数理解析研究所講究録
第 1634 巻 2009 年 1-5

Krasinkiewicz mapによる近似について

高崎経済大学非常勤講師　松橋英市 (Eiichi Matsuhashi)

概要

本稿では主にコンパクト距離空間から多面体への連続写像を Krasinkiewicz map で近似することと、その周辺の話題に関して述べる。

1 Krasinkiewicz maps to polyhedra

この章では、コンパクト距離空間から多面体への Krasinkiewicz map 全体からなる集合が、写像空間のなかでどのような集合になっているかをみていく。

定義 1.1 $f: X \to Y$ が *Krasinkiewicz map* であるとは、Xに含まれる任意の subcontinuum C が f のある fiber に含まれるか、または f のある fiber の連結成分を含むときにいう。

この連続写像は Krasinkiewicz によって定義され、現在まで次元論や連続体論の問題を解決するためのツールとして頻繁に利用されてきている。Krasinkiewicz map は非常に複雑な連続写像である。Krasinkiewicz map の簡単な例は 0-dimensional map や constant map などであるが、そうでない具体例は構成が難しい。しかし以下に記すように Krasinkiewicz map は非常に多く存在する。以下 $K(X,Y)=\{f \in C(X,Y) | f:$ Krasinkiewicz map $\}$ とする。

定理 1.2 (Krasinkiewicz [8]) Xをコンパクト距離空間、M^1 を *1-dimensional manifold* とする。このとき $K(X,M^1)$ は $C(X,M^1)$ の中で *dense subset* になっている。

一見複雑である Krasinkiewicz map が上記の定理で示すように非常に多く存在することは分かっていたが、この時点では像空間が 1-dimensional manifold に限っての結果であり、また G_δ 性の考察はなされていなかった。

Krasinkiewicz map については次の結果を得る事が出来た。

定理 1.3 (Matsuhahshi, [9]) X をコンパクト距離空間、P を多面体とする。このとき $K(X,P)$ は $C(X,P)$ の中で dense G_δ-subset となっている。

したがってコンパクト距離空間から多面体への連続写像全体のうち、そのほとんど全ては Krasinkiewicz map になっている事が分かる。

[9] では、$K(X,P)$ が $C(X,P)$ の中で dense になっていることを証明する際、任意の $f: X \to P$ を直接 Krasinkiewicz map で近似しているが、証明はやや入り組んでいる。これに関し、比較的シンプルな証明を最近考えたのでその方針を紹介する。

定義 1.4 空間 Z が *Krasinkiewicz space* であるとは、任意のコンパクト距離空間 X に対して $K(X,Z)$ が $C(X,Z)$ の中で *dense G_δ-subset* になっているときに言う。

コンパクト距離空間 Z に対して、$Cone(Z)=(Z \times I)/(Z \times \{1\})$ とする。

定理 1.5 任意のコンパクト距離空間 Z に対し、$Cone(Z)$ は *Krasinkiewicz space* である。

定理 1.6 (Matsuhashi and Valov [12]) 完備な *ANR* Z が *Krasinkiewicz space* であるための必要十分条件は、Z の各点が *Krasinkiewicz space* になるような近傍を持つことである。

多面体の各点の近傍は cone としてとれるので、定理 1.5、1.6 より定理 1.3 が得られる。

2 Bing maps to polyhedra

この章では、コンパクト距離空間から多面体への Bing map 全体からなる集合が、写像空間のなかでがどのような集合になっているかをみていく。

定義 2.1 *Continuum*（=コンパクト連結集合）X が *indecomposable* であるとは、X に含まれる *subcontinuum* Y と Z が $X = Y \cup Z$ を満たすなら、$X = Y$ または $X = Z$ が成り立つ場合にいう。また *continuum* X が *hereditarily indecomposable* であるとは、X に含まれる任意の *continuum* が *indecomposable continuum* であるときにいう。最後に、コンパクト距離空間 B が *Bing compactum* であるとは、B の連結成分が全て *hereditarily indecomposable continuum* であるときに言う。

Hereditarily indecomposable continuum の構造は非常に複雑だが、とても面白い、そして良い性質を持っていてその性質の良さゆえに連続体論や次元論では重要な役割を果たしている。このような複雑な continuum の存在は、すでによく知られている。hereditarily indecomposable continuum は 1922 年に Knaster が初めて構成した [7]（彼が構成したものは *pseudo arc* と呼ばれるものでhereditarily indecomposable continuum の代表的な例である)。そして 1951 年に Bing が次の定理を発表するまで、1 次元のものしか知られていなかった。

