

## 線形拡張子を用いた反射的バナッハ空間の特徴づけ

Department of Functional Analysis, Ya.Pidstryhach Institute for Applied  
Problems of Mechanics and Mathematics, Ukraine  
Iryna BANAKH,

Instytut Matematyki, Akademia Świętokrzyska, Kielce, Poland, and  
Department of Mathematics, Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine  
Taras BANAKH,

and

高崎経済大学・経済学部  
(Faculty of Economics, Takasaki City University of Economics)  
山崎 薫里 (Kaori YAMAZAKI)

本稿は、論文 [BBY] における主定理の要約と解説である。  
 $X$  を位相空間、 $Y$  を局所凸線形位相空間とする。  $C(X, Y)$  を  $X$  から  $Y$  への  
連続関数全体、  $C_\infty(X, Y)$  を  $X$  から  $Y$  への有界連続関数全体とする。ここで、  
関数  $f: X \rightarrow Y$  が 有界 であるとは、  $f$  による  $X$  の像  $f(X)$  が有界集合であ  
る (すなわち、  $Y$  の原点の近傍  $U$  に対し、実数  $r$  を  $f(X) \subset rU$  となるように  
とれる) ことである。

$$C(X) := C(X, \mathbb{R}), \quad C_\infty(X) := C_\infty(X, \mathbb{R})$$

と決める。

$X$  を位相空間、  $A$  をその部分空間、  $Y$  を線形位相空間とする。写像  $u: C(A, Y) \rightarrow C(X, Y)$  が 拡張子 (an extender) であるとは、任意の  $f \in C(A, Y)$  について  $u(f)|_A = f$  となることをいう。拡張子  $u: C(A, Y) \rightarrow C(X, Y)$  は、任意の  $f \in C(A, Y)$  に対して  $u(f)(X) \subset \text{conv}f(A)$  となるとき、凸拡張子 (a conv-extender) であると呼ばれる。ここで、  $\text{conv}f(A)$  は  $f(A)$  の凸包を表す。また、任意の  $f \in C(A, Y)$  に対して  $u(f)(X) \subset \overline{\text{conv}f(A)}$  となるとき、  $u$  は 閉凸拡張子 (a conv-extender) であると呼ばれる。ここで、  $\overline{\text{conv}f(A)}$  は  $f(A)$  の閉凸包を表す。あきらかに、凸拡張子は閉凸拡張子である。線形閉凸拡張子は、Heath-Lutzer [HL] では ‘a simultaneous extender’, Gruenhagen-服部-大田 [GHO] では ‘ $L_{cch}$ -extender’ と呼ばれていたものである。

**定理 1** (Dugundji の拡張定理, 1951 [Dug]).  $X$  を距離空間、  $A$  を  $X$  の閉集合、  $Y$  を局所凸線形位相空間とする。このとき、線形凸拡張子  $u: C(A, Y) \rightarrow C(X, Y)$  が存在する。

Dugundji の拡張定理において、距離空間  $X$  をどの程度まで一般化できるか、また、他の空間で成立させることができるのかという問題は古くから研究されてきた。特に、GO 空間  $X$  に関する研究は、1970 年代に Heath-Lutzer [HL] や van Douwen [vD<sub>1</sub>] [vD<sub>2</sub>] などにより、また、1990 年代に Stares-Vaughan [SV] や Gruenhage-服部-大田 [GHO] などによりなされてきた。

ここで、 $X$  が GO 空間 (a generalized ordered space) であるとは、 $X$  は線形順序集合  $(X, \leq)$  と集合として一致し、 $X$  の位相は  $\leq$  による順序位相より細かく、凸集合よりなる基をもつときをいう ([Lu]).

