数理解析研究所講究録
第 1630 巻 2009 年 41-49

バナッハ空間における新しい近接点法

(A new proximal point algorithm in a Banach space)

茨木貴徳 (Takanori Ibaraki)
名古屋大学情報連携統括本部
(Information and Communications Headquarters, Nagoya University)
髙橋渉 (Wataru Takahashi)
東京工業大学大学院情報理工学研究科
(Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology)

1 はじめに

H を実ヒルベルト空間とし, $f : H \to (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とする. このとき

$$f(u) = \min_{x \in H} f(x)$$

を満たす元 u を求める問題を, 凸最小化問題 (convex minimization problem) という. ここで, $x \in H$ に対して

$$\partial f(x) = \{z \in H : f(y) \geq \langle y - x, z\rangle + f(x),\ \forall y \in H\}$$

を対応させる H から H の多価写像 ∂f を f の劣微分 (subdifferential) という. このとき, ∂f は極大単調作用素になることが知られている. また, $f(u) = \min_{x\in H} f(x)$ であることと, $0 \in \partial f(u)$ であることは同値であることも知られている. このことから凸最小化問題は, 極大単調作用素 $T \subset H \times H$ に対して

$$0 \in Tu \tag{1.1}$$

を満たす元 u を求める問題に帰着することができる. このような元 u を T の零元 (zero point) という. また, この問題は凸最小化問題だけでなく, 変分不等式問題, ミニマックス問題等の多くの非線形問題を一般化した問題でもある. この極大単調作用素の零元を求める問題 (1.1) を解く代表的な手法に近接点法 (proximal point algorithm) がある: 初期点を $x_1 \in H$ とし

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.2}$$

で点列を構成する. ただし, $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ であり, 任意の $r > 0$ に対して $J_r = (I + rT)^{-1}$ である. このような J_r は T のリゾルベント (resolvent) と呼ばれる. この近接点法は 1970 年に Martinet [15] により導入され, 1976 年に Rockafellar [22] により, $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ かつ $T^{-1}0 \neq \emptyset$ ならば (1.2) で定義された点列 $\{x_n\}$ は $T^{-1}0$ の元へ弱収束することが示された. この研究以降, ヒルベルト空間の近接点法はさまざまな形で行われてきた.

2000 年に上村-髙橋 [10] は次の 2 つの点列構成法を導入した: 初期点を $x_1 \in H$ とし

$$x_{n+1} = \alpha_n x_1 + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1.3}$$

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.4}$$

で点列を構成する. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ である. 彼らは (1.3) によって構成された点列が T の零元へ強収束し, (1.4) によって構成された点列が T の零元へ弱収束することを示した. 上村-高橋 [10] とは別に, 2000 年に Solodov-Svaiter [23] は次の点列構成法を導入した: 初期点を $x_1 \in H$ とし

$$\begin{cases} y_n = J_{r_n} x_n, \\ C_n = \{z \in H : \langle y_n - z, x_n - y_n \rangle \geq 0\}, \\ D_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_1 - x_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n} x_1, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{1.5}$$

で点列を構成する. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$, $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ であり, $P_{C_n \cap D_n}$ は H から $C_n \cap D_n$ の上への距離射影 (metric projection) である. 彼らは (1.5) によって構成された点列が T の零元へ強収束することを示した.

一方, 高橋-竹内-久保田 [26] は Solodov-Svaiter [23] にヒントを得て, ヒルベルト空間上の非拡大写像 (nonexpansive mapping) の不動点 (fixed point) を求める新しい不動点近似法を導入した: C を H の空でない閉凸集合とし, S を C から C への非拡大写像とする. このとき, 初期条件を $x_1 \in H, C_1 = C$ とし

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) S x_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_1, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{1.6}$$

で点列を構成する. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ であり, $P_{C_{n+1}}$ は H から C_{n+1} の上への距離射影 (metric projection) である. 彼らは (1.6) で構成された点列が S の不動点へ強収束することを示した.

