数理解析研究所講究録
第 1625 巻 2009 年 269-295



# 朶積術

竹之内 脩

## 1 朶積術

朶積術とは、自然数の累乗和

$$s_p(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$$

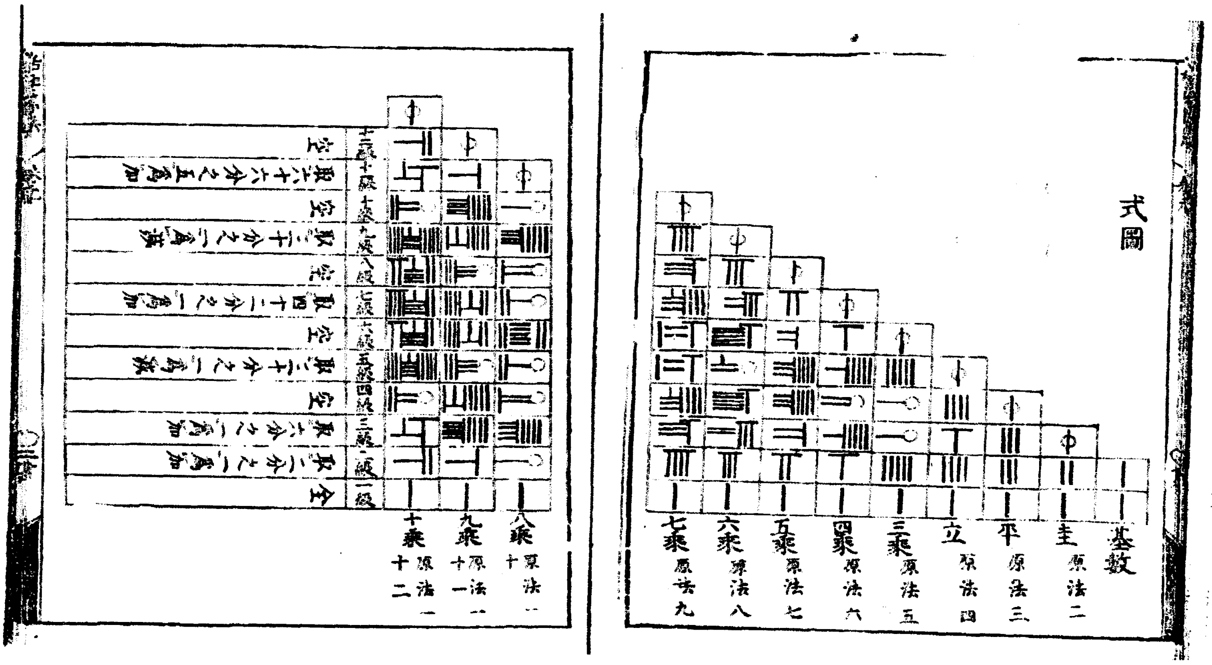
を与える多項式を求める方法である。

この多項式は、現在の数学では、次のベルヌイの多項式として知られている。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p+1}n^{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \frac{p}{2}An^{p-1} - \frac{p(p-1)(p-2)}{2\cdot3\cdot4}Bn^{p-3} \\
&\quad + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}Cn^{p-5} \\
&\quad - \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)(p-6)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}Dn^{p-7} \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}$$

ここで、$A, B, C, D, \cdots$ は、次のような数である。

$$A = \frac{1}{6},\ B = -\frac{1}{30},\ C = \frac{1}{42},\ D = -\frac{1}{30}$$




関の式図

ベルヌイの多項式は、 Jakob Bernoulli (1654〜1705) の死後、甥の手により出版された「Ars Conjectandi」(1715) において与えられたものである。

一方、關孝和 (1640?〜1708) は、その死後、弟子の手によって出版された「括要算法」(1711) において、この和を前のページの式図の形で示している。
この表の左には、ベルヌイと同じく、

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{6},\quad 0,\quad \frac{1}{30},\quad 0,\quad \frac{1}{42},\quad 0,\quad -\frac{1}{30},\quad 0,\quad \frac{1}{66},\quad 0$$

の値があげられている。関は、これらの数を一級取数、二級取数、$\cdots$ と呼んでいる。
関もベルヌイも、これらの数をどのようにして次々作っていったらよいか、という方式を、同じ形で与えている。
すなわち関の場合には、例えば、一級取数、二級取数、$\cdots$、六級取数 を定めたあと、七級取数 は、

$$\left(7-\left(1+\frac{1}{2}\cdot 7+\frac{1}{6}\cdot 21-\frac{1}{30}\cdot 35\right)\right)\div 7=\frac{1}{42}$$

として求める、としている。
一方 Bernoulli は、例えば $D$ は、

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{7}{15}+\frac{2}{9}\left(+D\right)=1$$

から、

$$D=-\frac{1}{30}$$

としている。
これらの数は、従来、ベルヌイ数と呼ばれているが、関-ベルヌイ数と呼ぶのが至当であろう。

本稿では、$s_p(n)$ を求める手段について、歴史的な考察をしたい。
その前に、次の節において、この多項式についての一般的な考察をしておく。

## 2　自然数の累乗和を与える多項式

$s_p(n)$ を与える多項式を $s_p(x)$ とする。
$s_p(x)$ は

$1^\circ \quad s_p(1)=1$

$2^\circ \quad s_p(x)=s_p(x-1)+x^p$

で定められる多項式である。

$s_p(x)$ が多項式で与えられることは、下の (3) の結果として知られることで、はじめは、単なる関数としておく。そのような関数はいくらでも作れる。多項式ならば、1°, 2° から、$x$ の自然数に対する値はすべて知られるから、一意的に定まる。

(1) $s_p(0)=0,\quad s_p(-1)=0$

2° があれば、このいずれかの式を、1°の代わりに用いることができる。

(2) $s_{p-1}(x)=\dfrac{1}{p}\left(s_p'(x)-s_p'(0)\right)$

(3) $$\begin{cases} s_0(x)=x \\ s_p(x)=p\displaystyle\int_0^x s_{p-1}(t)\,dt+b_p\,x \qquad \text{ただし、} b_p=p\displaystyle\int_{-1}^0 s_{p-1}(t)\,dt \end{cases}$$

(2) から、$p\displaystyle\int_0^x s_{p-1}(t)dt=s_p(x)-s_p(0)-s_p'(0)\,x=s_p(x)-s_p'(0)\,x$

ここて $x=-1$ とすると、 $p\displaystyle\int_0^{-1} s_{p-1}(t)dt=s_p'(0)$

左辺の符号を変えたものを $b_p$ とすれば、上の式になる。

これによって、順次 $s_1(x),\, s_2(x),\, s_3(x),\,\cdots$ を作っていけば、$s_p(x)$ がすべて多項式となることが知られる。