本稿で用いられる位相空間  $X_A$  の定義を紹介する。 $X$  を位相空間、 $A$  を  $X$  の部分集合とする。 $X_A$  は、集合として  $X$  と一致し、位相は

$$\{U \cup V : U \text{ は } X \text{ の開集合, } V \subset X \setminus A\}$$

で与えられる位相空間をいう ([Eng]).  $X = \mathbb{R}$  (実数直線)、 $A = \mathbb{Q}$  (有理数全体の集合) として構成された Michael 直線  $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$  はよく知られた GO 空間の例である。

本研究の動機付けとなるのは、次の定理 2, 3, 4 および問題 5 である。

**定理 2 (Heath-Lutzer, 1974 [HL]).** Michael 直線  $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$  とその閉集合  $\mathbb{Q}$  は、線形閉凸拡張子  $u : C(\mathbb{Q}) \rightarrow C(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}})$  をもたない。

**定理 3 (van Douwen, 1975 [vD<sub>1</sub>]).** Michael 直線  $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$  とその閉集合  $\mathbb{Q}$  は、線形凸拡張子  $u : C_{\infty}(\mathbb{Q}) \rightarrow C_{\infty}(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}})$  をもたない。

**定理 4 (Heath-Lutzer, 1974 [HL]).** 任意の GO 空間  $X$  と、その閉集合  $A$  に対して、線形閉凸拡張子  $u : C_{\infty}(A) \rightarrow C_{\infty}(X)$  が存在する。

定理 2 および 3 は、定理 4 における拡張子の‘有界性’と凸値の‘閉性’が本質的であることを示している。一方、定理 4 を Dugundji の拡張定理 (定理 1) と対比したとき、局所凸線形位相空間を値にとるように一般化できるか否かを考えることは自然な問題である。実際、Heath-Lutzer はこのことを以下のよう  
に問題提起した。

**問題 5 (Heath-Lutzer, 1974 [HL]).** 局所凸線形位相空間を値にとる関数について、定理 4 と同様な結果が成り立つか？

論文 [BBY] では、この問題に対する幾つかの肯定解と否定解を与えている。本稿では、論文 [BBY] の主定理にあたる‘ノルム空間の範疇においては反射的であることがこの拡張子の存在と同値である’という問題 5 への解を紹介する。

局所凸線形位相空間  $Y$  は、その任意の有界閉凸集合が弱コンパクトであるときに、半反射的 (semi-reflexive) であると呼ばれる。線形位相空間  $Y$  は、その空でない有界閉凸集合からなる減少列  $(C_n)_{n \in \omega}$  がつねに  $\bigcap_{n \in \omega} C_n \neq \emptyset$  であるときに、可算半反射的 (countably semi-reflexive) であると呼ばれる。ノルム空間  $Y$  については、半反射性、可算半反射性、反射性 (reflexivity) はすべて同値であること、また、反射的ノルム空間はつねに完備である (すなわち、バナッハ空間である) ことがよく知られている。

**定理 6.**  $X$  を GO 空間、 $A$  を  $X$  の閉集合、 $Y$  を半反射的な局所凸線形位相空間とする。このとき、線形閉凸拡張子  $u : C_\infty(A, Y) \rightarrow C_\infty(X, Y)$  が存在する

強 Choquet ゲーム ([Ke]) の相対版にあたる 相対強 Choquet ゲーム (the relative strong Choquet game)  $G_r(A, X)$  を以下のように定義する。

$X$  を位相空間、 $A$  をその部分空間とする。2人のプレーヤー I と II によって、次のようなゲームが行われる。

0-1. プレーヤー I は、 $a_0 \in A$  となる  $a_0$  と、 $a_0$  の  $X$  における近傍  $U_0$  を選ぶ。

0-2. これに応じて、プレーヤー II は、 $V_0 \subset U_0$  となるような  $a_0$  の  $X$  における近傍  $V_0$  を選ぶ。

( $n$  回のイニングにおいて)

$n$ -1. プレーヤー I は、 $a_n \in V_{n-1} \cap A$  となるような  $a_n$  と、 $U_n \subset V_{n-1}$  となるような  $a_n$  の  $X$  における近傍  $U_n$  を選ぶ。

$n$ -2. プレーヤー II は、 $V_n \subset U_n$  となるような  $a_n$  の  $X$  における近傍  $V_n$  を選ぶ。

(このようにプレーを続ける.)

