

電気回路の混合解析における微分代数方程式の指数最小化

京都大学・数理解析研究所 岩田 覚 (Satoru Iwata)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

東京大学・情報理工学系研究科 高松 瑞代 (Mizuyo Takamatsu)
Graduate School of Information Science and Technology,
University of Tokyo

1 はじめに

微分代数方程式 (DAE) とは微分演算子を含む方程式系であり, 電気回路, 機械力学系, 化学プラントなどの動的システムを記述する際に現れる. DAE の難しさを表す指標として指数が定義されており, 指数が大きくなるほど数値計算は困難になる. 代表的な指数には, 微分指数 [4, 6], 摂動指数 [10], 順良指数 [21, 24] などがあるが, 線形時不変 DAE の場合, これらの指数はすべて冪零指数に一致することが知られている [4, 5, 10, 20]. 本稿では, 電気回路を記述する DAE を冪零指数を用いて解析する.

モデル化の手段としての DAE の重要性が認識されるに伴い, DAE を解く数値計算ソフトウェアも整備されてきた. 1971 年に, Gear [8] は後退差分法 (BDF) を用いた DAE の計算法を提案した. この手法は, Petzold によるプログラム DASSL に利用されている [4]. また, Hairer & Wanner [10] は, 陰的 Runge-Kutta 法に基づく計算法を RADAU5 に実装した. これらのソフトウェアには指数の低い DAE にしか適用できないという欠点がある. 最近では, より指数の高い DAE に適用可能なソフトウェアも提案されている [19].

電気回路のシミュレーションでは, 修正節点解析 (MNA) から導出される DAE を解くのが一般的である. 独立電源, 抵抗, インダクタ, キャパシタを含む非線形時変回路に対し, MNA から導出される DAE の指数が常に 2 以下となることが示され, 指数が 1 となる回路の構造的特徴づけが与えられた [24]. しかし, 従属電源を含む回路の指数は 3 以上になることがある. MNA から導出される DAE の指数は回路の構造によって決まるため, 指数を減少させる工夫の余地はない.

MNA 以外の伝統的な回路解析法として, 1939 年に Kron [18] が提案し, 1960 年代に甘利 [1] と Branin [3] が発展・拡張させた混合解析が知られている. 混合解析は MNA より自由度が高いため, 同じ回路に対しても, 指数の異なる複数の記述法が存在する. 混合解析では, まず素子の分割と基準木を選ぶ. 次に, 分割と基準木に従って, 数値的に解くべき方程式である混合方程式を導出する. そこで, 混合方程式が “最も簡単” になるような分割と基準木の選び方が問題になる. 1968 年には, 自由変数の個数が最小となる混合方程式 (最小基本方程式) を求めるアルゴリズムが提案された [11, 17, 23]. この問題はマトロイド対の共通独立集合問題を用いて簡潔に記述することができる [12].

本稿では, 混合方程式の自由変数の個数の代わりに, 指数に焦点を当て, 線形時不変回路における混合方程式の指数を最小化する分割と基準木を求める組合せ的アルゴリズムを提案する. このアルゴリズムでは, まず関連する多項式行列の余因子の次数により定義される次数行列を求める. 次に, 指数最小化の問題を次数行列上の 2SAT (各節が高々 2 個の論理変数を持つ充足可能性問題) に帰着

する。回路の素子数を n とすると、本アルゴリズムの計算複雑度は $O(n^6)$ となる。さらに、素子のパラメータが代数的独立という仮定のもとで、計算複雑度は $O(n^3)$ に改善可能である。

第 2 章では、行列束の性質と指数の定義を述べる。第 3 章では混合解析の手順を述べ、第 4 章では混合方程式の指数を解析する。第 5 章では指数最小化アルゴリズムを提案する。数値実験の結果は第 6 章にまとめられている。

2 DAE と行列束

多項式 $a(s)$ の次数を $\deg a(s)$ と表す。ただし、 $\deg 0 = -\infty$ と定義する。多項式行列 $A(s) = (a_{kl}(s))$ において、任意の (k, l) に対して $\deg a_{kl}(s) \leq 1$ が成り立つとき、 $A(s)$ を行列束と呼ぶ。定義より、行列束 $A(s)$ は定数行列 A_0, A_1 を用いて $A(s) = A_0 + sA_1$ と表せる。行列束 $A(s)$ の行列式が恒等的に零でない多項式であるとき、 $A(s)$ は正則であるといわれる。

線形時不変 DAE は $n \times n$ の定数行列 A_0, A_1 を用いて次のように書ける：

$$A_0 \mathbf{x}(t) + A_1 \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t). \quad (1)$$

