数理解析研究所講究録
第 1637 巻 2009 年 39-46

On the uniqueness and nonuniqueness of nodal radial solutions of sublinear elliptic equations in a ball

岡山理科大学・理学部　田中　敏 (Satoshi Tanaka)
Faculty of Science,
Okayama University of Science

次の Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \Delta u + K(|x|)f(u) = 0 & \text{in } B, \\ u = 0 & \text{on } \partial B, \end{cases} \tag{1}$$

を考える. ここで $B = \{x \in \mathbf{R}^N : |x| < 1\}$, $N \geq 2$, $K \in C^2[0,1]$, $K(r) > 0$ $(0 \leq r \leq 1)$,

$$f \in C^1(\mathbf{R}), \quad sf(s) > 0 \quad \text{for } s \neq 0 \tag{2}$$

とする. さらに次の sublinear と呼ばれる条件を仮定する:

$$f(s)/s > f'(s) \quad \text{for } s \neq 0. \tag{3}$$

条件 (3) は

$$s\,(f(s)/s)' < 0 \quad \text{for } s \neq 0$$

と同値であることに注意する.

問題 (1) の符号変化する球対称解 $u = u(|x|)$ に興味がある. その球対称解 $u(r)$ は次の２階の常微分方程式

$$u'' + \frac{N-1}{r}u' + K(r)f(u) = 0 \tag{4}$$

と境界条件

$$u'(0) = u(1) = 0 \tag{5}$$

を満たす. ここでは $u(0) > 0$ の場合のみを考える. もちろん $u(0) < 0$ の場合も同様に考えることができる. $u(0) = 0$ の場合は, 初期値問題の解の

一意性により, 問題 (4)–(5) の解は自明解 $u(r) \equiv 0$ のみである. さらに, やはり初期値問題の解の一意性により, (4)–(5) の非自明解の区間 $(0,1)$ 内の零点は有限個であることもわかる. 以上のことより, こでは次の問題 (6) を考えたい:

$$
(6) \qquad \begin{cases} u'' + \dfrac{N-1}{r}u' + K(r)f(u) = 0, \quad 0 < r < 1, \\ u'(0) = u(1) = 0, \quad u(0) > 0, \\ u \text{ は区間 } (0,1) \text{ 内にちょうど } k-1 \text{ 個の零点をもつ.} \end{cases}
$$

よく知られている Brezis–Oswald [1] の結果により, 問題 (1) の正値解は高々 1 個である. 従って, $k = 1$ の場合は問題 (6) の解は高々 1 個である. そこで, ここでは $k \geq 2$ のときも (6) の解は一意であるかどうかを調べてたい.

問題 (6) の解の存在は, Esteban [3], Y. Naito [6], Dambrosio [2] らによって得られている. 大雑把にいうと, $\lim_{s\to 0} f(s)/s$ が十分大きく, かつ, $\lim_{|s|\to\infty} f(s)/s$ が十分小さいならば, (6) は少なくとも 1 個の解をもつ. また, (3) の場合は, 2 個以上の (6) の解の存在の結果は得られていない.

$K(r) \equiv 1$ の場合, Kajikiya [4] により, (6) の解は高々 1 個であることが示されている. $K(r) \not\equiv 1$ の場合は次の結果を, 2005 年 3 月の数理研の研究集会で報告した ([10]).

定理 1. 次を仮定する.

$$
(7) \quad 3r^2(K')^2 - 2r^2KK'' + 2(N-1)rKK' + 4(N-1)K^2 \geq 0, \quad 0 \leq r \leq 1,
$$

そのとき, 任意の $k \geq 1$ に対して, (6) の解は高々 1 個である.

次の恒等式

$$
\begin{aligned}
&3r^2(K')^2 - 2r^2KK'' + 2(N-1)rKK' + 4(N-1)K^2 \\
&\qquad = K^2\left[\left(\frac{rK'}{K} + 2\right)\left(\frac{rK'}{K} + 2(N-1)\right) - 2r\left(\frac{rK'}{K}\right)'\right]
\end{aligned}
$$

と定理 1 から次の系 1 を得る.