(4) $2\not|\,p$ のとき、$s_p(-x-1)=s_p(-x)$

$2\,|\,p$ のとき、$s_p(-x-1)=-s_p(-x)$

2° において、$x$ に $-x$ を代入すれば、

$$s_p(-x)=s_p(-x-1)+(-x)^p=s_p(-x-1)+(-1)^px^p$$

いま $f(x)=s_p(-x-1)$ とすると、

$$f(0)=s_p(-1)=0$$
$$f(x)-f(x-1)=s_p(-x-1)-s_p(-x)=-(-1)^px^p$$

$p$ が奇数のときは、$f(x)$ は、1°, 2° を満たす多項式となるから、$f(x)=s_p(x)$

$p$ が偶数のときは、$-f(x)$ が 1°, 2° を満たす多項式となり、$-f(x)=s_p(x)$

(5) $2\not|\,p\ (p\geqq 3)$ のとき、$s_p(x)$ は $x+\dfrac{1}{2}$ の偶数次の項のみよりなる多項式

$2\,|\,p$ のとき、 $s_p(x)$ は $x+\dfrac{1}{2}$ の奇数次の項のみよりなる多項式

これによって、$s_p(x)$ のグラフは、

$p$ が奇数のときは、直線 $x=-\dfrac{1}{2}$ に関して対称

$p$ が偶数のときは、点 $(-\dfrac{1}{2},0)$ に関して対称

いま、$u=x+\dfrac{1}{2}$ として、$s_p(x)$ を $u$ の多項式と見るとき、

$p$ が奇数のときは、$s_p(x)=s_p(-x-1)$ に $x=u-\dfrac{1}{2}$ を代入すれば、

$$s_p(u-\frac{1}{2})=s_p(-(u-\frac{1}{2}-1)=s_p(-u-\frac{1}{2})$$

となり、これは、$s_p(x)$ が $u$ の関数と見れば偶関数であることを示している。したがって、$s_p(x)$ は、$u = x + \frac{1}{2}$ の多項式としては、$u$ の偶数乗の項ばかりから成る。

$p$ が偶数のときは、$s_p(x) = -s_p(-x-1)$ に $x = u - \frac{1}{2}$ を代入すれば、

$$s_p(u - \frac{1}{2}) = -s_p(-u - \frac{1}{2})$$

となり、$s_p(x)$ は、$u = x + \frac{1}{2}$ の多項式としては、$u$ の奇数乗の項ばかりから成る。

(6) $2 \nmid p\ (p \geqq 3)$ のとき、$s_p(x)$ は $(x(x+1))^2 \times (x(x+1)$ の多項式)

$2 | p$ のとき、 $s_p(x)$ は $x(x+1)(2x+1) \times (x(x+1)$ の多項式)

$p$ が奇数のとき $s_p(x) = s_p(x-1) + x^p$ を変形して、(4) を用いると、

$$s_p(x) - \frac{1}{2} = s_p(x-1) + \frac{1}{2}x^p = x_p(s-1) + \frac{1}{2}x^p$$

これは、この式の左辺の多項式の関数が偶関数であることを示している。この式の値は、$x = 0$ のとき 0 だから、この多項式は $x^2$ で割り切れる。(4) から、$s_p(x)$ はまた $(x+1)^2$ で割り切れる。したがって $s_p(x)$ は、$(x(x+1))^2$ で割り切れる。

$p$ が偶数のとき $s_p(x)$ は、(1) により、$x(x+1)$ で割り切れる。また、(5) により $x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x+1)$ で割り切れる。

どちらの場合も、割った商の多項式は、$x + \frac{1}{2}$ の偶数次の項のみよりなる多項式であるから、$(x+\frac{1}{2})^2 = x(x+1) + \frac{1}{4}$ により、$x(x+1)$ の多項式である。

(7) $2 \nmid p\ (p \geqq 3)$ のとき、$b_p = 0$

$2 | p$ のとき、

$$b_2 < 0, \quad b_4 > 0, \quad b_6 < 0, \quad \cdots$$

$$B_p = (-1)^p b_{2p} = (-1)^{p-1} s_{2p}{}'(0) \qquad (p = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とすれば、この $B_p$ がベルヌイ数である。

$p$ が奇数 (($p \geqq 3$) のとき、(6) により、$s_p(x)$ は定数項をもたないから、$b_p = 0$ である。

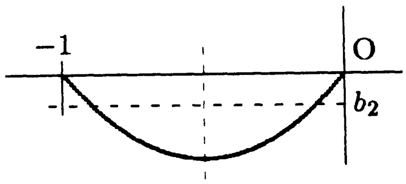
$b_p = p\displaystyle\int_{-1}^{0} s_{p-1}(t)\,dt$ であるから、$b_p$ の値は、$s_p(x)$ の、$-1 \leqq x \leqq 0$ における状況に依存する。

以下に、各 $s_p(x)$ について増減表を示し、またグラフの概形を示す。

スケールは各グラフによって異なる。形だけが問題である。

$$s_1(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$$

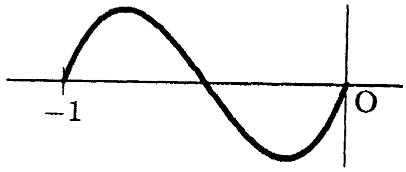
| $x$ | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_1(x)$ | $0$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $0$ |




$b_2 = \displaystyle\int_{-1}^{0} s_1\,dx$ で、これをグラフの中に、横線で示した。次の $s_2'(x)$ では、この横線より上の部分は +、下の部分は − になる。グラフは直線 $x = -\frac{1}{2}$ に関して対称である。

$s_2(x)$　$s_2'(x) = 2\,s_1(x) + s_2'(0)$, $s_2'(0) = -b_2$
であるから、

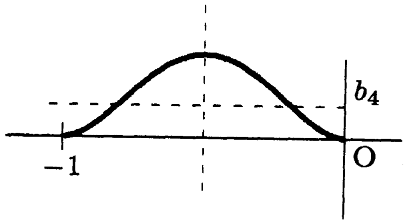
| $x$ | $-1$ | | | $-\frac{1}{2}$ | | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_2'(x)$ | | $+$ | $-$ | | $-$ | $+$ | |
| $s_2(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $0$ |




グラフは、点 $(-\frac{1}{2}, 0)$ に関して対称。したがって
$b_3 = 0$ である。

$s_3(x)$　$s_3'(x) = 3\,s_2(x)$ であるから、

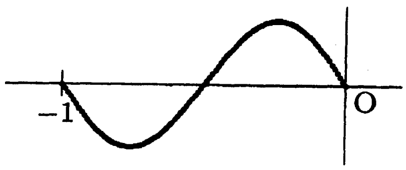
| $x$ | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_3'(x)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $s_3(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $0$ |




グラフは直線 $x = -\frac{1}{2}$ に関して対称である。

$s_4(x)$　$s_4'(x) = 4\,s_3(x) + s_4'(0)$ であるから、

| $x$ | $-1$ | | | $-\frac{1}{2}$ | | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_2'(x)$ | | $-$ | $+$ | | $+$ | $-$ | |
| $s_2(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $0$ |