両辺をラプラス変換すると、行列束 $A(s) := A_0 + sA_1$ を用いて $A(s)\tilde{\mathbf{x}}(s) = \tilde{\mathbf{f}}(s) + A_1\mathbf{x}(0)$ と記述できる。ここで、変数 s は時間 t に関する微分演算子 d/dt を表す。

定理 2.1 ([4, Theorem 2.3.1]). 線形時不変 DAE (1) の可解性は、行列束 $A(s)$ の正則性と同値である。

定理 2.1 より、 $A(s)$ は正則であると仮定してよい。行列束 $A(s)$ の行集合を R 、列集合を C とする。行集合 $K \subseteq R$ 、列集合 $L \subseteq C$ で定まる $A(s)$ の小行列を $A[K, L]$ と表す。さらに、行列束 $A(s)$ の大きさ r の小行列における行列式の最大次数を $\delta_r(A)$ と表す：

$$\delta_r(A) = \max_{K, L} \{ \deg \det A[K, L] \mid |K| = |L| = r, K \subseteq R, L \subseteq C \}.$$

このとき、線形時不変 DAE (1) の**冪零指数** $\nu(A)$ は

$$\nu(A) = \delta_{n-1}(A) - \delta_n(A) + 1$$

により定義される。単純な DAE の例として、常微分方程式と代数方程式が挙げられる。常微分方程式の指数は 0 であり、代数方程式の指数は 1 である。

3 混合解析

本稿は、抵抗、キャパシタ、インダクタ、独立電源、従属電源からなる線形時不変回路を対象とする。本章では、混合解析の手順を述べる。

回路の結線構造を表すグラフを $G = (W, E)$ とする。このとき、 G の枝は素子に対応する。回路の仮定から、独立電圧源のみからなる閉路、独立電流源のみからなるカットセットは存在しないとしてよい。独立電圧源、独立電流源の枝集合をそれぞれ E_g, E_h とし、 $E_* := E \setminus (E_g \cup E_h)$ を $E_y \cup E_z = E_*$ 、 $E_y \cap E_z = \emptyset$ となるように E_y と E_z に分割する。ただし、キャパシタと従属電流源は E_y に、インダクタと従属電圧源は E_z に含まれるものとする。

電流ベクトルを ξ , 電圧ベクトルを η とする. 既約カットセット行列を Ψ , 既約閉路行列を Φ と表すと, Kirchhoff の電流則 (KCL) から $\Psi\xi = 0$ が, Kirchhoff の電圧則 (KVL) から $\Phi\eta = 0$ が導かれる. 与えられた分割 (E_y, E_z) に対し, ξ と η を次のように分ける:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_g \\ \xi_y \\ \xi_z \\ \xi_h \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_g \\ \eta_y \\ \eta_z \\ \eta_h \end{pmatrix}.$$

ここで, 下付き添え字は E の分割に対応する. KCL, KVL, 素子特性の式からなる方程式を回路方程式という. ラプラス変換後の回路方程式は以下ようになる:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \Psi & & O & \\ \hline & O & & \Phi \\ \hline O & I & Z(s) & Y(s) & O & O \\ O & O & & & I & O \\ \hline O & O & O & O & I & O & O & O \\ O & O & O & I & O & O & O & O \end{array} \right) \begin{pmatrix} \xi_g \\ \xi_y \\ \xi_z \\ \xi_h \\ \eta_g \\ \eta_y \\ \eta_z \\ \eta_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g(s) \\ h(s) \end{pmatrix}.$$

このとき係数行列 $A(s)$ は行列束になる.

G の全域木のうち, E_g の枝をすべて含み, E_h の枝をまったく含まず, E_y の枝をできるだけ多く含む木 T を基準木という. 基準木 T の補木を $\bar{T} = E \setminus T$ と表す.

行列束 $A(s)$ の行集合と列集合をそれぞれ R, C とする. 与えられた分割 (E_y, E_z) に対し, E_g, E_y, E_z, E_h に含まれる素子の電流変数と電圧変数に対応する $A(s)$ の列集合を I_g, I_y, I_z, I_h と V_g, V_y, V_z, V_h で表す. さらに, 与えられた基準木 T に対し, $E_y \cap T$ と $E_y \cap \bar{T}$ に含まれる素子の電流変数と電圧変数に対応する $A(s)$ の列集合を I_y^τ, I_y^λ と V_y^τ, V_y^λ で表す. ここで, 上付き添え字 τ と λ はそれぞれ木 T と補木 \bar{T} を意味する. 同様にして, I_z^τ, I_z^λ と V_z^τ, V_z^λ を定義する. さらに, $I^\tau = I_g \cup I_y^\tau \cup I_z^\tau$, $V^\lambda = V_y^\lambda \cup V_z^\lambda \cup V_h$ と定める. KCL, KVL, 素子特性の式に対応する $A(s)$ の行集合を R_I, R_V, S で表す.

