数理解析研究所講究録
第 1617 巻 2008 年 219-228

Some p-adic properties of Siegel-Eisenstein series

近畿大学・総合理工学研究科　菊田　俊幸 (Toshiyuki Kikuta)
Graduate School of Science and Engineering　Kinki University
近畿大学・理工学部　長岡　昇勇 (Shoyu Nagaoka)
School of Science and Engineering　Kinki University

緒言

一連の論文 [8], [5], [9] において，Serre の p 進 Eisenstein 級数の概念が，多変数の modular 形式の場合にどのように一般化され、それがどのような性質をもつかを見てきた．その性質の一つに p 進 Siegel-Eisenstein 級数と genus theta 級数の対応がある ([8])．これは，ある種の p 進 Siegel-Eisenstein 級数が level p の genus theta 級数と一致するという「奇妙な」現象である．これにより，ある種の p 進 Siegel-Eisenstein 級数が「通常の」modular 形式になるということが示される．[8] で扱われた場合は，いわゆる「Neben 型」の場合で，この論説では，この現象が「Haupt 型」でも起きることを報告したい．すなわち，discriminant p^2，level p の quaternary quadratic form に対応する genus theta 級数にちょうど一致するような p 進 Eisenstein 級数が構成されること紹介する．

1 定義と記号

1.1 Siegel modular 形式　$\mathbb{H}_n$ を通常の様に，n 次 Siegel 上半空間とすると，n 次 Siegel modular 群 $\Gamma^{(n)}:=Sp_n(\mathbb{R})\cap M_{2n}(\mathbb{Z})$ は $\mathbb{H}_n$ に不連続的に作用する．$\Gamma^{(n)}$ の合同部分群 Γ' に対して，$M_k(\Gamma')$ で対応する weight が k の Siegel modular 形式のなす空間を表すことにする．以下で主に扱うのは $\Gamma'=\Gamma^{(n)}$ または $\Gamma_0^{(n)}(N)$ の場合である．ここで

$$\Gamma_0^{(n)}(N):=\left\{\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\Gamma^{(n)}\ \middle|\ C\equiv O_n\pmod N\right\}$$

である．いずれの場合も $M_k(\Gamma')$ の元 F は次の形の Fourier 展開をもつ：

$$F(Z)=\sum_{0\leq T\in\Lambda_n}a_F(T)\exp[2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(TZ)]$$

ここで Λ_n は

$$\Lambda_n=Sym_n^*(\mathbb{Z}):=\{T=(t_{ij})\in Sym_n(\mathbb{Q})\mid t_{ii},\ 2t_{ij}\in\mathbb{Z}\}$$

で定義される，いわゆる半整数行列のなす lattice である．
$Z=(z_{ij})\in\mathbb{H}_n$ に対して，$q_{ij}:=\exp(2\pi\sqrt{-1}z_{ij})$ とおくと

$$q^T:=\exp[2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(TZ)]=\prod_{1\leq i<j\leq n}q_{ij}^{2t_{ij}}\prod_{i=1}^{n}q_i^{t_i}$$

と書ける．ここで，$q_i = q_{ii}$, $t_i = t_{ii} (i = 1, \ldots, n)$ である．この記法を使えば,「一般化された q 展開」

$$F = \sum_{0 \le T \in \Lambda_n} a_F(T)\, q^T = \sum_{t_i} \left(\sum_{t_{ij}} a_F(T) \prod_{i<j} q_{ij}^{2t_{ij}} \right) \prod_{i=1}^{n} q_i^{t_i}$$
$$\in \mathbb{C}[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][\![q_1, \ldots, q_n]\!]$$

が得られる．すなわち，Siegel modular形式は，形式的べき級数環 $\mathbb{C}[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][\![q_1, \ldots, q_n]\!]$ の元とみなすことができるわけである．

$\mathbb{C}$ の部分環 R に対して，$M_k(\Gamma')_R$ を

$$M_k(\Gamma')_R := \{ F = \sum a_F(T) q^T \in M_k(\Gamma') \mid \forall a_F(T) \in R \}$$

で定義する．もちろん，これは $R[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][\![q_1, \ldots, q_n]\!]$ の R-部分加群と見做すことができる．

1.2 Siegel-Eisenstein 級数　Siegel modular 群 $\Gamma^{(n)}$ の部分群 $\Gamma_\infty^{(n)}$ を

$$\Gamma_\infty^{(n)} := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma^{(n)} \mid C = O_n \right\}$$

