J^2 - \sqrt{(M^2-N^2+J^2)^2 + 4N^2J^2}}{2NJ}, \\ M &= R - S, \\ N &= R + S - P - \bar{P}, \\ J &= \frac{P-\bar{P}}{\mathrm{i}}, \\ m &= \frac{(1+\tau)R + (1-\tau)S}{2}, \\ n &= \frac{(1+\tau)R - (1-\tau)S}{2\tau}. \end{aligned}$$

3.6 $\mathcal{O}_6$ $(i(g) = 2, R < S)$ のとき

$$U(\xi) = \frac{m\sqrt{1-\kappa^2 W(\xi)^2} + n\kappa\tilde{\tau}W(\xi)}{\sqrt{1-\kappa^2 W(\xi)^2} + \kappa\tilde{\tau}W(\xi)},$$
$$U'(\xi) = \frac{(n-m)\kappa\tilde{\tau}W'(\xi)}{(\sqrt{1-\kappa^2 W(\xi)^2} + \kappa\tilde{\tau}W(\xi))^2\sqrt{1-\kappa^2 W(\xi)^2}},$$

ここで,

$$\begin{aligned}
W(\xi) &= -\mathrm{sn}(K + L\xi, \kappa), \\
W'(\xi) &= -L\mathrm{cn}(K + L\xi, \kappa)\mathrm{dn}(K + L\xi, \kappa), \\
K &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}Z}{(1-Z^2)(1-\kappa^2 Z^2)}, \\
L &= \frac{J}{4\tilde{\tau}}\sqrt{\frac{(1+\tilde{\tau}^2)(\tau^2+\tilde{\tau}^2)}{1-\tau^2}}, \\
\kappa &= \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+\tilde{\tau}^2}}, \\
\tau &= \frac{(M^2+N^2+J^2) - \sqrt{(M^2+N^2+J^2)^2 - 4M^2N^2}}{2MN}, \\
\tilde{\tau} &= \frac{M^2-N^2+J^2 - \sqrt{(M^2-N^2+J^2)^2 + 4N^2J^2}}{2NJ}, \\
M &= R - S, \\
N &= R + S - P - \bar{P}, \\
J &= \frac{P-\bar{P}}{\mathrm{i}}, \\
m &= \frac{(1+\tau)R + (1-\tau)S}{2}, \\
n &= \frac{(1+\tau)R - (1-\tau)S}{2\tau}.
\end{aligned}$$

References

[1] 安藤四郎, 楕円積分・楕円関数入門, 日新出版, 1970

[2] K. Imamura and K. Sakamoto, Travelling pluse waves non-vanishing at infinity for the derivative nonlinear Schrödinger equation

[3] 寺沢寛一, 自然科学者のための数学概論 (増訂版), 岩波書店, 1954

[4] 戸田盛和, 楕円関数入門, 日本評論社, 2001

[5] M. Wadati, H. Sanuki, K. Konno and Y. Ichikawa, Circular polarized nonlinear Alfvén waves — A new type of nonlinear evolution equation in plasma physics, Rocky Mountain J. Math. 8 Vol. 1 and 2, Winter and Spring (1978) 323-331.