ヒルベルト空間のリゾルベントをバナッハ空間で論じる場合, 3 つのリゾルベントが知られている. ヒルベルト空間での極大単調作用素をバナッハ空間で論じる場合, 極大単調作用素と m-増大作用素に分かれる. E を回帰的で滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, その共役空間を E^* とする. $T \subset E \times E^*$ を極大単調作用素, $A \subset E \times E$ を m-増大作用素とする. このとき, $x \in E$ と $r > 0$ に対して, 3 つのリゾルベントは以下で定義される.

$$\begin{aligned} P_r x &= \{z \in E : 0 \in J(z - x) + rTz\}, \\ Q_r x &= \{z \in E : 0 \in (z - x) + rAz\}, \\ \Pi_r x &= \{z \in E : 0 \in (Jz - Jx) + rTz\}. \end{aligned}$$

ただし, J は E の双対写像 (duality mapping) である. この 3 つのリゾルベントに関しては, これまで多くの研究者によって研究がなされてきた. 筆者らは近年の研究 [5] において, これらとは異なるバナッハ空間での第 4 のリゾルベントとなる準リゾルベント (generalized resolvent) の概念を導入した. $B \subset E^* \times E$ を極大単調作用素としたとき, $x \in E$ と $r > 0$ に対して

$$R_r x = \{z \in E : 0 \in (z - x) + rBJz\}$$

で定義された R_r を準リゾルベントと呼ぶこととする. ただし, J は E の双対写像である.

本論文では, 準リゾルベントの概念を用いた近接点法をバナッハ空間で議論する. 第 3 節では, 準リゾルベントを導入し, その性質を考察する. 第 4 節では 準リゾルベントを用いて, 上村-高橋 [10], Solodov-Svaiter [23] らによる 3 つの近接点法と高橋-竹内-久保田 [26] による不動点近似法を利用した近接点法をバナッハ空間で議論する. 最後に第 5 節では, 第 4 節の結果を利用して凸最小化問題の解への点列近似法を議論する.

2 準備

E を実バナッハ空間とし, E^* をその共役空間とする. E が狭義凸 (strictly convex) であるとは, $\|x\| = \|y\| = 1$ となる E の元 x, y $(x \neq y)$ に対して, つねに $\|x + y\| < 2$ が成り立つことである. 同様に, 一様凸

(uniformly convex) であるとは, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ となる E の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して, つねに $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ となることである.

バナッハ空間 E の元 x に対して, E^* の部分集合

$$Jx := \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる写像 J のことを, E の双対写像 (duality mapping) と呼ぶ.

この双対写像 J は E のノルムの微分可能性とも大いに関わりをもつ. いま $S(E) := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき, $x, y \in S(E)$ に対して, 次の極限を考える.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}. \tag{2.1}$$

バナッハ空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能 (Gâteaux differentiable) であるとは, $S(E)$ の元 x, y に対して, つねに (2.1) が存在するときをいう. このとき, 空間 E は滑らか (smooth) であるともいう. 任意の $y \in S(E)$ に対して, (2.1) が $x \in S(E)$ に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能 (uniformly Gâteaux differentiable) であるという. 任意の $x \in S(E)$ に対して, (2.1) が $y \in S(E)$ に関して一様に収束するとき, E のノルムが Fréchet 微分可能 (Fréchet differentiable) であるという. (2.1) が $S(E)$ の元 x, y に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Fréchet 微分可能 (uniformly Fréchet differentiable) であるという. このとき, 空間 E は一様に滑らか (uniformly smooth) であるともいう.

多価写像 $T \subset E \times E^*$ に対して, T の定義域と T の値域は

$$D(T) = \{x \in E : Tx \neq \emptyset\}, \ R(T) = \cup\{Tx : x \in D(T)\}$$

で定義される. 多価写像 $T \subset E \times E^*$ が単調作用素 (monotone operator) であるとは, 任意の $(x, x^*), (y, y^*) \in T$ に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

がつねに成り立つことと定義する. 多価写像 T が狭義単調作用素 (strictly monotone operator) であるとは, 任意の $(x, x^*), (y, y^*) \in T (x \neq y)$ に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle > 0$$

がつねに成り立つことと定義する. また, 単調作用素 T が極大 (maximal) であるとは, T を真に含む単調作用素 $S \subset E \times E^*$ が存在しないときいう. すなわち, $S \subset E \times E^*$ が単調作用素で, かつ $T \subset S$ であるならば, $T = S$ となるときをいう. T が極大単調作用素ならば, $T^{-1}0 = \{u \in E : 0 \in Tu\}$ は閉凸集合となる. E が回帰的で狭義凸ならば, 単調作用素 T が極大になる必要十分条件は, 任意の $\lambda > 0$ に対して, $R(J + \lambda T) = E^*$ となることである ([2, 25] を参照).