で定義する．$k > n+1$ となる偶数 k に対して，級数

$$E_k^{(n)}(Z) := \sum_{\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\infty^{(n)} \backslash \Gamma^{(n)}} \det(CZ + D)^{-k}, \ Z \in \mathbb{H}_n$$

を考えると，これは $M_k(\Gamma^{(n)})$ の元を定義し，$\Gamma^{(n)}$ に対する weight が k の Siegel-Eisentein 級数と呼ばれる．Siegel によって示されたように

$$E_k^{(n)}(Z) \in M_k(\Gamma^{(n)})_{\mathbb{Q}}$$

である．

1.3 genus theta 級数　$0 < S \in \Lambda_m$ に対して

$$\theta^{(n)}(S; Z) = \sum_{X \in M_{m,n}(\mathbb{Z})} \exp[2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(S[X]Z)], \ Z \in \mathbb{H}_n$$

と定義する．ここで $S[X] := {}^tXSX$ である．

$\{S_1, \ldots, S_h\}$ を S を含む genus の unimodular 同値類の完全代表系とする．S に付随する genus theta 級数とは

$$\mathrm{genus}\Theta^{(n)}(S)(Z) := \left(\sum_{i=1}^{h} \frac{\theta^{(n)}(S_i; Z)}{E(S_i)} \right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{h} \frac{1}{E(S_i)} \right)$$

で定義されるものである．ここで $E(S_i)$ は S_i の単数群の位数である．

1.4 p 進 Siegel-Eisenstein 級数

Serre [10] に倣って，Siegel modular 群に対する p 進 Eisenstein 級数を定義する．

$\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ を偶数の増大列とする．Siegel-Eisentein 級数の列

$$\{E_{k_m}^{(n)}\} \subset \mathbb{Q}[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][\![q_1, \ldots, q_n]\!]$$

が p 進的に $\mathbb{Q}_p[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][\![q_1, \ldots, q_n]\!]$ の元に収束するものとする．このとき，その極限 $\lim_{m\to\infty} E_{k_m}^{(n)}$ を Serre に倣って p 進 Siegel-Eisenstein 級数と呼ぶことにする．

2 主結果

ここでは，p を奇素数とする．$S^{(p)}$ を正定値，整係数 4 元 2 次形式で，discriminant p^2，level p なるものとする．すなわち，$S^{(p)} \in \Lambda_4 = Sym_4^*(\mathbb{Z})$ は次の条件を満たすものである：

$$\det(2S^{(p)}) = p^2, \qquad p \cdot (2S^{(p)})^{-1} \in Sym_4(\mathbb{Z}).$$

主結果は次の通りである：

定理　p を奇素数として，上記の $S^{(p)}$ を固定する．自然数列 $\{k_m\}$ を

$$k_m = k_m(p) := 2 + (p-1)p^{m-1},$$

で定義すると，Siegel-Eisenstein 級数の列 $\{E_{k_m}^{(2)}\}$ は，p 進 Siegel-Eisenstein 級数を定義する．さらに等式

$$\lim_{m\to\infty} E_{k_m}^{(2)} = \mathrm{genus}\Theta^{(2)}(S^{(p)})$$

が成立する．とくに，この p 進 Siegel-Eisenstein 級数

$$F_2(p) := \lim_{m\to\infty} E_{k_m}^{(2)}$$

は，level p，weight 2 の Haupt 型の Siegel modular 形式になっている．

我々の構成した weight が 2 の Siegel modular 形式は，興味深い性質をもつ．そのひとつが通常の Siegel-Eisenstein 級数との合同関係である．これについて簡単に説明する．Serre は [10] において，一変数の場合に次の事実を証明した：

Serre の定理.　p を奇素数とする．このとき任意の $M_2(\Gamma_0^{(1)}(p))_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ の任意の modular 形式 f に対して $M_{p+1}(\Gamma^{(1)})_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ のある modular 形式 g が存在して

$$f \equiv g \pmod{p}$$

となる．ここで $\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$.