グラフは、点 $(-\frac{1}{2}, 0)$ に関して対称である。

以後、この $s_1(x)$ から $s_4(x)$ のハターンが、周期 4 で 繰りかえされていく。
以上によって、次のことが確かめられる。

$2 \nmid p\ (p \geqq 3)$　のとき、$b_p = 0$

$2 \mid p$　のとき、

$$b_2 < 0, \quad b_4 > 0, \quad b_6 < 0, \quad \cdots$$

◆ ベルヌイ数について

ベルヌイ数は不規則な数であり、これを簡単に書く方法はない。次のページに最初　30 個の表をあげる。

次のことが知られている。

ベルヌイ数の分母

ベルヌイ数 $B_p$ の分母は、$q-1$ が $2p$ の約数であるような素数 $q$ の積である。(フォン・スタウトークラウゼンの定理)

ベルヌイ数

| $p$ | 分　子 | 分　母 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 6 |
| 2 | 1 | 30 |
| 3 | 1 | 42 |
| 4 | 1 | 30 |
| 5 | 5 | 66 |
| 6 | 691 | 2730 |
| 7 | 7 | 6 |
| 8 | 3617 | 510 |
| 9 | 43967 | 788 |
| 10 | 1 74611 | 330 |
| 11 | 8 54513 | 138 |
| 12 | 2363 64091 | 2730 |
| 13 | 85 53103 | 6 |
| 14 | 2 37494 61029 | 870 |
| 15 | 861 58412 76005 | 14322 |
| 16 | 770 93210 41217 | 510 |
| 17 | 257 76878 58367 | 6 |
| 18 | 26315 27155 30534 77373 | 19 19190 |
| 19 | 2 92999 39138 41559 | 6 |
| 20 | 2 61082 71849 64491 22051 | 13530 |
| 21 | 15 20097 64391 80708 02691 | 1806 |
| 22 | 278 33269 57930 10242 35023 | 690 |
| 23 | 5964 51111 59391 21632 77961 | 282 |
| 24 | 560 94033 68997 81768 62491 27547 | 46410 |
| 25 | 49 50572 05241 07964 82124 77525 | 66 |
| 26 | 80116 57181 35489 95734 79249 91853 | 1590 |
| 27 | 29 14996 36348 84862 42141 81238 12691 | 798 |
| 28 | 2479 39292 93132 26753 68541 57396 63229 | 870 |
| 29 | 84483 61334 88800 41862 04677 59940 36021 | 354 |
| 30 | 121 52331 40483 75557 20403 04994 07982 02460 41491 | 567 86730 |

ベルヌイ数の分子

ベルヌイ数の分子はどのような数であるのかを一般的に述べる定理は知られていない。

フェルマの問題と関連して述べられた次の定理は著名である。

クンマーの定理　素数 $q$ が、$B_1$, $B_2, \cdots$, $B_{\frac{q-3}{2}}$ のうちのどの数の分子の約数にもなっていないとき、このような素数 $q$ を正則な素数とよぶ。　正則な素数に対しては、フェルマの定理は正しい。100 までの 2 以外の 24 個の素数のうち、正則でないものは、37, 59, 67 の 3 個である。

## 3　諸研究

● 朱世傑 (ca.1300) は、

$$3^3+4^3+5^3+\cdot(n\text{ 項})=27{}_n\mathrm{C}_1+37{}_n\mathrm{C}_2+24{}_n\mathrm{C}_3+6{}_n\mathrm{C}_4$$

を与えている。

この係数は、次のように、次々階差をとることによって得られたものと考えられている。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 27 | | | |
| 64 | 37 | | |
| 125 | 61 | 27 | |
| 216 | 91 | 30 | 6 |
| 343 | 127 | 36 | 6 |
| 512 | 169 | 42 | 6 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

● Johannes Faulhber (1580〜1635)

$$s_1(n)=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$s_2(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$s_3(n)=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2=(s_1(n))^2$$

であるが、Faulhaber は、さらに $s_4(n),\cdots$ について調べた。

$$s_4(n)=s_2(n)\left(\frac{6}{5}s_1(n)-\frac{1}{5}\right)$$

$$s_5(n)=s_3(n)\left(\frac{4}{3}s_1(n)-\frac{1}{3}\right)$$

$$s_6(n)=s_2(n)\left(\frac{12}{7}s_1(n)^2-\frac{6}{7}s_1(n)-\frac{1}{7}\right)$$

そしてさらに $s_{17}$ まで求め、

$2 \nmid p$ のとき、$s_p(n)$ は、$s_1(n)$ の多項式である。

$2 \mid p$ のとき、$s_p(n)$ は、$s_2(n)$ に $s_1(n)$ の多項式を乗じたものである。

を予測し、$p = 17$ まで、このことを確かめている。
(文献　Ivo Schneider:Johannes Faulhaber (1580〜1635) Reichenmeister in einer Welt des Umbruchs)

このことは、前節 (5) から、確かめられる。

● 關孝和、Jakob Bernoulli、松永良弼、有馬頼　徸 の研究については、後述。

● Leonhard Euler (1707〜1783)

Euler は、

$$B_1x^2+\frac{2^2}{5!}10\cdot B_2x^4+\frac{2^4}{7!}14\cdot B_3x^6+\frac{2^6}{9!}18\cdot B_4x^8+\frac{2^8}{11!}22\cdot B_5x^{10}+\frac{2^{10}}{13!}26\cdot B_6x^{12}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\cot x$$

を示した。
(De Summis Serierum Numeros Bernoullianos Involventium (1769))

● C.G.J.Jacobi (1804〜1851)

Jacobi は、マクローリン展開の一般論から、次の結論を示した。
(De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae, J.Reine Angew.Math., 1834)

$$\begin{aligned}
s_3(x) &= s_1(x)^2\\
s_5(x) &= \frac{3}{4}s_1(x)^2\left(s_1(x)-\frac{1}{4}\right)\\
s_7(x) &= 2\,s_1(x)^2\left(s_1(x)^2-\frac{2}{3}s_1(x)+\frac{1}{6}\right)\\
s_9(x) &= \frac{16}{15}s_1(x)^2\left(s_1(x)^3-\frac{5}{4}s_1(x)^2+\frac{3}{4}s_1(x)-\frac{3}{16}\right)\\
s_{11}(x) &= \frac{16}{3}s_1(x)^2\left(s_1(x)^4-2s_1(x)^3+\frac{17}{8}s_1(x)^2-\frac{5}{4}s_1(x)+\frac{5}{16}\right)\\
s_{13}(x) &= \frac{64}{7}s_1(x)^2\left(s_1(x)^5-\frac{35}{12}s_1(x)^4+\frac{287}{60}s_1(x)^3-\frac{59}{12}s_1(x)^2+\frac{691}{240}s_1(x)-\frac{691}{960}\right)\\
\cdots &= \cdots
\end{aligned}$$

そして、

$$s_{2p}(x) = \frac{1}{2p+1}\frac{d}{dx}s_{2p+1}(x)$$

● Augustin Louis Cauchy (1789〜1857)

Cauchy は、次のことを示した。(Résumés Analytiques (1833))