$\emptyset \neq \bigcap_{n \in \omega} U_n \subset X \setminus A$  となるとき、プレーヤー I がゲーム  $G_r(A, X)$  の 勝者 (a winner) であり、そうでないときにはプレーヤー II が勝者であると決める。 $A$  が  $X$  において 強 Choquet (strong Choquet in  $X$ ) であるとは、プレーヤー II がゲーム  $G_r(A, X)$  における必勝法をもつときをいう。

**定理 7.**  $X$  を位相空間、 $A$  を  $X$  の Tychonoff である部分空間、 $Y$  を局所凸線形位相空間で、線形閉凸拡張子  $u : C_\infty(A, Y) \rightarrow C_\infty(X_A, Y)$  をもつものとする。このとき、 $Y$  は可算半反射的である、または、 $A$  は  $X$  において強 Choquet である。

相対強 Choquet の概念は、Stares-Vaughan [SV] にある相対全  $\pi$  基 (a total- $\pi$  base at the subset  $A$ ) の概念と、以下のように関連している。

命題 a.  $X$  が  $A$  における全  $\pi$  基をもち,  $A$  が Baire 空間でないとき,  $A$  は  $X$  において強 Choquet ではない.

命題 b ([SV]). Michael 直線  $\mathbb{R}_Q$  は  $Q$  における全  $\pi$  基をもつ.

命題 a および b より,  $Q$  は  $\mathbb{R}_Q$  において強 Choquet ではないことがわかる. よって, 定理 7 より以下の系が得られる.

系 8.  $Y$  を局所凸線形位相空間で, 線形閉凸拡張子  $u: C_\infty(Q, Y) \rightarrow C_\infty(\mathbb{R}_Q, Y)$  をもつとする. このとき,  $Y$  は可算半反射的である.

定理 6 において,  $X$  が GO 空間であるという条件が本質的であるとはいえない. 実際, 定理 6 の証明に実質的に用いられている概念 (やや技巧的なものであるが) を次のように取り出すことができる.

$X$  を位相空間,  $A$  をその Tychonoff な部分空間,  $\beta A$  を  $A$  の Stone-Čech コンパクト化とする.  $P(\beta A)$  を  $\beta A$  上の確率測度全体の集合とし, 弱\*位相をもつ  $C(\beta A)^*$  ( $C(\beta A)$  の共役空間) の部分空間としての位相をもつものとする. 連続写像  $r: X \rightarrow P(\beta A)$  で各  $a \in A$  について  $\text{supp}(r(a)) = \{a\}$  となるようなものがとれるとき,  $A$  は  $P\beta$ -値レトラクト ( $P\beta$ -valued retract) であると定義する. GO 空間  $X$  の閉集合  $A$  はつねに  $P\beta$ -値レトラクトである.

定理 1 と同様な証明を用いることにより, 以下の定理が得られる.

定理 9.  $X$  を位相空間,  $A$  をその  $P\beta$ -値レトラクトな部分空間,  $Y$  を半反射的な局所凸線形位相空間とする. このとき, 線形閉凸拡張子  $u: C_\infty(A, Y) \rightarrow C_\infty(X_A, Y)$  が存在する

定理 6, 系 8, 定理 9 より次を得る.

主定理 10.  $Y$  をノルム空間とするとき, 次の (1)~(5) は同値である.

- (1)  $Y$  は反射的
- (2) 任意の GO 空間  $X$  とその閉部分空間  $A$  は, 線形閉凸拡張子  $u: C_\infty(A, Y) \rightarrow C_\infty(X, Y)$  をもつ
- (3) Michael 直線  $\mathbb{R}_Q$  とその閉集合  $Q$  は, 線形閉凸拡張子  $u: C_\infty(Q, Y) \rightarrow C(\mathbb{R}_Q, Y)$  をもつ
- (4) 強 Choquet でない Tychonoff 部分空間  $A$  をもつようなある位相空間  $X$  について, 線形閉凸拡張子  $u: C_\infty(A, Y) \rightarrow C_\infty(X_A, Y)$  が存在する
- (5) 任意の位相空間  $X$  と,  $P\beta$ -値レトラクトとなるような Tychonoff な部分空間  $A$  について, 線形閉凸拡張子  $u: C_\infty(A, Y) \rightarrow C_\infty(X_A, Y)$  が存在する

主定理 10 より, 問題 5 は任意の反射的バナッハ空間については肯定的, 反射的でないノルム空間についてはつねに否定的となる.