この statement は一般の次数で成立することが予想されている：

予想　p を十分大なる素数とする．$M_2(\Gamma_0^{(n)}(p))_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ の任意の Siegel modular 形式 F に対して，$M_{p+1}(\Gamma^{(n)})_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ の Siegel modular 形式 G で，合同式

$$F \equiv G \pmod{p}$$

を満たすものが存在するであろう．

上記「予想」の F として、我々の構成した $F_2(p)$ をとってみる．このとき，次の結果が成立する：

我々の定理の系　p を奇素数として，$F_2(p)$ を上記定理で構成した Siegel modular 形式とする．すると次の合同式が成立する：

$$F_2(p) \equiv E^{(2)}_{p+1} \pmod{p}.$$

これは，我々の構成した $F_2(p)$ に対して,「予想」が成立していることを示している．

3 主結果の証明の粗筋

主結果の等式

$$F_2(p) := \lim_{m\to\infty} E^{(2)}_{k_m} = \mathrm{genus}\Theta^{(2)}(S^{(p)})$$

の証明の粗筋を述べる．目標は，$F_2(p)$ と $\mathrm{genus}\Theta^{(2)}(S^{(p)})$ の q-展開の係数を比較し，その一致を示すことにある．これを詳しく述べる．

$$E^{(2)}_{k_m} = \sum_{0\le T\in\Lambda_2} a_{k_m}(T)q^T$$

を $F_2(p)$ を定義する Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 展開とする．まず，有理数列 $\{a_{k_m}(T)\}$ が任意の $T\in\Lambda_2$ について, p 進的に $\mathbb{Q}$ の元に収束すること、すなわち

$$\exists \lim_{m\to\infty} a_{k_m}(T) =: \widetilde{a}(T) \in \mathbb{Q}$$

を示す．これは，2 次の Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数の明示公式が得られているので，実行可能である．一方，genus theta 級数 $\mathrm{genus}\Theta^{(2)}(S^{(p)})$ の Fourier 展開

$$\mathrm{genus}\Theta(S^{(p)}) = \mathrm{genus}\Theta^{(2)}(S^{(p)}) = \sum_{0\le T\in\Lambda_2} b(T)q^T$$

であるが，よく知られているように「Siegel 公式」により，Fourier 係数 $b(T)$ の計算は，局所密度の計算に帰着する．その局所密度の具体的計算は，Yang [12] の明示公式を用いることにより実行される．以上を総合して，最終的に

$$\widetilde{a}(T) = b(T)$$

を示すことが目標となる．

3.1 $\widetilde{a}(T)$ の明示公式

2 次の Siegel-Eisenstein 級数 $E^{(2)}_{k_m}$ の Fourier 係数 $a_{k_m}(T)$ は，既知の公式により次のように計算される．

(i) $T\in\Lambda_2$ の rank が 2 のとき：

$$a_{k_m}(T) = \frac{-4k_m\cdot B_{k_m-1,\chi_{D(T)}}}{B_{k_m}\cdot B_{2k_m-2}}\cdot F_{k_m}(T),$$

$$F_{k_m}(T) = \sum_{0<d\mid\varepsilon(T)} d^{k_m-1} \sum_{0<f\mid\frac{f(T)}{d}} \mu(f)\cdot\chi_{D(T)}(f)\cdot f^{k_m-2}\cdot\sigma_{2k_m-3}\left(\frac{f(T)}{fd}\right)$$

で与えられる．

記号の説明： B_k は k 番目の Bernoulli 数，同じく $B_{k,\chi}$ は指標 χ の k 番目の一般 Bernoulli 数，μ は Möbius 関数である．また $0 < T \in \Lambda_2$ に対して，

$$-\det(2T) = D(T) \cdot f(T)^2$$

と表す．ここで $D(T)$ は虚 2 次体

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{-\det(2T)}\right)$$

の判別式で $f(T)$ は自然数にとっておく．さらに $\chi_{D(T)}$ をこの体の Kronecker 指標とする．また $O_2 \neq T \in \Lambda_2$ に対して

$$\varepsilon(T) := \max\{l \in \mathbb{N} \mid l^{-1}T \in \Lambda_2\}$$

とおく．また，通常の様に $\sigma_k(n) := \sum_{0<d|n} d^k$ と定義しておく．
(ii) $T \in \Lambda_2$ の rank が 1 のとき： このとき Fourier 係数 $a_{k_m}(T)$ は

$$a_{k_m}(T) = \frac{-2k_m}{B_{k_m}} \sigma_{k_m-1}(\varepsilon(T))$$

で与えられる．
(iii) $a_{k_m}(O_2) = 1$.