バナッハ空間 E での双対写像 J とノルムの微分可能性に関しては次の性質が知られている ([24, 25] を参照).

1. $x \in E$ に対して, Jx は空でない有界な閉凸集合である;
2. J は単調作用素である;
3. E が狭義凸であるための必要十分条件は, J が 1 対 1 となることである.
   すなわち, $x \neq y \ \Rightarrow \ Jx \cap Jy = \emptyset$;
4. E が狭義凸であるための必要十分条件は J が狭義単調作用素となることである;
5. E が回帰的で滑らかで狭義凸なバナッハ空間なら, E^* の双対写像 J_* は J の逆像となる.
   すなわち, $J_* = J^{-1}$ である;
6. E が回帰的であるための必要十分条件は, J が全射となることである;
7. E が滑らかであるための必要十分条件は, J が一価になることである.

3 サニー準非拡大射影と準リゾルベント

E を滑らかなバナッハ空間とし, J を E から E^* への双対写像とする. このとき, E の元 x, y に対して

$$V(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2$$

で $E \times E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を定義する. この関数 V に関しては次のような性質が知られている ([1,12,16] を参照).

1. $x, y \in E$ に対して, $(\|x\| - \|y\|)^2 \leq V(x,y) \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ である;
2. $x, y, z \in E$ に対して, $V(x,y) = V(x,z) + V(z,y) + 2\langle x - z, Jz - Jy\rangle$ である;
3. E が狭義凸ならば, $x, y \in E$ に対して $V(x,y) = 0$ であるための必要十分条件は $x = y$ である.

C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, C から C への写像 R が準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping) であるとは, $F(R)$ が空集合でなく, かつ任意の $x \in C$ と $p \in F(R)$ に対して

$$V(Rx, p) \leq V(x, p)$$

がつねに成り立つことと定義する ([4,5] を参照). ただし, $F(R)$ は写像 R の不動点 (fixed point) の全体集合である.

E をバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき, E から D への写像 R がサニー (sunny) であるとは, 任意の $x \in E$ と $t \geq 0$ に対して

$$R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$$

が成り立つことである. 同様に, E から D の上への写像 R が射影 (retraction) であるとは, 任意の D の元 x に対して, $Rx = x$ が成り立つことである. これらの写像に関して次の補助定理が知られている.

補助定理 3.1 ([4,5]). E を滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. また R を E から D の上への射影とする. このとき, R がサニーかつ準非拡大写像になる必要十分条件は, 任意の $x \in E$ と $p \in D$ に対して

$$\langle x - Rx, JRx - Jp\rangle \geq 0$$

となることである. ただし, J は E から E^* への双対写像である.

E が滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, D を空でない集合とする. このとき, E から D の上へのサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) は一意に決まる. そこで, 滑らかで狭義凸なバナッハ空間の場合に, E から D の上へのサニー準非拡大射影を R_D で表すことにする. D を E の空でない集合とする. このとき, D が E のサニー準非拡大レトラクト (sunny generalized nonexpansive retract) であるとは, E から D の上へのサニー準非拡大射影が存在するときと定義する. サニー準非拡大射影の不動点集合はもちろん D である ([4,5] を参照).

E を回帰的で滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, その共役空間を E^* とする. このとき, 単調作用素 $B \subset E^* \times E$ が極大ならば, 任意の $r > 0$ に対して, $E = R(I + rBJ)$ である ([5] の命題 4.1 を参照). ここで, 任意の $r > 0$ と $x \in E$ に対して

$$R_r x = \{z \in E : x \in z + rBJz\}$$

とすると, $R_r x$ は一価となる. このとき, R_r は $(I + rBJ)^{-1}$ で記述される. このような R_r を B の準リゾルベントを呼ぶこととする ([5,8] を参照).

サニー準非拡大射影, サニー準非拡大レトラクト及び準リゾルベントに関しては次の性質が知られている.