最後に, [BBY] より, 関連するその他の結果と応用を紹介する.

主定理 10 の (1)  $\Leftrightarrow$  (3) に着目すると, Michael line  $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$  は  $Y$  が反射的であることを特徴づける拡張子のためのテスト空間とみなすことができる. 有限次元空間  $Y$  に対する同様なテスト空間  $\Pi$  を [BBY] において構成した.

$Y$  をバナッハ束,  $A$  を  $X$  の部分空間とする. 拡張子  $u: C(A, Y) \rightarrow C(X, Y)$  が 単調 (monotone) であるとは,  $f \leq g$  となる任意の  $f, g \in C(A, Y)$  について  $u(f) \leq u(g)$  となることである.

$d(Y)$  は  $Y$  の density (稠密な部分集合の最小濃度) を表す.

**定理 12.**  $d(Y) < \mathfrak{c}$  となるバナッハ束  $Y$  に対して,  $Y$  が弱点列完備 (weakly sequentially complete) であることと,  $\|u\| = 1$  となる線形単調拡張子  $u: C_{\infty}(\mathbb{Q}, Y) \rightarrow C_{\infty}(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}, Y)$  が存在することは必要十分である.

定理 12 を用いた応用を紹介する. 位相空間  $X$  とその部分空間  $A$ , バナッハ束  $Y$  について, 次の 3 条件 (1)~(3) を考える.

- (1) 線形閉凸拡張子  $u: C_{\infty}(A, Y) \rightarrow C_{\infty}(X, Y)$  が存在する.
- (2)  $\|u\| = 1$  となる線形拡張子  $u: C_{\infty}(A, Y) \rightarrow C_{\infty}(X, Y)$  が存在する.
- (3) 線形単調拡張子  $u: C_{\infty}(A, Y) \rightarrow C_{\infty}(X, Y)$  が存在する.

あきらかに, '(1)  $\Rightarrow$  (2)' および '(1)  $\Rightarrow$  (3)' が従う. van Douwen [vD<sub>1</sub>] [vD<sub>2</sub>] は  $Y = \mathbb{R}$  の場合のこれらの逆が成立するかどうかを問題として提出しており, この問題は現在でも未解決であると思われる. 一方,  $l_1$  は弱点列完備であり反射的でないことより, 定理 12 および主定理 10 から,  $Y = l_1$  の場合には (2) かつ (3) であるが (1) ではない空間の存在を与えることができる. 実際, 定理 12 より  $\|u\| = 1$  であるような線形単調拡張子  $u: C_{\infty}(\mathbb{Q}, l_1) \rightarrow C_{\infty}(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}, l_1)$  が存在するが, 主定理 10 より線形閉凸拡張子  $u: C_{\infty}(\mathbb{Q}, l_1) \rightarrow C_{\infty}(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}, l_1)$  は存在しない.

## References

- [BBY] I. Banach, T. Banach and K. Yamazaki, *Extenders for vector-valued functions*, preprint 2008.
- [vD<sub>1</sub>] E.K. van Douwen, *Simultaneous extension of continuous functions*, Ph.D. Thesis, Free Univ. of Amsterdam, 1975.

- [vD<sub>2</sub>] E.K. van Douwen, *Simultaneous linear extension of continuous functions*, Gen. Topology and Appl. 5 (1975) 297-319.
- [Dug] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. Math. 1 (1951), 353-367.
- [Eng] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [GHO] G. Gruenhage, Y. Hattori and H. Ohta, *Dugundji extenders and retracts on generalized ordered spaces*, Fund. Math. 158 (1998), 147-164.
- [HL] R.W. Heath and D.J. Lutzer, *Dugundji extension theorems for linearly ordered spaces*, Pacific J. Math. 55 (1974), 419-425.
- [Ke] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer, 1995.
- [LT] J. Lindenstrauss and L. Tsafriiri, *Classical Banach Spaces, II*, Springer, 1979.
- [Lu] D.J. Lutzer, *On generalized ordered spaces*, Dissert. Math. 89 (1977).
- [SV] I.S. Stares and J.E. Vaughan, *The Dugundji extension property can fail in  $\omega_\mu$ -metrizable spaces*, Fund. Math. 150 (1996), 11-16.