分割 (E_y, E_z) と基準木 T が与えられたとき, Ψ と Φ が T に関する基本カットセット行列と基本閉路行列であるような回路方程式の係数行列を $A_T(s)$ とする. これは, $A(s)$ を行集合 $R_I \cup R_V$ における行変形により, $A_T[R_I, I^\tau] = I$ と $A_T[R_V, V^\lambda] = I$ を満たす行列 $A_T(s)$ に変形することを意味する. さらに, $K \subseteq R$ と $L \subseteq C$ が同じ添え字をもつならば $A_T[K, L] = I$ となるように, I_g, I_y^τ, I_z^τ と $V_y^\lambda, V_z^\lambda, V_h$ に対応する行集合を R_g, R_y^τ, R_z^τ と $R_y^\lambda, R_z^\lambda, R_h$ で定義する. 同様にして, I_y, V_z, V_g, I_h に対応する行集合を S_y, S_z, S_g, S_h と定める. 素子 e の電流変数と電圧変数に対応する列を i_e と v_e で表す. 基準木の定義より, $A_T(s)$ は以下の性質を有する.

補題 3.1 ([14, Lemma 2]). 基準木 T に対し, $A_T[R_z^\tau, I_y^\lambda] = 0$ と $A_T[R_y^\lambda, V_z^\tau] = 0$ が成り立つ.

よって $A_T(s)$ は次のようになる:

$$A_T(s) = \begin{matrix} & I_g & I_y^T & I_y^\lambda & I_z^T & I_z^\lambda & I_h & V_g & V_y^T & V_y^\lambda & V_z^T & V_z^\lambda & V_h \\ \begin{matrix} R_g \\ R_y^T \\ R_z^T \\ R_y^\lambda \\ R_z^\lambda \\ R_h \\ S_y \\ S_z \\ S_g \\ S_h \end{matrix} & \begin{pmatrix} I & O & * & O & * & * & O & O & O & O & O & O & O \\ O & I & * & O & * & * & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & I & * & * & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & * & * & I & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & * & * & O & * & I & O & O \\ O & O & O & O & O & O & * & * & O & * & O & I & I \\ O & I & O & ** & ** & ** & ** & ** & ** & ** & O & O & O \\ O & O & I & ** & ** & ** & ** & ** & ** & ** & O & O & O \\ O & O & O & ** & ** & ** & ** & ** & ** & ** & I & O & O \\ O & O & O & ** & ** & ** & ** & ** & ** & ** & O & I & O \\ O & O & O & O & O & O & I & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & I & O & O & O & O & O & O \end{pmatrix} \end{matrix}$$

ただし, * は定数行列, ** は行列束を意味する. このように, $A_T(s)$ は分割 (E_y, E_z) と基準木 T が与えられて初めて定まる行列束である.

ここで, $P = R \setminus (R_y^T \cup R_z^\lambda)$ と $Q = C \setminus (I_z^\lambda \cup V_y^T)$ を定義する. さらに, $B = A_T[P, Q]$, $F = A_T[P, C \setminus Q]$, $G = A_T[R \setminus P, Q]$, $H = A_T[R \setminus P, C \setminus Q]$ とし, 以下の行変形により A_T を \tilde{A}_T に変形する:

$$A_T = \begin{pmatrix} B & F \\ G & H \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{A}_T = \begin{pmatrix} I & O \\ -GB^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & F \\ O & H - GB^{-1}F \end{pmatrix}. \quad (2)$$

得られた行列 \tilde{A}_T の小行列 $H - GB^{-1}F$ を D と表す.