以上が T の rank 分けに応じた $a_{k_m}(T)$ の明示公式である．2 次の Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数の明示公式は様々な形で表現されているが (eg. cf. [3], [6])，上記のものは，Eichler-Zagier [1] によるものである．次に，上記の式の p 進極限を考える．この「p 進極限をとる」計算でポイントとなるのが，Bernoulli 数，一般 Bernoulli 数に関する Kummer 合同式である．ここで用いる公式は Fresnel[2] によるものである．これらを総合して次の結果を得る．

命題 1 T を Λ_2 の半正定値な元とする．
(1) $\mathrm{rank}(T) = 2$ のとき

$$\widetilde{a}(T) = \frac{-288}{(1-p)^2}(1 - \chi_{D(T)}(p)) B_{1,\chi_{D(T)}} \cdot \widetilde{F}(T),$$

$$\widetilde{F}(T) = \sum_{\substack{0<d|\varepsilon(T) \\ (d,p)=1}} d \sum_{\substack{0<f|\frac{f(T)}{d} \\ (f,p)=1}} \mu(f) \cdot \chi_{D(T)}(f) \cdot \sigma_1^*\left(\frac{f(T)}{fd}\right).$$

2) $\mathrm{rank}(T) = 1$ のとき

$$\widetilde{a}(T) = \frac{24}{p-1}\sigma_1^*(\varepsilon(T)) = \frac{24}{p-1} \sum_{\substack{0<d|\varepsilon(T) \\ (d,p)=1}} d.$$

(3) $\widetilde{a}(O_2) = 1$.

3.2 $b(T)$ の明示公式

前述のように $b(T)$ は局所密度によって表示される．具体的には次の様である：

$$b(T)=\prod_{q\le\infty}\alpha_q(S^{(p)},T)=\prod_{q:\mathrm{prime}}\alpha_q(S^{(p)},T)\cdot\alpha_\infty(S^{(p)},T).$$

ここで，$\alpha_q(S^{(p)},T)$ が局所密度と呼ばれるもので，求めるべき $b(T)$ は，これらの無限積と $\alpha_\infty(S^{(p)},T)$ の積で表せる．これが Siegel 公式の主張するところである．ここで，これらの定義を与えておく．一般に $S\in\Lambda_m$ と $T\in\Lambda_n$ に対して，有限素点に対応する $\alpha_q(S,T)$ (q: 素数) は

$$\alpha_q(S,T)=\lim_{a\to\infty}q^{a(n(n+1)/2-mn)}A_{q^a}(S,T),$$
$$A_{q^a}(S,T)=\sharp\{X\in M_{m,n}(\mathbb{Z}/q^a\mathbb{Z})\mid S[X]\equiv T\pmod{q^a\Lambda_n}\}$$

で定義されるものである．また無限素点に対応する $\alpha_\infty(S,T)$ は

$$\alpha_\infty(S,T)=\det(S)^{-\frac{n}{2}}\det(T)^{\frac{m-n-1}{2}}\cdot\gamma_{mn},$$
$$\gamma_{mn}=\frac{\pi^{\frac{mn}{2}}}{2^{n(n-1)/2}\Gamma_n(\frac{m}{2})},\quad \Gamma_n(s)=\pi^{\frac{n(n-1)}{4}}\Gamma(s)\Gamma(s-(1/2))\cdots\Gamma(s-((n-1)/2))$$

によって定義される．これらの定義は Siegel([11], §10, Beispiele), に見られるが，無限素点に対応する式に現れる γ_{mn} は Siegel によるものと若干異なる．その差異は，$Sym_n(\mathbb{Z})$ の代わりに $Sym_n^*(\mathbb{Z})$ をとっていることに起因している．

以上により，各局所密度が具体的に計算できれば良いわけであるが，一般に局所密度を計算することは難しい場合が多い．ここでは，表現される T の rank が高々2 であるので，前に述べたように，Yang[12] による公式が使える．素点 q が p（我々が p 進極限を考えているその p）と異なる場合は，Kaufhold[3] による古典的な結果であることに注意しておく．結果は次の通りである．

補題 1 T を Λ_2 の半正定値な元とする．

(1) $\mathrm{rank}(T)=2$ のとき

$$\alpha_q(S^{(p)},T)=\begin{cases}\dfrac{(1-q^{-2})^2}{1-\chi_{D(T)}(q)q^{-1}}\displaystyle\sum_{l=0}^{\varepsilon_q}\left(\sum_{m=0}^{f_q-l}q^{-m}-\chi_{D(T)}(q)q^{-1}\sum_{m=0}^{f_q-l-1}q^{-m}\right) & \text{if}\quad q\ne p,\\ \dfrac{1-\chi_{D(T)}(p)}{1-\chi_{D(T)}(p)p^{-1}}\cdot\dfrac{(p+1)^2}{p^{f_p+2}} & \text{if}\quad q=p,\\ 2^3\cdot\pi^3\cdot p^{-2}\cdot|D(T)|^{1/2}\cdot f(T) & \text{if}\quad q=\infty,\end{cases}$$

ここで $\varepsilon_q:=\mathrm{ord}_q(\varepsilon(T))$, $f_q:=\mathrm{ord}_q(f(T))$.