定理 2.2 (Bing [1]) 全ての $(n+1)$ 次元 *continuum* は n 次元 *hereditarily indecomposable continuum* を含んでいる。

ここで Bing map を定義する。

定義 2.3 $f : X \to Y$ が *Bing map* であるとは、任意の $y \in Y$ に対し、$f^{-1}(y)$ が *Bing compactum* であるときに言う。

この連続写像も Krasinkiewicz map 同様、非常に複雑な連続写像である。Bing map の簡単な例は、fiber すべてが 0 次元になるうよな連続写像（= 0-dimensional map）などであるが、そうでないような例は構成が非常に難しい。

実は次に紹介するように Bing map は非常に多く存在する。

(以下 $B(X,Y) = \{f \in C(X,Y) | f : \text{Bing map}\}$ とする。)

定理 2.4 (Song and Tymchatyn [13], cf. Kato and Matsuhashi [5]) X をコンパクト距離空間、P を多面体とする。このとき $B(X,P)$ は $C(X,P)$ のなかで *dense G_δ-subset* となっている。

以上のことにより、ラフな言い方をしてしまえばコンパクト距離空間から多面体への連続写像全体のうち、そのほとんど全てが Bing map になっていることがわかる。

3 Applications

2 章、3 章での結果を合わせて考えると次の結果が分かる。
(以下 $BK(X,Y) = \{f \in C(X,Y) | f$: Bing-Krasinkiewicz map $\}$ とする)

定理 3.1 *Xをコンパクト距離空間、Pを多面体とする。このとき $BK(X,P)$ は $C(X,P)$ のなかで dense G_δ-subset となっている。*

つまり、コンパクト距離空間から多面体へのほとんど全ての連続写像は Bing-Krasinkiewicz map になっている。また、定理 3.1 の応用としては次がある。

定理 3.2 (Matsuhashi [9], Song and Tymchatyn [13]) *Xをコンパクト距離空間、Zを Peano curve、または n-dimensional Menger manifold とする。このとき $BK(X,Z)$ は $C(X,Z)$ のなかで dense G_δ-subset となっている。*

次の定理も 3.1 の応用である。証明には Brown の inverse limit に関する近似定理([2])を用いる。

定理 3.3 (Kato and Matsuhashi [4], Matsuhashi [9]) *任意の一点集合でない continuum X に対し、ある inverse sequence $\{P_i, g_i\}$ (但し $i = 1, 2, \ldots$ に対して P_i は一点集合でない連結な有限多面体、$g_i : X_{i+1} \to X_i$ は全射 Bing-Krasinkiewicz map) が存在して $X = \varprojlim\{P_i, g_i\}$ となる。*

以下も定理 3.1 の応用である。これは [4] の Problem 12 に対する肯定的な答えとなる。

定理 3.4 (Matsuhashi [10]) *Y を 1 点集合でない continuum とする。Y が Peano continuum であるための必要十分条件は、任意の 1 点集合でない continuum X に対して X から Yへの全射 Bing-Krasinkiewicz map が存在することである。*

この定理により、全ての 1 点でない Peano continuum は、任意の 1 点でない continuum の Bing-Krasinkiewicz map による像となっていることがわかる。

4 Parametric Krasinkiewicz maps

ここではごく最近の結果について述べる。この章では距離空間 X, Y, Z と perfect map(=fiber が全て compact になる閉写像) $f : X \to Y$ が与えられたとき、X から Z への連続写像で f の各 fiber に制限したとき Krasinkiewicz map となるものについて紹介する。この章では、写像空間には source limitation topology が入っているものとする。source limitation topology とは ϱ を Y の距離としたとき、$f \in C(X,Y)$ の base が
$(\star) B_\varrho(f,\alpha) = \{g \in C(X,Y) : \varrho(g,f) < \alpha\}$
となっている位相のことである。
($\alpha : X \to (0,1]$: continuous map、$\varrho(f,g) < \alpha \iff \varrho(f(x), g(x)) < \alpha(x)$ for all $x \in X$ とする。)
source limitation topology の重要な性質として
($\sharp$) 定義域がコンパクトの時にはこの位相は sup metric による位相と同値になる。
($\sharp\sharp$) 像空間が完備距離空間のとき、$C(X,Y)$ は Baire の性質を持つ(つまり Baire の定理が使える)。