行列束 B, F, G, H, D において, 変数 s を d/dt で置き換えた行列を $\hat{B}, \hat{F}, \hat{G}, \hat{H}, \hat{D}$ として, 次の DAE を考える:

$$\hat{B}\mathbf{x}_1(t) + \hat{F}\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{f}_1(t), \quad (3)$$

$$\hat{G}\mathbf{x}_1(t) + \hat{H}\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{f}_2(t). \quad (4)$$

行変形 (2) を適用することで

$$\hat{B}\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{f}_1(t) - \hat{F}\mathbf{x}_2(t), \quad (5)$$

$$\hat{D}\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{f}_2(t) - \hat{G}\hat{B}^{-1}\mathbf{f}_1(t) \quad (6)$$

を得る. DAE (6) は混合方程式と呼ばれる. $I_g, I_y^T, I_y^\lambda, I_z^T, I_z^\lambda, I_h$ に対応する電流変数を $\xi_g, \xi_y^T, \xi_y^\lambda, \xi_z^T, \xi_z^\lambda, \xi_h$ と表し, $V_g, V_y^T, V_y^\lambda, V_z^T, V_z^\lambda, V_h$ に対応する電圧変数を $\eta_g, \eta_y^T, \eta_y^\lambda, \eta_z^T, \eta_z^\lambda, \eta_h$ と表す. このとき, 混合解析の手順は以下のようになる:

1. ξ_h と η_g の値は行集合 S_h と S_g に対応する式から明らかである.
2. 混合方程式 (6) を解いて ξ_z^λ と η_y^T の値を求める.
3. ステップ 1-2 の値を R_z^T と R_y^λ に対応する式に代入して, ξ_z^T と η_y^λ の値を計算する.

4. ステップ 1-3 の値を S_y と S_z に対応する式に代入して, $\xi_y^T, \xi_y^\lambda, \eta_z^T, \eta_z^\lambda$ の値を計算する.
5. ステップ 1-4 の値を R_g と R_h に対応する式に代入して, ξ_g と η_h の値を計算する.

$E_y = \emptyset$ の場合, 上記の手順は閉路解析やタイセット解析と呼ばれる. また, $E_z = \emptyset$ の場合はカットセット解析と呼ばれる. カットセット解析は本質的には MNA と等価であることが知られている.

混合方程式が DAE になるためには, $D = H - GB^{-1}F$ が行列束になることが必要である. いま $B = A_T[P, Q]$ は行列束なので, D が行列束になることは明らかではない. さらに, ステップ 3-5 において代入操作のみで値を計算するためには, B は対角成分がすべて 1 の上三角行列となる必要がある. これらは, 次の補題により保証される.

補題 3.2 ([14, Lemma 3]). E_y がキャパシタと従属電流源をすべて含み, E_z がインダクタと従属電圧源をすべて含むならば, B は置換操作によって対角成分がすべて 1 の上三角行列に変形可能であり, D は行列束になる.

ステップ 3 以降はすべて代入操作なので, 解くべき DAE は混合方程式 (6) のみになる. よって, 混合解析における数値計算の難しさは, 混合方程式 (6) の指数 $\nu(D)$ によって決まる.

4 混合方程式の指数

本章では, 混合方程式の指数に対する特徴づけを与える. 分割 (E_y, E_z) と基準木 T が与えられたとき行変形 (2) を考える. 各 $k \in R$ と $l \in C$ に対し, k 行 l 列を除いた $A_T(s)$ の余因子 $\det A_T[R \setminus \{k\}, C \setminus \{l\}]$ の次数を d_{kl} と表す. $A_T[R \setminus \{k\}, C \setminus \{l\}]$ から $\tilde{A}_T[R \setminus \{k\}, C \setminus \{l\}]$ への変形を考えると,

$$d_{kl} = \deg \det \tilde{A}_T[R \setminus \{k\}, C \setminus \{l\}], \quad \forall k \in R \setminus P, \forall l \in C$$

が成立する. 行列束 $A_T(s)$ の大きさを n とすると, 混合方程式の指数 $\nu(D)$ は次のように表現できる.

補題 4.1 ([14, Lemma 4]). 与えられた分割 (E_y, E_z) と基準木 T に対し,

$$\nu(D) = \max_{k,l} \{d_{kl} \mid k \in R \setminus P, l \in C \setminus Q\} - \delta_n(A_T) + 1$$

が成り立つ.

補題 4.1 から, 指数 $\nu(D)$ は $k \in R \setminus P$ と $l \in C \setminus Q$ を満たす d_{kl} の最大値によって決まることがわかる. さらに, 指数 $\nu(D)$ は以下の性質を持つ.

定理 4.2 ([14, Theorem 4]). 分割 (E_y, E_z) に対し, 混合方程式の指数 $\nu(D)$ は任意の基準木で同じである.

定理 4.2 は, 混合方程式の指数が分割 (E_y, E_z) のみによって決まることを意味する. 混合解析では与えられた分割 (E_y, E_z) と基準木 T に依存して, 回路方程式の係数行列 $A(s)$ を $A_T(s)$ へ変形しなければならない. しかし, すべての d_{kl} の値がこの変形のもとで不変であるわけではない. そこで, 次数行列を導入する. 次数行列は, 行変形 (2) のもとで不変な d_{kl} の値を保持する行列である. ここで, E_* の電流変数と電圧変数に対応する集合を I_* と V_* とおく.