(2) $\mathrm{rank}(T)=1$ のとき

$$\alpha_q(S^{(p)},T)=\begin{cases}(1-q^{-2})\displaystyle\sum_{l=0}^{\varepsilon_q}q^{-l} & \text{if}\quad q\ne p,\\ \dfrac{1+p}{p^{1+\varepsilon_p}} & \text{if}\quad q=p,\\ 2^2p^{-1}\cdot\varepsilon(T)\,\pi^2 & \text{if}\quad q=\infty.\end{cases}$$

以上が局所密度と $\alpha_\infty(S^{(p)}, T)$ の具体的な式である．
　これらの積をとることにより，目標の $b(T)$ の明示公式が得られる．

命題 2　T を Λ_2 の半正定値な元とする．
(1) $\mathrm{rank}(T)=2$ のとき

$$b(T)=\frac{-288}{(p-1)^2}(1-\chi_{D(T)}(p))\,B_{1,\chi_{D(T)}}\cdot f_*(T)\prod_{\substack{q:\ \mathrm{prime}\\ q\neq p}} G_q(T),$$

$$G_q(T)=\sum_{l=0}^{\varepsilon_q}\left(\sum_{m=0}^{f_q-l} q^{-m}-\chi_{D(T)}(q)q^{-1}\sum_{m=0}^{f_q-l-1} q^{-m}\right),$$

ここで $f_*(T):=f(T)/p^{f_p}$.
(2) $\mathrm{rank}(T)=1$ のとき

$$b(T)=\frac{24}{p-1}\sigma_1^*(\varepsilon(T)).$$

(3) $b(O_2)=1$.

3.3 $\widetilde{a}(T)$ と $b(T)$ の一致

命題 1 と命題 2 を比較すると，$\mathrm{rank}(T)\leq 1$ なる T については，目標の等式 $\widetilde{a}(T)=b(T)$ が成立することは明らかである．$\mathrm{rank}(T)=2$ については，次の補題の成立により，$\widetilde{a}(T)=b(T)$ が示される．

補題 2　$\widetilde{F}(T)$ と $G_q(T)$ をそれぞれ命題 1, (1) と命題 2, (1) で与えられたものとする．すなわち

$$\widetilde{F}(T)=\sum_{\substack{0<d|\varepsilon(T)\\ (d,p)=1}} d \sum_{\substack{0<f|\frac{f(T)}{d}\\ (f,p)=1}} \mu(f)\cdot\chi_{D(T)}(f)\cdot\sigma_1^*\left(\frac{f(T)}{fd}\right),$$

$$G_q(T)=\sum_{l=0}^{\varepsilon_q}\left(\sum_{m=0}^{f_q-l} q^{-m}-\chi_{D(T)}(q)q^{-1}\sum_{m=0}^{f_q-l-1} q^{-m}\right)$$

とすると，等式

$$\widetilde{F}(T)=f_*(T)\prod_{q\neq p} G_q(T)$$

が成立する．

この等式は，両辺の local factor が一致することを確かめることにより証明される．

以上により，半正定値な任意の $T\in\Lambda_2$ について

$$\widetilde{a}(T)=b(T)$$

が示されたことになり，主結果の証明が完結する．

4 注意

我々の主結果に関連して，いくつかの注意を与える．

一般化その 1　我々は

$$\lim_{m\to\infty} E^{(2)}_{k_m} = \mathrm{genus}\Theta^{(2)}(S^{(p)}).$$

を示したが，もちろん一般的な等式

$$\lim_{m\to\infty} E^{(n)}_{k_m} = \mathrm{genus}\Theta^{(n)}(S^{(p)}).$$

の成立が期待される．実際，$n=3$ の場合，成立を裏付ける数値例が得られている．なお，この一般等式を示すには，$n \le 4$ の場合に証明すれば十分である（特異 modular 形式の理論）.