ここで、$B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, $\cdots$ は、ベルヌイ数である。(後述)

$$\frac{x}{1-e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2} + B_1\frac{2^2x^2}{1\cdot 2} - B_2\frac{2^4x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + B_3\frac{2^6x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \cdots$$

$$\frac{e^{nx}-1}{1-e-x} = n + xs_1(n) + \frac{x^2}{1\cdot 2}s_2(n) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}s_3(n) + \cdots + \frac{x^m}{1\cdot 2\cdots m}s_m(n) + \cdots$$

これから一般に、

$$\begin{aligned} s_m(n) &= \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + B_1\frac{m}{2}n^{m-1} - B_2\frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3\cdot 4}n^{m-3} \\ &\quad + B_3\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}n^{m-5} - \cdots \end{aligned}$$

● A.W.F.Edwards

Edwards は、Faulhaber や、Jacobe と逆の方向で、次のことを示している。
(A Quick Route to Sums of Powers, Amer.Math.Monthly, 1986)

$$(x(x+1))^p - (x(x-1))^p = 2\left[{}_pC_1\cdot x^{2p-1} + {}_pC_3\cdot x^{2p-3} + {}_pC_5\cdot x^{2p-5} + \cdots\right]$$

から、

$$(n(n+1))^p = 2\left[{}_pC_1\cdot s_{2p-1}(n) + {}_pC_3\cdot s_{2p-3}(n) + {}_pC_5\cdot s_{2p-5}(n) + \cdots\right]$$

これを用いると、奇数乗の和に対して、$n(n+1) = 2\,s_1(n)$ であることから、

$$\begin{pmatrix} 2^2\cdot s_1(n)^2 \\ 2^3\cdot s_1(n)^3 \\ 2^4\cdot s_1(n)^4 \\ 2^5\cdot s_1(n)^5 \\ \vdots \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ 1 & 3 & & & \\ 0 & 4 & 4 & & \\ 0 & 1 & 10 & 5 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_3(n) \\ s_5(n) \\ s_7(n) \\ s_9(n) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

また、

$$\begin{aligned} &(x+1)^{p+1}x^p - x^{p+1}(x-1)^p \\ &= x^{2p+1} + {}_{p+1}C_1\cdot x^{2p} + {}_{p+1}C_2\cdot x^{2p-1} + {}_{p+1}C_3\cdot x^{2p-2} + {}_{p+1}C_4\cdot x^{2p-3} + \cdots \\ &\qquad - x^{2p+1} + {}_pC_1\cdot x^{2p} - {}_pC_2\cdot x^{2p-1} + {}_pC_3\cdot x^{2p-2} - {}_pC_4\cdot x^{2p-3} + \cdots \\ &= ({}_{p+1}C_1 + {}_pC_1)x^{2p} + {}_pC_1\cdot x^{2p-1} + ({}_{p+1}C_3 + {}_pC_3)x^{2p-2} + {}_pC_3\cdot x^{2p-3} \\ &\qquad + ({}_{p+1}C_5 + {}_pC_5)x^{2p-4} + {}_pC_5\cdot x^{2p-5} + \cdots \\ &= ({}_{p+1}C_1 + {}_pC_1)x^{2p} + ({}_{p+1}C_3 + {}_pC_3)x^{2p-2} + ({}_{p+1}C_5 + {}_pC_5)x^{2p-4} + \cdots \\ &\qquad + \{{}_pC_1\cdot x^{2p-1} + {}_pC_3\cdot x^{2p-3} + {}_pC_5\cdot x^{2p-5} + \cdots\} \\ &= ({}_{p+1}C_1 + {}_pC_1)x^{2p} + ({}_{p+1}C_3 + {}_pC_3)x^{2p-2} + ({}_{p+1}C_5 + {}_pC_5)x^{2p-4} + \cdots \\ &\qquad + \frac{1}{2}\cdot\{x(x+1))^p - x(x-1))^p\} \end{aligned}$$

これから、

$$\begin{aligned}&(n+1)^{p+1}n^p\\&=({}_{p+1}C_1+{}_pC_1)s_{2p}(n)+({}_{p+1}C_3+{}_pC_3)s_{2p-2}(n)+({}_{p+1}C_5+{}_pC_5)s_{2p-4}(n)+\cdots\\&\qquad+\frac{1}{2}(n(n+1))^p\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(2n+1)((n(n+1))^p\\&=({}_{p+1}C_1+{}_pC_1)s_{2p}(n)+({}_{p+1}C_3+{}_pC_3)s_{2p-2}(n)+({}_{p+1}C_5+{}_pC_5)s_{2p-4}(n)+\cdots\end{aligned}$$

これから、偶数乗の和に対して、$n(n+1)=2\,s_1(n)$ より、

$$\frac{1}{2}(2n+1)\begin{pmatrix}2\,s_1(n)\\4\,s_1(n)^2\\8\,s_1(n)^3\\16\,s_1(n)^4\\\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&&&&\\1&5&&&\\0&5&7&&\\0&1&14&9&\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_2(n)\\s_4(n)\\s_6(n)\\s_8(n)\\\vdots\end{pmatrix}$$

## 4 $p$ が小さいときの初等的方法

(1) $\frac{1}{3}(k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1))=k(k+1)$ から、

$$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)=\sum k(k+1)=s_2(n)+s_1(n)=s_2(n)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

これから、

$$s_2(n)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1(2n+1)$$

(2) $(k+1)^3=k^3+3\,k^2+3\,k+1$ から、

$$(n+1)^3=3\,s_2(n)+3\,s_1(n)+n=3\,s_2(n)+\frac{3}{2}n(n+1)+n+1$$

これから、

$$s_2(n)=\frac{1}{3}\left((n+1)^3-\frac{3}{2}n(n+1)-n-1\right)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(3) 松永良良弼の方法

$(n+1)^3=n^3+3\,n^2+3\,n+1$ において、右辺の $n$ の項を、$(n+1)^2=n^2+2\,n+1$ を使って消去する。

$$2\,(n+1)^3-3\,(n+1)^2=2\,n^3+3\,n^2-1$$

さらに定数項を $n+1$ で消去する。

$$2\,n^3+3\,n^2+n=n(n+1)(2\,n+1)$$

分母は、$n=1$ として、 6 で割ることになる。これは、平方朶の式である。

立方朶のとき、同じようにやっていくと、次のようになる。

$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

$n^2$ の項を、$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ を使って消去　　$n^4 + 2n^3 - 2n - 1$

$n$ の項を、$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ を使って消去　　$n^4 + 2n^3 + n^2$

これを 4 で割る。

## 5　關孝和の方法

關 (1640?～1708) は、「括要算法」(死後出版、1711) の朶積総術において、次の方式を与えた。

まず累裁招差之法として、基礎変数の多項式として与えられたデータから、この多項式を求める方法を与える。そして、朶積術解において、結果を次の式図の形で与える。

(第 1 節　関の式図 )