定義 4.3 (次数行列). 各 $k \in I_* \cup V_*$ と $l \in I_* \cup V_*$ に対し,

$$\theta_{kl} = \deg \det \begin{pmatrix} A[R_I \cup R_V, C \setminus \{l\}] & A[R_I \cup R_V, \{k\}] \\ A[S, C \setminus \{l\}] & 0 \end{pmatrix}$$

と定義する. 次数行列は $\Theta = (\theta_{kl})$ で定義される, 行集合と列集合が $I_* \cup V_*$ の行列である.

回路方程式の係数行列 $A(s)$ は一意ではないが, 次数行列は回路に対して一意に定まる. 行集合 $R_I \cup R_V$ と列集合 $I^r \cup V^\lambda$ が, $A_T[R_I \cup R_V, I^r \cup V^\lambda] = I$ により定まる一対一対応を持つことに注意すると, 次数行列 Θ と余因子の次数 d_{kl} は次のような関係を持つ.

補題 4.4 ([14, Lemma 7]). 分割 (E_y, E_z) と基準木 T が与えられたとき, 任意の $k \in R_I \cup R_V$ と $l \in I_* \cup V_*$ に対し $d_{kl} = \theta_{jl}$ が成立する. ただし, $j \in I^r \cup V^\lambda$ は行 k に対応する列である.

補題 4.4 は, 混合方程式の指数が次数行列 Θ を用いて表現できることを意味する. 実際に指数 $\nu(D)$ は, $k \in I_y \cup V_z$ と $l \in I_z \cup V_y$ を満たす θ_{kl} の最大値を用いて次のように記述できる.

定理 4.5 ([14, Theorem 5]). 行列束 $A(s)$ を回路方程式の係数行列とする. 与えられた分割 (E_y, E_z) に対し,

$$\nu(D) = \max_{k,l} \{\theta_{kl} \mid k \in I_y \cup V_z, l \in I_z \cup V_y\} - \delta_n(A) + 1$$

が成り立つ.

5 混合方程式の指数最小化

回路方程式の係数行列を $A(s)$, 次数行列を $\Theta = (\theta_{kl})$ とおく. 定理 4.5 より, 混合方程式の指数を最小化するためには, $\max\{\theta_{kl} \mid k \in I_y \cup V_z, l \in I_z \cup V_y\}$ を最小化すればよい. 本章では, $\max\{\theta_{kl} \mid k \in I_y \cup V_z, l \in I_z \cup V_y\}$ を最小化する分割 (E_y, E_z) を求めるアルゴリズムを提案する.

定理 5.1 ([14, Theorem 6]). 混合方程式の指数 $\nu(D)$ が $\alpha - \delta_n(A) + 1$ 未満になるためには, $\theta_{kl} \geq \alpha$ を満たす任意の k と l に対して以下の (i)–(iv) が成立することが必要十分である:

- (i) $k = i_e$ と $l = i_f$ に対して $\theta_{kl} \geq \alpha$ ならば, $e \in E_z$ または $f \in E_y$ が成り立つ.
- (ii) $k = i_e$ と $l = v_f$ に対して $\theta_{kl} \geq \alpha$ ならば, $e \in E_z$ または $f \in E_z$ が成り立つ.
- (iii) $k = v_e$ と $l = i_f$ に対して $\theta_{kl} \geq \alpha$ ならば, $e \in E_y$ または $f \in E_y$ が成り立つ.
- (iv) $k = v_e$ と $l = v_f$ に対して $\theta_{kl} \geq \alpha$ ならば, $e \in E_y$ または $f \in E_z$ が成り立つ.

条件 (i)–(iv) を満たす分割 (E_y, E_z) を見つける問題を, 以下のように 2SAT に帰着する. ブール変数 u_e の否定を \bar{u}_e と表す. 各素子 $e \in E_*$ に対し, $u_e = 0$ は $e \in E_y$ を, $u_e = 1$ は $e \in E_z$ を表す. まず (E_y, E_z) が分割の条件を満たすように, 素子 e がキャパシタまたは従属電流源ならば $u_e = 0$ と, e がインダクタまたは従属電圧源ならば $u_e = 1$ とおく. 次に, (i) を $u_e \vee \bar{u}_f = 1$, (ii) を $u_e \vee u_f = 1$, (iii) を $\bar{u}_e \vee \bar{u}_f = 1$, (iv) を $\bar{u}_e \vee u_f = 1$ と書き換える. こうして以下の問題を得る:

2SAT(α) 次の (1)–(6) を満たす実行可能解 u_e を求める.