定理 3.2 ([14]). E を滑らかで, 回帰的な狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき, 次の条件は同値になる.

1. D はサニー準非拡大レトラクトである;
2. JD は閉凸集合である.

このとき, D は閉集合になる.

補助定理 3.3 ([5,7]). E が回帰的で滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, $B \subset E^* \times E$ を $B^{-1}0 \neq \emptyset$ を満たす極大単調作用素とする. $r > 0$ に対して, $R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする. このとき, 次の性質が成立する.

1. $r > 0$ に対して, $D(R_r) = E$;
2. $r > 0$ に対して, $(BJ)^{-1}0 = F(R_r)$;
3. $(BJ)^{-1}0$ は閉集合;
4. $r > 0$ に対して, $R_r : E \to E$ は準非拡大写像;
5. $r > 0$ と $x \in E$ に対して, $\frac{1}{r}(x - R_r x) \in BJR_r x$.

定理 3.4 ([5,14]). E を回帰的で滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, $B \subset E^* \times E$ を $B^{-1}0 \neq \emptyset$ を満たす極大単調作用素とする. このとき, $(BJ)^{-1}0$ はサニー準非拡大レトラクトになる.

定理 3.5 ([5,8]). E が滑らかで一様凸なバナッハ空間とし, $B \subset E^* \times E$ を $B^{-1}0 \neq \emptyset$ を満たす極大単調作用素とする. $r > 0$ に対して, $R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする. このとき, 任意の $x \in E$ に対して

$$\lim_{r \to \infty} R_r x = R_{(BJ)^{-1}0} x$$

が成立する. ただし, $R_{(BJ)^{-1}0}$ は E から $(BJ)^{-1}0$ の上へのサニー準非拡大射影である.

4 近接点法

本節では, 準リゾルベントを用いた4つのタイプの近接点法をバナッハ空間で議論する. 2007年に筆者ら [6] は (1.3) と (1.4) の2つの点列の構成法を用いて, 上村-高橋 [10] の結果を拡張した強収束定理と弱収束定理を得た.

定理 4.1 ([6]). E を一様凸で一様に滑らかなバナッハ空間とし, $B \subset E^* \times E$ を極大単調作用素とする. $r > 0$ に対して, $R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする. $x_1 \in E$ とし

$$x_{n+1} = \alpha_n x_1 + (1 - \alpha_n) R_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \ \lim_{n \to \infty} r_n = \infty$$

を満たすとする. このとき $B^{-1}0 \neq \emptyset$ であれば, 点列 $\{x_n\}$ は $R_{(BJ)^{-1}0} x$ に強収束する. ここで, $R_{(BJ)^{-1}0}$ は E から $(BJ)^{-1}0$ の上へのサニー準非拡大射影である.

定理 4.2 ([6]). E を一様凸で滑らかなバナッハ空間とし, その双対写像 J が弱点列的連続 (*weakly sequentially continuous*) であるとする. $B \subset E^* \times E$ を極大単調作用素とし, $r > 0$ に対して, $R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする. $x_1 \in E$ とし

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) R_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \ \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする. このとき $B^{-1}0 \neq \emptyset$ であれば, 点列 $\{x_n\}$ は $(BJ)^{-1}0$ の元に弱収束する.

高阪-高橋 [14] は準リゾルベントを用いて, (1.5) による点列構成法で, Solodov-Svaiter [23] の結果を拡張する次の強収束定理を得た.

定理 4.3 ([14]). E を一様 *Gâteaux* 微分可能なノルムを持つ一様凸バナッハ空間とし, $B \subset E^* \times E$ を極大単調作用素とする. $r > 0$ に対して, $R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする. このとき, $x_1 \in E$ とし

$$\begin{cases} y_n = R_{r_n} x_n, \\ C_n = \{z \in E : \langle x_n - y_n, Jy_n - Jz \rangle \geq 0\}, \\ D_n = \{z \in E : \langle x_1 - x_n, Jx_n - Jz \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = R_{C_n \cap D_n} x, \ n = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{4.1}$$

とする. ただし, $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすとする. このとき $B^{-1}0 \neq \emptyset$ であれば, 点列 $\{x_n\}$ は $R_{(BJ)^{-1}0}x$ に強収束する. ここで, $R_{(BJ)^{-1}0}$ は E から $(BJ)^{-1}0$ の上へのサニー準非拡大射影である.