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | | | | | | | | | | | |
| 空 | 12 | 0 | | | | | | | | | | |
| 5/66 を取り加える | 66 | 11 | 0 | | | | | | | | | |
| 空 | 220 | 55 | 10 | 0 | | | | | | | | |
| 1/30 を取り減ずる | 495 | 165 | 45 | 9 | 0 | | | | | | | |
| 空 | 792 | 330 | 120 | 36 | 8 | 0 | | | | | | |
| 1/42 を取り加える | 924 | 462 | 210 | 84 | 28 | 7 | 0 | | | | | |
| 空 | 792 | 462 | 252 | 126 | 56 | 21 | 6 | 0 | | | | |
| 1/30 を取り減ずる | 495 | 330 | 210 | 126 | 70 | 35 | 15 | 5 | 0 | | | |
| 空 | 220 | 165 | 120 | 84 | 56 | 35 | 20 | 10 | 4 | 0 | | |
| 1/6 を取り加える | 66 | 55 | 45 | 36 | 28 | 21 | 15 | 10 | 6 | 3 | 0 | |
| 1/2 を取り加える | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 全 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 十乗原法 12 | 九乗原法 11 | 八乗原法 10 | 七乗原法 9 | 六乗原法 8 | 五乗原法 7 | 四乗原法 6 | 三乗原法 5 | 立原法 4 | 平原法 3 | 圭原法 2 | 基数 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | | | | | | | | | | |
| 底子巾を相乗して得たる数 | 0 | 0 | | | | | | | | | |
| この級の数を加える | 10 | 5 | 0 | | | | | | | | |
| 底子巾を相乗して得たる數 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | |
| この級の数を減ずる | −33 | −33 | −3 | −3 | 0 | | | | | | |
| 底子巾を相乗して得たる數 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| この級の数を加える | 44 | 66 | 10 | 20 | 2 | 1 | 0 | | | | |
| 底子巾を相乗して得たる數 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| この級の数を減ずる | −33 | −66 | −14 | −42 | −7 | −7 | −1 | −1 | 0 | | |
| 底子巾を相乗して得たる數 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| この級の数を加える | 22 | 55 | 15 | 60 | 14 | 21 | 5 | 10 | 1 | 1 | 0 |
| 底子とこの級の数を相乗、加える | 12 | 33 | 10 | 44 | 12 | 21 | 6 | 15 | 2 | 3 | 1 |
| 底子とこ級の数を相乗して得た數 | 2 | 6 | 2 | 10 | 3 | 6 | 2 | 6 | 1 | 2 | 1 |
| | 十乗法 | 九乗法 | 八乗法 | 七乗法 | 六乗法 | 五乗法 | 四乗法 | 三乗法 | 立法 | 平法 | 圭法 |
| | 24 | 66 | 20 | 90 | 24 | 42 | 12 | 30 | 4 | 6 | 2 |

この表の意味は、次の通りである。

いま、一番左の 十乗の列を取って説明する。

式図では、この列の数は、次の様である。

1, 12, 66, 220, 495, 792, 924, 792, 495, 220, 66, 12, 0

これに左側の取数を掛けると、

$$1,\ 6,\ 11,\ 0,\ -\frac{33}{2},\ 0,\ 22,\ -\frac{33}{2},\ 0,\ 5,\ 0,\ 0$$

全体に 2 を掛けて分母のあるものを除く。それが、次の十乗の列の数字である。

2, 12, 22, 0, −33, 0, 44, 0, −33, 0, 10, 0, 0

そして、この列には、もともと式図の中で原法として 12 があるので、それとこの 2 を掛けた 24 を法として割ったものが、求めるものになる、ということである。この表の使い方として、関は次のように述べている。

$$\begin{aligned}
s_1(n) &= (n+1)n \div 2 \\
s_2(n) &= ((2n+3)n+1)n \div 6 \\
s_3(n) &= ((n+2)n+1)n^2 \div 4 \\
s_4(n) &= (((6n+15)n+10)n^2-1)n \div 30 \\
s_5(n) &= (((2n+6)n+5)n^2-1)n^2 \div 12
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s_6(n) &= ((((6n+21)n+21)n^2-7)n^2+1)n \div 42 \\
s_7(n) &= ((((3n+12)n+14)n^2-7)n^2+1)n^2 \div 24 \\
s_8(n) &= (((((10n+45)n+60)n^2-42)n^2+20)n^2-3)n \div 90 \\
s_9(n) &= (((((2n+10)n+15)n^2-14)n^2+10)n^2-3)n^2 \div 20 \\
s_{10}(n) &= ((((((6n+33)n+55)n^2-66)n^2+66)n^2-33)n^2+5)n \div 66 \\
s_{11}(n) &= ((((((2n+12)n+22)n^2-33)n^2+44)n^2-33)n^2+10)n^2 \div 24
\end{aligned}
$$

關は、この結果を得るのに、累裁招差法というのを案出している。累裁招差之法というのは、補間法の一種と見ることができる。

關の「括要算法」巻元では、朶積総術として、はじめに上に述べた累裁招差法が述べられており、その後、朶積術解として、朶積術が展開される。

そのはじめは、$s_1(n)$ から $s_{11}(n)$ まで、上記の表を使った方式で、$n=3$ の場合の和が求められている。

次に、圭朶演段、平方朶演段、立方朶演段、三乗方朶演段、四乗方朶演段、五乗方朶演段として、式図の左に書かれた数、これを関は取数と呼んでいるが、それを求める方式を与え、その後に式図が書かれている。

いささか不思議な展開であるが、これについては、以前の論文 [竹之内] で、詳しく論じたので、ここには述べない。ここでは、関の述べている取数の定め方について、記しておこう。

五乗方朶演段として述べられている六級取数の定め方について

一級取数 ($n^7$ の係数) 1

二級取数 ($n^6$ の係数) 7 の $\dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$

三級取数 ($n^5$ の係数) 21 の $\dfrac{1}{6} = \dfrac{21}{6}$

四級取数 ($n^4$ の係数) は 0

五級取数 ($n^3$ の係数) 35 の $-\dfrac{1}{30} = -\dfrac{35}{30}$

六級取数 ($n^2$ の係数) は 0

これらの和 $\dfrac{41}{6}$ を原法 7 から引くと、$\dfrac{1}{6}$ となる。これを七級數 7 で割ると $\dfrac{1}{42}$ これが五乗方朶の式で $n$ の係数としてかかるもの、すなわち七級取数である。

$$\left(7-\left(1+\frac{1}{2}\cdot 7+\frac{1}{6}\cdot 21-\frac{1}{30}\cdot 35\right)\right)\div 7=\frac{1}{42}$$