- (1) e がキャパシタまたは従属電流源ならば, $u_e = 0$ である.
- (2) e がインダクタまたは従属電圧源ならば, $u_e = 1$ である.
- (3) $k = i_e$ と $l = i_f$ に対して $\theta_{kl} \geq \alpha$ ならば, $u_e \vee \bar{u}_f = 1$ である.
- (4) $k = i_e$ と $l = v_f$ に対して $\theta_{kl} \geq \alpha$ ならば, $u_e \vee u_f = 1$ である.
- (5) $k = v_e$ と $l = i_f$ に対して $\theta_{kl} \geq \alpha$ ならば, $\bar{u}_e \vee \bar{u}_f = 1$ である.
- (6) $k = v_e$ と $l = v_f$ に対して $\theta_{kl} \geq \alpha$ ならば, $\bar{u}_e \vee u_f = 1$ である.

2SAT は, 論理変数と節のサイズの線形時間で解けることが知られている [2].

混合方程式の指数を最小化する分割を求めるアルゴリズムは以下のようになる.

混合解析における指数最小化アルゴリズム

ステップ 1: 次数行列 $\Theta = (\theta_{kl})$ を計算する.

ステップ 2: $E_y \leftarrow \{e \mid e: \text{キャパシタまたは従属電流源}\}$, $E_z \leftarrow E_* \setminus E_y$,
 $\alpha \leftarrow \max\{\theta_{kl} \mid k \in I_* \cup V_*, l \in I_* \cup V_*\}$.

ステップ 3: 2SAT(α) を解き, 実行可能解 u_e を求める. 2SAT(α) が実行不可能なら, ステップ 5 へ.

ステップ 4: $E_y \leftarrow \{e \mid u_e = 0\}$, $E_z \leftarrow \{e \mid u_e = 1\}$, $\alpha \leftarrow \alpha - 1$ として, ステップ 3 へ.

ステップ 5: (E_y, E_z) と α を出力する.

混合解析における指数最小化アルゴリズムは, 最適な分割 (E_y, E_z) と, 2SAT(α) が実行不可能である α の最大値を出力する. 定理 5.1 により, この分割 (E_y, E_z) に関する任意の基準木に対して, 混合方程式の指数は $\alpha - \delta_n(A) + 1$ になる. 上のアルゴリズムにおいて, ステップ 4 で α を 1 ずつ減らす代わりに二部探索を利用してもよい.

最後に, 提案するアルゴリズムの計算複雑度について述べる. 回路方程式の係数行列の大きさを n とおく. このとき, 回路中の素子の数は $n/2$ となる. 大きさ γ の正方な行列束の行列式の次数は, $O(\gamma^4)$ 時間で計算できる [13]. このアルゴリズムを n^2 回繰り返すことにより, 次数行列を $O(n^6)$ 時間で求められる. 2SAT(α) は $O(n)$ 個の論理変数と $O(n^2)$ 個の節を持つので, $O(n^2)$ 時間で解くことができる. 以上より, 本アルゴリズムの全体の計算複雑度は $O(n^6)$ となる.

次数行列の計算を高速化できれば, 本アルゴリズムの計算複雑度も高速化できる. [15] において, 著者らは素子のパラメータが代数的独立という仮定のもとで, 次数行列を $O(n^3)$ 時間で計算するアルゴリズムを提案した. この仮定は, $A(s)$ が混合多項式行列 [22] であることを意味する. このようにして, 混合解析における指数最小化アルゴリズムの計算複雑度は $O(n^3)$ に改善できる.

6 数値実験

本章では, 提案するアルゴリズムを図 1 と図 2 の回路に適用する.

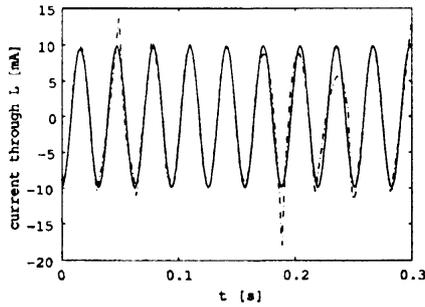


図 3: 例 6.1 のインダクタを流れる電流値: MNA の数値解 (一点破線), 混合解析の数値解 (実線), 解析解 (点線).