という事実が挙げられる。

Valov は [14] で定理 2.4 を大きく拡張した次の結果を発表した。

定理 4.1 (Valov [14]) X を距離空間、Y を *strongly countable dimensional space*、Z を多面体、$f: X \to Y$ を *perfect map* とする。このとき $\{g \in C(X,Z) | g|_{f^{-1}(y)} : f^{-1}(y) \to Z$: *Bing map for each* $y \in Y\}$ は $C(X,Z)$ の中で *dense* G_δ*-subset* となる。

また、上記結果で Y の条件を C-space に緩めて次の結果も証明した。

定理 4.2 (Valov [14]) X を距離空間、Y を *C-space*、$I = [0,1]$、$f: X \to Y$ を *perfect map* とする。このとき $\{g \in C(X,I) | g|_{f^{-1}(y)} : f^{-1}(y) \to I$: *Bing map for each* $y \in Y\}$ は $C(X,I)$ の中で *dense* G_δ*-subset* となる。

Krasinkiewicz map に関しても同様の結果が導けないか？と考えるのは自然なことであろう。そして Valov との共著 [12] で次の結果を得た。

定理 4.3 (Matsuhashi and Valov [12]) X を距離空間、Y を *strongly countable dimensional space*、Z を多面体、$f: X \to Y$ を *perfect map* とする。このとき $\{g \in C(X,Z) | g|_{f^{-1}(y)} : f^{-1}(y) \to Z$: *Krasinkiewicz map for each* $y \in Y\}$ は $C(X,Z)$ の中で *dense* G_δ*-subset* となる。

定理 4.4 (Matsuhashi and Valov [12]) X を距離空間、Y を *C-space*、$I = [0,1]$、$f: X \to Y$ を *perfect map* とする。このとき $\{g \in C(X,I) | g|_{f^{-1}(y)} : f^{-1}(y) \to I$: *Krasinkiewicz map for each* $y \in Y\}$ は $C(X,I)$ の中で *dense* G_δ*-subset* となる。

そして、定理 4.2, 4.4 を用いることにより、次の結果を得た。

定理 4.5 (Matsuhashi [11]) X を距離空間、Y を *C-space*、Z を多面体（またはコンパクト距離空間上の *cone*)、$f: X \to Y$ を *perfect map* とする。このとき $\{g \in C(X,Z) | g|_{f^{-1}(y)} : f^{-1}(y) \to Z$: *Krasinkiewicz map for each* $y \in Y\}$ は $C(X,Z)$ の中で *dense* G_δ*-subset* となる。

(注) この定理で Y が一点集合の場合を考えれば定理 1.3 が得られる。

参考文献

[1] R. H. Bing, *Higher-dimensional hereditarily indecomposable continua*, Trans. Amer. Math. Soc., 71(1951), 267-273.

[2] M. Brown, *Some applications of an approximation theorem for inverse limits*, Proc. Amer. Math. Soc., 11 (1960), 478-483.

[3] H. Kato, *Higher-dimensional Bruckner-Garg type theorem*, Topology. Appl. 154 (2007), no.8, 1690-1702.

[4] H. Kato and E. Matsuhashi, *On surjective Bing maps*, Bull. Pol. Acad. Sci Math. 52 (2004), no.3, 329-333.

[5] H. Kato and E. Matsuhashi, *Extension of Bing maps*, 数理解析研究所講究録（一般及び幾何学的トポロジーと関連する諸問題）NO.1370 (2004), 102-116

[6] H. Kato and E. Matsuhashi, *Lelek maps and n-dimensional maps from compacta to polyhedra*, Topology. Appl. 153 (2006), no. 8, 1241-1248.

[7] B. Knaster, *Un continu dont tout sous-continu est indecomposable*, Fund. Math., 3 (1922), 247-286.

[8] J. Krasinkiewicz, *On application of mappings into 1-manifolds*, Bull. Pol. Acad. Sci math. 44 (1996), no.4, 431-440.

[9] E. Matsuhashi, *Krasinkiewicz maps from compacta to polyhedra*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 54 (2006), no.2, 137-146.

[10] E. Matsuhashi, *On applications of Bing-Krasinkiewicz-Lelek maps*. Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 55 (2007), no.3, 219-228.

[11] E. Matsuhashi, *Parametric Krasinkiewicz maps, cones and polyhedra*, submitted.

[12] E. Matsuhashi and V. Valov, *Krasinkiewicz spaces and parametric Krasinkiewicz maps*, Houston. J. Math., to appear.

[13] J. Song and E. D. Tymchatyn, *Free spaces*, Fund. Math. 163 (2000), 229-239.

[14] V. Valov, *Parametric Bing and Krasinkiewicz maps*, Topology and Appl. **155, 8** (2008), 906-915.