さらに, 2008 年に筆者ら [7] は 高橋-竹内-久保田 [26] による不動点を求める点列構成法 (1.6) を利用して極大単調作用素の零元を求める次の強収束定理を得た.

定理 4.4 ([7]). E を一様 *Gâteaux* 微分可能なノルムを持つ一様凸バナッハ空間とし, $B \subset E^* \times E$ を極大単調作用素とする. $r > 0$ に対して, $R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする. このとき, $x_1 \in E$, $C_1 = E$ とし

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) R_{r_n} x_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : V(y_n, z) \leq V(x_n, z)\}, \\ x_{n+1} = R_{C_{n+1}} x, \ n = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{4.2}$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1)$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \ \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする. このとき $B^{-1}0 \neq \emptyset$ であれば, 点列 $\{x_n\}$ は $R_{(BJ)^{-1}0}x$ に強収束する. ここで, $R_{(BJ)^{-1}0}$ は E から $(BJ)^{-1}0$ の上へのサニー準非拡大射影である.

5 凸最小化問題

本節では, 第 4 節で議論した結果を用いて凸最小化問題の解への点列近似法を議論する.

E を回帰的で滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, E^* をその共役空間とする. $f^* : E^* \to (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数としたとき, f^* の劣微分は

$$\partial f^*(x^*) = \{z \in E : f^*(y^*) \geq \langle y^* - x^*, z \rangle + f^*(x^*), \ \forall y^* \in E^*\}$$

で定義される. このとき, 劣微分 $\partial f^* \subset E^* \times E$ は極大単調作用素であり, $f^*(u^*) = \min_{x^* \in E^*} f^*(x^*)$ であることと, $0 \in \partial f^*(u^*)$ であることは同値であることも分かる. また, 劣微分 ∂f^* の準リゾルベント R_r は, $x \in E$ と $r > 0$ に対して

$$R_r x = (I + r\partial f^* J)^{-1} x = J^{-1}\left(\operatorname*{argmin}_{y^* \in E^*}\left\{f^*(y^*) + \frac{1}{2r}\|y^*\|^2 - \frac{1}{r}\langle x, y^*\rangle\right\}\right) \tag{5.1}$$

となる. この式 (5.1) と定理 4.1, 4.2, 4.3 及び 4.4 の直接的な結果から, 凸最小化問題を解く次の 4 つの収束定理を得ることができる ([6,7] を参照).

系 5.1 ([6]). E を一様凸で一様に滑らかなバナッハ空間とし, $f^* : E^* \to (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とする. このとき, $x_1 \in E$ とし

$$\begin{cases} y_n^* = \operatorname*{argmin}_{y^* \in E^*}\left\{f^*(y^*) + \dfrac{1}{2r_n}\|y^*\|^2 - \dfrac{1}{r_n}\langle x_n, y^*\rangle\right\}, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_1 + (1-\alpha_n) J^{-1} y_n^*, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \ \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする. このとき $(\partial f^*)^{-1}0 \neq \emptyset$ であれば, 点列 $\{x_n\}$ は $R_{(\partial f^* J)^{-1}0} x$ に強収束する. ここで, $R_{(\partial f^* J)^{-1}0}$ は E から $(\partial f^* J)^{-1}0$ の上へのサニー準非拡大射影である.

系 5.2 ([6]). E を一様凸で滑らかなバナッハ空間とし, その双対写像 J が弱点列的連続 (*weakly sequentially continuous*) であるとする. $f^* : E^* \to (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とする. このとき, $x_1 \in E$ とし

$$\begin{cases} y_n^* = \operatorname*{argmin}_{y^* \in E^*}\left\{f^*(y^*) + \dfrac{1}{2r_n}\|y^*\|^2 - \dfrac{1}{r_n}\langle x_n, y^*\rangle\right\}, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J^{-1} y_n^*, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \ \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする. このとき $(\partial f^*)^{-1}0 \neq \emptyset$ であれば, 点列 $\{x_n\}$ は $(\partial f^* J)^{-1}0$ の元に弱収束する.