一般化その 2　この論説では，p 進極限をとる際の，数列 $\{k_m\}$ を

$$k_m = 2 + (p-1)p^{m-1}$$

として定義したが，これを

$$k_m = k + (p-1)p^{m-1}, \qquad k: \ \text{even} \ge 2$$

と定義しなおし，

$$F^{(2)}_k(p) := \lim_{m\to\infty} E^{(2)}_{k+(p-1)p^{m-1}}$$

を考えると，この $F^{(2)}_k(p)$ が modular 形式なること，すなわち $F^{(2)}_k(p) \in M_k(\Gamma^{(2)}_0(p))$ が示されている (cf. Mizuno[7]).

Neben 型の場合との比較　2 節において，Serre の定理の拡張である「予想」を述べ，我々の構成した modular 形式については予想が成立することを見たが，この予想の成立を支持するもう一つの例を紹介する．論文 [8] において，$p>3, p \equiv 3 \pmod 4$ なる素数 p に対して

$$F_1(p) := \lim_{m\to\infty} E^{(n)}_{1+\frac{p-1}{2}\cdot p^{m-1}}$$

の形の p 進 Siegel-Eisenstein 級数を構成し，これが，weight 1，level p，$\chi_p = (\frac{*}{p})$ を指標にもつ Neben 型の modular 形式となることを見た．χ_p は 2 次指標だから，この平方 $F_1(p))^2$ をとると，これは weight が 2，level p の modular 形式となる．すなわち $(F_1(p))^2 \in M_2(\Gamma^{(n)}_0(p))$ となるが，さらに合同式

$$(F_1(p))^2 \equiv \left(E^{(n)}_{\frac{p+1}{2}}\right)^2 \pmod p$$

を示すことができる．これは「予想」の成立を支持する，もう一つの例を与えている．

weight 2 の modular 形式　Hecke は $\Gamma_0(p)$ 上の weight 2 の Eisenstein 級数の一つとして

$$G_2(p) = \frac{p-1}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^*_1(n)q^n$$

を挙げている（全集 817 頁，Satz 11）．もちろん，$G_2(p) \in M_2(\Gamma_0^{(1)}(p))$ である．これを正規化して，

$$E_2(p) := \frac{24}{p-1} \cdot G_2(p) = 1 + \frac{24}{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1^*(n) q^n$$

とする．我々の構成した $F_2(p) \in M_2(\Gamma_0^{(2)}(p))$ の Fourier 展開を命題 1, 2 に従って書き表すと

$$F_2(p) = 1 + \frac{24}{p-1} \sum_{T:\,\mathrm{rank}(T)=1} \sigma_1^*(\varepsilon(T)) q^T + \frac{288}{(p-1)^2} \sum_{T:\,\mathrm{rank}(T)=2} A(T) q^T$$

$$A(T) = -(1 - \chi_{D(T)}(p)) B_{1,\chi_{D(T)}} \cdot \widetilde{F}(T)$$

と書ける．ここで $\widetilde{F}(T)$ は命題 1 で与えられたものである．上記一変数の場合と比較して，我々の構成した $F_2(p)$ は，Hecke の Eisenstein 級数 $E_2(p)$ の多変数版を与えているとみることができる．

References

[1] M. Eichler and D. Zagier, *The theory of Jacobi forms,* Progress in Math. **55**, Birkhäuser, 1985.

[2] J. Fresnel, *Nombres de Bernoulli et fonction L p-adiques,* Ann. Inst. Fourier **17**(1967), 281-333.

[3] G. Kaufhold, *Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulfunktionen 2. Grades,* Math. Ann. **137**(1959), 454-476.

[4] H. Katsurada, *An explicit formula for Siegel series,* Amer. J. Math. **121**(1999), 415-452.

[5] H. Katsurada and S. Nagaoka, *On some p-adic properties of Siegel-Eisenstein series,* J. Number Theory **104**(2004), 100-117.

[6] H. Maass, *Die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades,* Mat. Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **38**, Nr. 14(1972).

[7] Y. Mizuno, *p-adic Siegel-Eisenstein series (Haupttypus case),* preprint 2007.

[8] S. Nagaoka, *On Serre's example of p-adic Eisenstein series,* Math. Z. **235**(2000), 227-250.

[9] S. Nagaoka, *On p-adic Hermitian Eisenstein series,* Proc. Amer. Math. Soc. **134**(2006), 2533-2540.

[10] J.-P. Serre, *Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques,* Modular functions of one variable III, Lec. Notes in Math. **350**, Springer Verlag, 1973.

[11] C.L. Siegel, *Über die analytische Theorie der quadratischen Formen,* Ann. Math. **36**(1935), 527-606.

[12] T. Yang, *An explicit formula for local densities of quadratic forms,* J. Number Theory **72**(1998), 309-359.