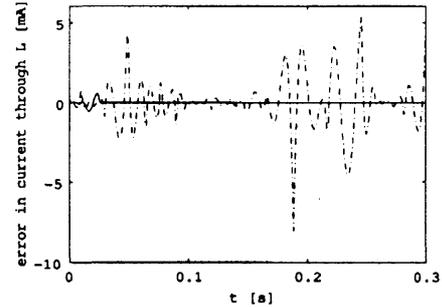


図 4: 例 6.1 のインダクタを流れる電流値の誤差: MNA の誤差 (一点破線), 混合解析の誤差 (実線).

により記述される. この回路に MNA を適用すると指数 2 の DAE を得るが, 混合解析ではより指数の低い DAE を得られる. 混合解析における指数最小化アルゴリズムの流れは以下ようになる. ただし, 素子のパラメータは代数的独立と仮定する.

ステップ 1: 次数行列 Θ は次のようになる:

$$\Theta = \begin{matrix} & \tilde{\xi}_{R_1} & \tilde{\xi}_{R_2} & \tilde{\xi}_{L_1} & \tilde{\xi}_{L_2} & \tilde{\eta}_{R_1} & \tilde{\eta}_{R_2} & \tilde{\eta}_{L_1} & \tilde{\eta}_{L_2} \\ \begin{matrix} \tilde{\xi}_{R_1} \\ \tilde{\xi}_{R_2} \\ \tilde{\xi}_{L_1} \\ \tilde{\xi}_{L_2} \\ \tilde{\eta}_{R_1} \\ \tilde{\eta}_{R_2} \\ \tilde{\eta}_{L_1} \\ \tilde{\eta}_{L_2} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

次数行列の計算には, 混合多項式行列の小行列式の次数を求めるソルバー VIAP [7] を利用した.

ステップ 2: $E_y \leftarrow \emptyset$, $E_z \leftarrow \{R_1, R_2, L_1, L_2\}$, $\alpha \leftarrow 2$ とする.

ステップ 3: 2SAT(2):

$$u_{L_1} = 1, u_{L_2} = 1, (u_{L_1} \vee u_{L_1}) \wedge (u_{L_1} \vee u_{L_2}) \wedge (u_{L_2} \vee u_{L_1}) \wedge (u_{L_2} \vee u_{L_2}) = 1$$

の解として $u_{R_1} = 0$, $u_{R_2} = 0$, $u_{L_1} = 1$, $u_{L_2} = 1$ が存在するので, 2SAT(2) は実行可能である.

ステップ 4: $E_y \leftarrow \{R_1, R_2\}$, $E_z \leftarrow \{L_1, L_2\}$, $\alpha \leftarrow 1$ とする.

ステップ 3: 2SAT(1) を解く. $u_{L_1} = 1$ と $u_{L_2} = 1$ を代入すると, 2SAT(1) は次のように書ける:

$$u_{L_1} = 1, u_{L_2} = 1, (u_{R_1} \vee \bar{u}_{R_1}) \wedge (u_{R_1} \vee u_{R_1}) \wedge (u_{R_2} \vee \bar{u}_{R_2}) \wedge (u_{R_2} \vee u_{R_2}) = 1.$$

解として $u_{R_1} = 1$, $u_{R_2} = 1$, $u_{L_1} = 1$, $u_{L_2} = 1$ が存在するので, 2SAT(1) は実行可能である.

ステップ4: $E_y \leftarrow \emptyset, E_z \leftarrow \{R_1, R_2, L_1, L_2\}, \alpha \leftarrow 0$ とする.

ステップ3: 2SAT(0) は実行不可能である.

ステップ5: $(E_y, E_z) = (\emptyset, \{R_1, R_2, L_1, L_2\})$ と $\alpha = 0$ を出力する.

このアルゴリズムは分割 $(E_y, E_z) = (\emptyset, \{R_1, R_2, L_1, L_2\})$ と $\alpha = 0$ を出力する. いま $\deg \det A = 1$ なので, 得られる混合方程式の指数は0になる. 実際, 分割 $(E_y, E_z) = (\emptyset, \{R_1, R_2, L_1, L_2\})$ と基準木 $T = \{V, R_1, R_2, L_1\}$ に関する混合方程式は

$$(R_1 + R_2 + sL_1 + sL_2 + 2sM)\tilde{\xi}_{L_2} = -\tilde{V}(s)$$

となり, 常微分方程式であることが確認できる.

7 おわりに

本稿では, 線形時不変回路を対象として, 混合方程式の指数を最小化する組合せ的アルゴリズムを提案した. また, 指数を減らすと誤差が小さくなることを数値実験により確認した.