系 5.3 ([14]). E を一様 *Gâteaux* 微分可能なノルムを持つ一様凸バナッハ空間とし, $f^* : E^* \to (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とする. このとき, $x_1 \in E$ とし

$$\begin{cases} y_n^* = \operatorname*{argmin}_{y^* \in E^*}\left\{f^*(y^*) + \dfrac{1}{2r_n}\|y^*\|^2 - \dfrac{1}{r_n}\langle x_n, y^*\rangle\right\}, \\ y_n = J^{-1} y_n^*, \\ C_n = \{z \in E : \langle x_n - y_n, J y_n - J z\rangle \geq 0\}, \\ D_n = \{z \in E : \langle x_1 - x_n, J x_n - J z\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = R_{C_n \cap D_n} x, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

とする. ただし, $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすとする. このとき $(\partial f^*)^{-1}0 \neq \emptyset$ であれば, 点列 $\{x_n\}$ は $R_{(\partial f^* J)^{-1}0} x$ に強収束する. ここで, $R_{(\partial f^* J)^{-1}0}$ は E から $(\partial f^* J)^{-1}0$ の上へのサニー準非拡大射影である.

系 5.4 ([7]). E を一様 *Gâteaux* 微分可能なノルムを持つ一様凸バナッハ空間とし, $f^* : E^* \to (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とする. このとき, $x_1 \in E$, $C_1 = E$ とし

$$\begin{cases} y_n^* = \underset{y^* \in E^*}{\operatorname{argmin}} \left\{ f^*(y^*) + \dfrac{1}{2r_n}\|y^*\|^2 - \dfrac{1}{r_n}\langle x_n, y^* \rangle \right\}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J^{-1} y_n^*, \\ C_{n+1} = \{ z \in C_n : V(y_n, z) \leq V(x_n, z) \}, \\ x_{n+1} = R_{C_{n+1}} x, \ n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \ \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする. このとき $(\partial f^*)^{-1}0 \neq \emptyset$ であれば, 点列 $\{x_n\}$ は $R_{(\partial f^* J)^{-1}0} x$ に強収束する. ここで, $R_{(\partial f^* J)^{-1}0}$ は E から $(\partial f^* J)^{-1}0$ の上へのサニー準非拡大射影である.

参考文献

[1] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.

[2] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems* Kluwer Academic Publishers, Dordecht, 1990.

[3] O. Güler, *On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization*, SIAM J. Control Optim. **29** (1991), 403–419.

[4] 茨木貴徳・高橋渉, 「バナッハ空間における新しい射影に関する収束定理」京都大学数理解析研究所講究録 **1484** (2006), 150–160.

[5] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.

[6] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for new resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, Adv. Math. Econ. **10** (2007), 51–64.

[7] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Strong convergence theorem by a hybrid method for generalized resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **9** (2008), 71–81.

[8] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retracts and convergence theorem for generalized resolvents in a Banach space*, Proceedings of the 8th International Conference on Fixed Point theory and its Applications, Yokohama Publishers, 2008, 83–93.

[9] S. Kamimura, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Weak and strong convergence Theorems for maximal monotone operators in a Banach space*, Set-Valued Analysis, **12** (2004), 417–429.

[10] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.

[11] S. Kamimura and W. Takahashi, *Iterative schemes for approximating solutions of accretive operators in Banach spaces*, Sci. Math. **3** (2000), 107–115.

[12] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[13] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. **2004** (2004), 239–249.

[14] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 197–209.

[15] B. Martinet, *Régularsation d'inéquations variationnells par approximations successives* (in French), Rev. Francaise Informat. Recherche Opérationnelles **4** (1970), 154–158.

[16] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[17] S. Ohsawa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. **81** (2003), 439–445.

[18] R. T. Rockafellar, *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pacific J. Math. **17** (1966), 497–510.

[19] R. T. Rockafellar, *Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions*, Duke Math. **33** (1966), 81–89.

[20] R. T. Rockafellar, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pacific J. Math. **33** (1970), 209–216.

[21] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75–88.

[22] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and proximal point algorithm*, SIAM J. Control. Optim. **14** (1976), 877–898.

[23] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Program. Ser. A. **87** (2000), 189–202.

[24] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis - Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.

[25] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[26] W. Takahashi, Y Takeuchi and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.