そして、余は之に倣(なら)え、と書いている。

これらの取数を得たあとで、上にあげた第二の表は、次の行列計算で作ることができる。関は六級取数の作り方までしか書いていないので、これも六乗方朶までの計算とする。

$$
\overset{\text{原法}}{\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
0 & \frac{1}{2} & & & & & \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & & \text{\huge 0} & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7}
\end{pmatrix}}
\overset{\text{二項係数}}{\begin{pmatrix}
1 & 0 & & & & & & \\
1 & 2 & 0 & & & & & \\
1 & 3 & 3 & 0 & & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 0 & & \text{\huge 0} & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 & & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 0 & \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 0
\end{pmatrix}}
\overset{\text{ベルヌイ数}}{\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
0 & \frac{1}{2} & & & & & \\
0 & 0 & \frac{1}{6} & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \text{\huge 0} & \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{42}
\end{pmatrix}}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & & \text{\huge 0} & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{30} & & \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \\
\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{42}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
0 & \frac{1}{2} & & & & & \\
0 & 0 & \frac{1}{6} & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & & \text{\huge 0} & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{30} & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{42}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
2 & 3 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & 0 & & \text{\huge 0} & \\
6 & 15 & 10 & 0 & -1 & & \\
2 & 6 & 5 & 0 & -1 & 0 & \\
6 & 21 & 21 & 0 & -7 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

## 6 Jakob Bernoulli の方法

Jakob Bernoulli (1654〜1705) は、Ars Conjectandi (死後出版、1715) において、次の方式を与えている。

2 項係数の和の式から、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)(k-2)}{1\cdot 2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

これから、

$$\frac{1}{2}s_2(n) = \frac{n^3-3n^2+2n}{6} + \frac{3}{2}s_1(n) - n = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{12}n$$

このような計算を、$p = 1, 2, 3$ の場合に示し、そして説明なしに、$p = 1, \cdots, 10$ の結果を一覧表として挙げる。

*Summæ Potestatum.*

$$\int n = \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n.$$

$$\int nn = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n.$$

$$\int n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn.$$

$$\int n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 * - \frac{1}{30}n.$$

$$\int n^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 * - \frac{1}{12}nn.$$

$$\int n^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 * - \frac{1}{6}n^3 * + \frac{1}{42}n.$$

$$\int n^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 * - \frac{7}{24}n^4 * + \frac{1}{12}nn.$$

$$\int n^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 * - \frac{7}{15}n^5 * + \frac{2}{9}n^3 * - \frac{1}{30}n.$$

$$\int n^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 * - \frac{7}{10}n^6 * + \frac{1}{2}n^4 * - \frac{1}{12}nn.$$

$$\int n^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 * - 1\,n^7 * + 1\,n^5 * - \frac{1}{2}n^3 * + \frac{5}{66}n.$$

そして、この結果を次の形にまとめている。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p+1}n^{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \frac{p}{2}An^{p-1} - \frac{p(p-1)(p-2)}{2\cdot 3\cdot 4}Bn^{p-3} \\
&\quad + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}Cn^{p-5} \\
&\quad - \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)(p-6)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}Dn^{p-7} \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}$$

ここで、$A, B, C, D, \cdots$ は、次のような数である。

$$A=\frac{1}{6},\ B=-\frac{1}{30},\ C=\frac{1}{42},\ D=-\frac{1}{30}$$

これらの数を求めるのに、Bernoulli は關と同じく、次の方式を与えている。例えば $D$ については、

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{7}{15}+\frac{2}{9}\Big(+D\Big)-\frac{1}{30}=1$$

(Bernoulli はこのように書いているが、これは、恐らく

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{7}{15}+\frac{2}{9}\Big(+D\Big)=1$$

から、

$$D=-\frac{1}{30}$$

とすべきところの、書き誤りであろう。)

これらの数は、De Moivre によってベルヌイ数と呼ばれ (1730)、その後この名が用いられている。

ベルヌイ数については、6 ページに 30 番目までを与えた。

## 7　松永、有馬、李の方法

松永良弼　(1692〜1744) は、「算法全経」(1740?) において、朶積術の新しい方法を述べた。それは、やゝ晦渋なものであったが、有馬頼徸 (1714〜1783) がその後「拾璣算法」(1769) の中で、表を使った形で、見やすいものとした。

この松永、有馬の方法は、後に李善蘭 (1811〜1882) が述べたところによって、明快に理解される。

はじめに、有馬の述べているところに従って説明する。

有馬は、例として、5 乗方朶 $s_6(n)$ を求める計算法を示す。その答は、次のものである。

$$\frac{1}{42}(((((6n+21)n+21)n^2-7)n^2+1)n)$$

これを求めるために、まず 5 乗衰朶の式を書く。5 乗衰朶というのは、

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)$$

のことで、その和は

$$\frac{1}{7}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)$$
$$=\frac{1}{7}(720n+1764n^2+1624n^3+735n^4+175n^5+21n^6+n^7)$$

である。

これを第一式と呼ぶ。そしてこれを 1 ずつずらせていく。(すなわち、$k$ のところを $k-1,\ k-2,\ \cdots$ としたものを作る。$\frac{1}{7}$ はあとでつける。)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 第一式 | $720n$ | $+\ 1764n^2$ | $+\ 1624n^3$ | $+\ 735n^4$ | $+\ 175n^5$ | $+\ 21n^6$ | $+\ n^7$ |
| 第二式 | $-120n$ | $-\ 154n^2$ | $+\ 49n^3$ | $+\ 140n^4$ | $+\ 70n^5$ | $+\ 14n^6$ | $+\ n^7$ |
| 第三式 | $48n$ | $+\ 28n^2$ | $-\ 56n^3$ | $-\ 35n^4$ | $+\ 7n^5$ | $+\ 7n^6$ | $+\ n^7$ |
| 第四式 | $-36n$ | $+\ 0n^2$ | $+\ 49n^3$ | | $-\ 14n^5$ | | $+\ n^7$ |
| 第五式 | $48n$ | $-\ 28n^2$ | $-\ 56n^3$ | $+\ 35n^4$ | $+\ 7n^5$ | $-\ 7n^6$ | $+\ n^7$ |
| 第六式 | $-120n$ | $+\ 154n^2$ | $+\ 49n^3$ | $-\ 140n^4$ | $+\ 70n^5$ | $-\ 14n^6$ | $+\ n^7$ |

これに段率として、それぞれ　1, 57, 302, 302, 57, 1　を掛けて加えたものを 5040 で割って得られる

$$\frac{1}{5040}(120n-840n^3+2520n^5+2520n^6+720n^7)$$

が求めるものである。

(5040 は、それ以前の分母の累積、すなわち、$1\times2\times3\times4\times5\times6\times7$

この式の分子分母を 120 で約すれば、上記の

$$\frac{1}{42}(n-7n^3+21n^5+21n^6+6n^7)$$

となる。)

段率というのは、各朶によって異なる。(下記の考察の項で説明する。)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 圭朶 | 1 | | | | | |
| 平方朶 | 1 | 1 | | | | |
| 立方朶 | 1 | 4 | 1 | | | |
| 三乗方朶 | 1 | 11 | 11 | 1 | | |
| 四乗方朶 | 1 | 26 | 66 | 26 | 1 | |
| 五乗方朶 | 1 | 57 | 302 | 302 | 57 | 1 |

ここで、これらの数が、

$$1\times2+1\times2=4,\quad 4\times2+1\times3=11,\quad \cdots$$
$$1\times3+4\times2=11,\quad 11\times3+11\times3=66,\quad \cdots$$
$$1\times4+11\times2=26,\quad 26\times4+11\times2=302,\quad \cdots$$
$$1\times5+26\times2=57,\quad \cdots$$
$$1\times6+57\times2=120,\quad \cdots$$