最後に, 混合方程式の指数に関して最近得られた他の結果を紹介する. 線形時不変回路において混合解析を適用した結果, MNA を適用した場合より指数が大きくなるということが明らかになった [25]. これは, 数値計算の観点からみた混合解析の MNA に対する優位性を示唆している. さらに, RLC 回路に限定した場合, 混合方程式の指数が常に1以下であることが証明され, 指数が0となる回路の構造的特徴付けが与えられた [25]. これらの結果は非線形時変回路に拡張されたが [16], 従属電源を含む回路の指数は2以上になることがある. 従属電源を含む一般の非線形時変回路への本アルゴリズムの拡張は今後の課題である.

参考文献

- [1] Amari, S.: Topological foundations of Kron's tearing of electric networks. RAAG Memoirs **3**, F-VI, 322-350 (1962).
- [2] Aspvall, B., Plass, M. F., Tarjan, R. E.: A linear-time algorithm for testing the truth of certain qualified Boolean formulas. Information Processing Letters **8**, 121-123 (1979).
- [3] Branin, F. H.: The relation between Kron's method and the classical methods of network analysis. The Matrix and Tensor Quarterly **12**, 69-115 (1962).
- [4] Brenan, K. E., Campbell, S. L., Petzold, L. R.: Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations, SIAM, Philadelphia, 2nd edition (1996).
- [5] Bujakiewicz, P.: Maximum Weighted Matching for High Index Differential Algebraic Equations. Doctor's dissertation, Delft University of Technology (1994).
- [6] Campbell, S. L., Gear, C. W.: The index of general nonlinear DAEs. Numerische Mathematik **72**, 173-196 (1995).
- [7] Emoto, K., Matsuoka, Y.: VIAP: Degree of subdeterminant of mixed polynomial matrix. <http://www.sr3.t.u-tokyo.ac.jp/research/CCF/ccf.html> (2004).

- [8] Gear, C. W.: Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations. *IEEE Transactions on Circuit Theory* **18**, 89–95 (1971).
- [9] Günther, M., Rentrop, P.: The differential-algebraic index concept in electric circuit simulation. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **76**(supplement 1), 91–94 (1996).
- [10] Hairer, E., Wanner, G.: *Solving Ordinary Differential Equations II*, Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition (1996).
- [11] Iri, M.: A min-max theorem for the ranks and term-ranks of a class of matrices: An algebraic approach to the problem of the topological degrees of freedom of a network (in Japanese). *Transactions of the Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan* **51A**, 180–187 (1968).
- [12] Iri, M.: Applications of Matroid Theory. *Mathematical Programming — The State of the Art*. pp. 158–201. Springer-Verlag, Berlin (1983).
- [13] Iwata, S.: Computing the maximum degree of minors in matrix pencils via combinatorial relaxation. *Algorithmica* **36**, 331–341 (2003).
- [14] Iwata, S., Takamatsu, M.: Index minimization of differential-algebraic equations in hybrid analysis for circuit simulation. *Mathematical Programming* (2008, in press).
- [15] Iwata, S., Takamatsu, M.: Computing the degrees of all cofactors in mixed polynomial matrices. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* (2008, in press).
- [16] Iwata S., Takamatsu M., Tischendorf C.: Hybrid analysis of nonlinear time-varying circuits providing DAEs with at most index 1. Abstracts of the 7th International Conference on Scientific Computing in Electrical Engineering, 143–144 (2008).
- [17] Kishi, G., Kajitani, Y.: Maximally distinct trees in a linear graph (in Japanese). *Transactions of the Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan* **51A**, 196–203 (1968).
- [18] Kron, G.: *Tensor Analysis of Networks*, John Wiley and Sons, New York (1939).
- [19] Kunkel P., Mehrmann, V.: *Differential-algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution*, European Mathematical Society, Zürich (2006).
- [20] März R.: A matrix chain for analyzing differential-algebraic equations. Preprint 162, Humboldt-Universität, Berlin (1987).
- [21] März R.: Numerical methods for differential-algebraic equations. *Acta Numerica* **1**, 141–198 (1992).
- [22] Murota, K.: *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, Springer-Verlag, Berlin (2000).
- [23] Ohtsuki, T., Ishizaki, Y., Watanabe, H.: Network analysis and topological degrees of freedom (in Japanese). *Transactions of the Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan* **51A**, 238–245 (1968).
- [24] Schwarz, D. E., Tischendorf, C.: Structural analysis of electric circuits and consequences for MNA. *International Journal of Circuit Theory and Applications* **28**, 131–162 (2000).
- [25] Takamatsu, M., Iwata, S.: Index characterization of differential-algebraic equations in hybrid analysis for circuit simulation. *International Journal of Circuit Theory and Applications* (2008, in press).