というプロセスで求められることが述べられている。

◇ 松永 良弼 算法全経

この方式は、松永良弼が考案したものである。
算法全経には、まず、衰朶式が述べられている。

原法

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 圭 | 1 | 1 | 0 | | | | | | |
| 三角 | 2 | 1 | 3 | 2 | 0 | | | | |
| 再乗 | 3 | 1 | 6 | 11 | 6 | 0 | | | |
| 三乗 | 4 | 1 | 10 | 35 | 50 | 24 | 0 | | |
| 四乗 | 5 | 1 | 15 | 85 | 225 | 274 | 120 | 0 | |
| 五乗 | 6 | 1 | 21 | 175 | 735 | 1624 | 1764 | 720 | 0 |

この表の作成法として、前下級と原法を乗じ、上級に加える、とある。
そしてやや晦渋な方法で、

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 圭朶 | 1 | | | | |
| 平方朶 | 1 | 1 | | | |
| 立方朶 | 1 | 4 | 1 | | |
| 三乗方朶 | 1 | 11 | 11 | 1 | |
| 四乗方朶 | 1 | 26 | 66 | 26 | 1 |

までの乗数 (段率) を求めることが述べられている。
そして、実例として、三乗方朶の場合が挙げられている。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 甲 | $24n$ | $+\ 50n^2$ | $+\ 35n^3$ | $+\ 10n^4$ | $+\ n^5$ |
| 乙 | $-6n$ | $-\ 5n^2$ | $+\ 5n^3$ | $+\ 5n^4$ | $+\ n^5$ |
| 丙 | $4n$ | | $-\ 5n^3$ | | $+\ n^5$ |
| 丁 | $-6n$ | $+\ 5n^2$ | $+\ 5n^3$ | $-\ 5n^4$ | $+\ n^5$ |

そして、これに、三乗方朶の乗数を掛ける。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 甲 × 1 | $24n$ | $+\ 50n^2$ | $+\ 35n^3$ | $+\ 10n^4$ | $+\ n^5$ |
| 乙 × 11 | $-66n$ | $-\ 55n^2$ | $+\ 55n^3$ | $+\ 55n^4$ | $+\ 11n^5$ |
| 丙 × 11 | $44n$ | | $-\ 55n^3$ | | $+\ 11n^5$ |
| 丁 × 1 | $-6n$ | $+\ 5n^2$ | $+\ 5n^3$ | $-\ 5n^4$ | $+\ n^5$ |

そして、これを加える。

$$-4n + 40n^3 + 60n^4 + 24n^5$$

これが三乗方朶式である。これに約法 120 がつくので、4 で約す。

$$\frac{1}{30}(-n + 10n^3 + 15n^4 + 6n^5)$$

## ◇ 李 善蘭　　朶積比類

李 善蘭は、その著「朶積比類」(1867) の中で、2 項係数の表と類似の表をいろいろ作って研究している。その中に"李氏数"と称されているものがある。これは、すでに上にも登場している次の数である。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 11 & & 11 & & 1 & & \\
 & 1 & & 26 & & 66 & & 26 & & 1 & \\
1 & & 57 & & 302 & & 302 & & 57 & & 1
\end{array}$$

これらは"オイラー数"とも称されている。いま、$p$ 行目、左から $k$ 番目の数を $A_k^p$ と書く。このとき、李は、次のことを述べている。

$$A_k^{p+1} = (p-k+2)A_{k-1}^p + kA_k^p \qquad (1)$$

$$n^p = \sum_{k=1}^{p} A_k^p \binom{n+k-1}{p} \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m^p = \sum_{k=1}^{p} A_k^n \binom{n+k}{p+1} \qquad (3)$$

これらについては、以下に述べる。

**考察**

以上は、原文に述べられているものであるが、これだけでは、何をやっているのか理解し難い。ここで、これらのことについて、考察してみたい。

● 衰朶式のつくり方

松永が述べている衰朶式の係数の表

| | 原法 | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 圭 | 1 | 1 | 1 | 0 | | | | | |
| 三角 | 2 | 1 | 3 | 2 | 0 | | | | |
| 再乗 | 3 | 1 | 6 | 11 | 6 | 0 | | | |
| 三乗 | 4 | 1 | 10 | 35 | 50 | 24 | 0 | | |
| 四乗 | 5 | 1 | 15 | 85 | 225 | 274 | 120 | 0 | |
| 五乗 | 6 | 1 | 21 | 175 | 735 | 1624 | 1764 | 720 | 0 |

のつくり方であるが、前下級と原法を乗じ、上級に加える、とある。これは、前下級とは、求めようとする衰朶の一つ前の衰朶の対応する部分 (級) の一つ前の数に原法を掛けて、その上の級に加えたものが、求める級の数だ、ということである。

例えば五乗衰朶の係数を見ると、

1 は 1

$21 = 1 \times 6 + 15$

$175 = 15 \times 6 + 85$

$735 = 85 \times 6 + 225$

$1624 = 225 \times 6 + 274$

$1764 = 274 \times 6 + 120$

$720 = 120 \times 6 + 0$

として作るということである。

● 衰朶式の次々の展開

まず、和をとる前の $k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)$、および $(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$, $\cdots$ を展開する。

$$k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5) = 120\,k + 274\,k^2 + 225\,k^3 + 85\,k^4 + 15\,k^5 + k^6$$

$$(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) = -24\,k - 26\,k^2 + 15\,k^3 + 25\,k^4 + 9\,k^5 + k^6$$

$$(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3) = 12\,k + 4\,k^2 - 15\,k^3 - 5\,k^4 + 3\,k^5 + k^6$$

$$(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2) = -12\,k + 4\,k^2 + 15\,k^3 - 5\,k^4 - 3\,k^5 + k^6$$

$$(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1) = 24\,k - 26\,k^2 - 15\,k^3 + 25\,k^4 - 9\,k^5 + k^6$$

$$(k-5)(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)k = -120\,k + 274\,k^2 - 225\,k^3 + 85\,k^4 - 15\,k^5 + k^6$$

そして、この各式に上の係数　1, 57, 302, 302, 57, 1　を掛けて加えると、

$720\,k^6$

となる。

これを行列形で書くと、

$$
\begin{pmatrix} 1 & 57 & 302 & 302 & 57 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
120 & 274 & 225 & 85 & 15 & 1 \\
-24 & -26 & 15 & 25 & 9 & 1 \\
12 & 4 & -15 & -5 & 3 & 1 \\
-12 & 4 & 15 & -5 & -3 & 1 \\
24 & -26 & -15 & 25 & -9 & 1 \\
-120 & 274 & -225 & 85 & -15 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 720 \end{pmatrix}
$$

これの和をとったものが、第一式、第二式、…、第六式であるが、これについて同様に、係数を掛けて加えると、

$$
\begin{pmatrix} 1 & 57 & 302 & 302 & 57 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
720 & 1764 & 1624 & 735 & 175 & 21 & 1 \\
-120 & -154 & 49 & 140 & 70 & 14 & 1 \\
48 & 28 & -56 & -35 & 7 & 7 & 1 \\
-36 & 0 & 49 & 0 & -14 & 0 & 1 \\
48 & -28 & -56 & 35 & 7 & -7 & 1 \\
-120 & 154 & 49 & -140 & 70 & -14 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 120 & 0 & -840 & 0 & 2520 & 2520 & 720 \end{pmatrix}
$$

が得られる。

これによって、

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^6 &= \frac{1}{7 \times 720}(120\,n - 840\,n^3 + 2520\,n^5 + 2520\,n^6 + 720\,n^7) \\
&= \frac{1}{42}(((((6n+21)n+21)n^2-7)n^2+1)n)
\end{aligned}
$$

となる。

● 段率

そこで、次には、これらの係数すなわち段率が、有馬のいう方式でどうして求められるのか、調べる。

有馬の著では、いきなり五乗方朶の計算が飛び出すが、これを次数の低いものから、やってみる。上と同じく行列形で扱っていこう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 11 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 11 & 6 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 & 50 & 35 & 10 & 1 \\ -6 & -5 & 5 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & -5 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 5 & -5 & 1 \\ 24 & -50 & 35 & -10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 120 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 57 & 302 & 302 & 57 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 120 & 274 & 225 & 85 & 15 & 1 \\ -24 & -26 & 15 & 25 & 9 & 1 \\ 12 & 4 & -15 & -5 & 3 & 1 \\ -12 & 4 & 15 & -5 & -3 & 1 \\ 24 & -26 & -15 & 25 & -9 & 1 \\ -120 & 274 & -225 & 85 & -15 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 720 \end{pmatrix}$$

ここで、左側に現れた係数は、次のような操作で求められていく。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 11 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 57 & 302 & 302 & 57 & 1 \end{pmatrix}$$

松永、有馬は、このように順にやっていって、このような図式を求め得たのであろう。実際、有馬の拾璣算法には、このような計算の方式が書いてあるが、それをどのようにして得たのかは、わからない。

● 李 善蘭の関係式

李善蘭は、その著書「朶積比類」(1867) の中で、次のことを示している。(大西正男氏のご教示による。李迪著、大竹茂雄・陸人瑞訳「中国の数学通史」参照)

上にあげた段率

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 11 & & 11 & & 1 & & \\
 & 1 & & 26 & & 66 & & 26 & & 1 & \\
1 & & 57 & & 302 & & 302 & & 57 & & 1
\end{array}$$

について、$p$ 行目、左から $k$ 番目の数を $A_k^p$ と書く。このとき、李は、次のことを述べている。

$$A_k^{p+1} = (p-k+2)A_{k-1}^p + kA_k^p \tag{1}$$

$$n^p = \sum_{k=1}^{p} A_k^p \binom{n+k-1}{p} \tag{2}$$

$$\sum_{m=1}^{n} m^p = \sum_{k=1}^{p} A_k^p \binom{n+k}{p+1} \tag{3}$$

(1) は、行列形で書くと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} A_1^p & A_2^p & A_3^p & \cdots & A_p^p \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & p & & & & & \\
 & 2 & p-1 & & & \mathbf{0} & \\
 & & 3 & p-2 & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & & \\
 & \mathbf{0} & & & p-2 & 3 & \\
 & & & & & p-1 & 2 \\
 & & & & & & p & 1
\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1^{p+1} & A_2^{p+1} & A_3^{p+1} & \cdots & A_{p+1}^{p+1} \end{pmatrix}$$

$p=5$ の場合は、次の式である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 57 & 302 & 302 & 57 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) についても、先取りして、その具体的な形を調べておこう。
$p=6$ とすると、

$$n^6 = \binom{n}{6} + \binom{n+1}{6} + \binom{n+2}{6} + \binom{n+3}{6} + \binom{n+4}{6} + \binom{n+5}{6}$$

$$\begin{aligned}
= \ & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!} + 57\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{6!} \\
+ \ & 302\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{6!} + 302\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{6!} \\
+ \ & 57\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)}{6!} + \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{6!}
\end{aligned}$$

ということになり、これは、この考察のはじめに、'衰朶式の次々の展開' として、与えたものである。

(3) については、この和をとった形であるから、これが、同じように、

$$\sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{1}{7\times 720}(120n - 840n^3 + 2520n^5 + 2520n^6 + 720n^7)$$

を一般化したものであることは、納得されることであろう。

(2) の証明

右辺で、$p$ のところに $p+1$ としたものを作る。

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{p+1} A_k^{p+1} \binom{n+k-1}{p+1} \\
= \ & \sum_{k=1}^{p+1} \left((p-k+2)A_{k-1}^p + kA_k^p\right) \binom{n+k-1}{p+1} \\
= \ & \sum_{k=1}^{p} (p-k+1)A_k^p \binom{n+k}{p+1} + \sum_{k=1}^{p} kA_k^p \binom{n+k-1}{p+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{p} A_k^p \left( (p-k+1) \begin{pmatrix} n+k \\ p+1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} n+k-1 \\ p+1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} A_k^p \left( \frac{n+k}{p+1}(p-k+1) + \frac{n+k-p-1}{p+1}k \right) \begin{pmatrix} n+k-1 \\ p \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{p} A_k^p n \begin{pmatrix} n+k-1 \\ p \end{pmatrix} \\
&= n^{p+1}
\end{aligned}
$$

(3) の証明

(2) を用いれば、

$$\sum_{m=1}^{n} m^p = \sum_{k=1}^{p} A_k^p \sum_{m=1}^{n} \begin{pmatrix} m+k-1 \\ p \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\sum_{m=1}^{n} \begin{pmatrix} m+k-1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+k \\ p+1 \end{pmatrix}$$

が示されればよい。

一般に、

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$$

である。

また、$k \leqq p$ であるから、この和は、$m+k-1=p$、すなわち $m=p-k+1$ のところから取ることになる。その結果、上の和は、最終的に

$$\begin{pmatrix} n+k \\ p+1 \end{pmatrix}$$

となる。

## 文献


朱世傑「四元玉鑑」(1298)

Ivo Schneider「Johannes Faulhaber 1580-1635」Birkhăuser (1993)

C. G. J. Jacobi「De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae」
J. Reine Angew. Math. (1834)

Augustin Louis Cauchy「Résumés Analytiques」
Oeuvers Complètes d'Augustin Cauchy II$^{e}$ Série Tome X

關孝和全集

Jakob Bernoulli「Ars Conjectandi」(1715)

松永 良弼全集

藤井康生「江戸時代の数学の研究　朶積について」
平成 12 年度兵庫教育大学大学院 学位論文

有馬 頼　「拾　算法」

藤井康生・米光丁「拾　算法 (現代解と解説)」(1999)

李 善蘭「　積比類」(1867)

李迪著、大竹茂雄・陸人瑞訳「中国の数学通史」森北出版 (2002)

竹之内　脩 「關孝和の朶積術について (2)」 和算研究所紀要 No.7 (2007)