系 1. 次の (8)–(10) のうち，1 つを仮定する．

$$K''(r) \leq 0, \quad K'(r) \geq 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \tag{8}$$

$$N = 2, \quad \left(\frac{rK'(r)}{K(r)}\right)' \leq 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \tag{9}$$

$$N > 2, \quad \frac{rK'(r)}{K(r)} \geq -2, \quad \left(\frac{rK'(r)}{K(r)}\right)' \leq 0, \quad 0 \leq r \leq 1. \tag{10}$$

そのとき，任意の $k \geq 1$ に対して，(6) の解は高々 1 個．

すでに述べたように，条件 (7) が成り立つかどうかに関係なく $k = 1$ の場合は問題 (6) の解は高々 1 個である ([1])．しかしながら，$k \geq 2$ の場合は問題 (6) の解が一意であるためには (7) のようななんらかの条件が必要だと思う．すくなくとも $k = 2$, $N = 3$ の場合は次が成り立つ．

定理 2. $N = 3$, $k = 2$ とする．次を仮定する．

$$f'(s) > 0, \quad s \in \mathbf{R}, \tag{11}$$

$$\lim_{|s| \to \infty} f(s)/s = 0. \tag{12}$$

そのとき，ある $K \in C^\infty[0,1]$, $K(r) > 0$ $(0 \leq r \leq 1)$ に対して，(6) はすくなくとも 3 個の解をもつ．

例えば以下の関数は条件 (3), (11), (12) を満たす．

$$f(s) = \arctan s,$$

$$f(s) = \log(1 + |s|)\,\mathrm{sgn}(s),$$

$$f(s) = \frac{s}{1 + |s|^q} \quad (0 < q \leq 1).$$

問題 (4)–(5) の解の個数を調べるには，次の線形化方程式

$$w'' + \frac{N-1}{r}w' + K(r)f'(u)w = 0 \tag{13}$$

がよく利用される (例えば, [5], [7], [8], [11] など). 定理 1 は次の項等式

$$\text{(14)}\quad \left[r^{N-1}K^{-\frac{1}{2}}[w'u'-wu'']-r^{N-1}(K^{-\frac{1}{2}})'wu'\right]' \\ =-\frac{r^{N-2}}{4K^{\frac{5}{2}}}\left[3r^2(K')^2-2r^2KK''+2(N-1)rKK'+4(N-1)K^2\right]w\frac{u'}{r}.$$

により証明することができる. ここで u, w はそれぞれ (4), (13) の解である. 恒等式 (14) は $N=1$ の場合, [9] で得られており, (14) はそれを一般化したものである.

以下, 定理 2 の証明について述べる. 従って, $N=3$ の場合の方程式

$$\text{(15)}\qquad u''+\frac{2}{r}u'+K(r)f(u)=0.$$

を考える. 定理 2 は以下の補題 1–3 から示すことができる. 補題 1–3 の証明は紙数の都合により省略する.

補題 1. $0<R_1<R_2<R$ とする. $K\in C([0,R]-\{R_1,R_2\})$, $K_n\in C[0,R]$, $n=1,2,\ldots$ を以下を満たすものする:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^R|K_n(r)-K(r)|dr=0,$$

かつ, ある定数 $M>0$ に対して,

$$0<K_n(r)\le M,\quad 0\le r\le R,\quad n=1,2,\ldots.$$

u を初期条件

$$\text{(16)}\qquad u(0)=\alpha>0,\quad u'(0)=0$$

を満たす (15) の解とし, u_n を

$$u_n''+\frac{2}{r}u_n'+K_n(r)f(u_n)=0,\quad u_n(0)=\alpha,\quad u_n'(0)=0$$

の解とする. そのとき, u_n, u_n' は $n\to\infty$ のとき, それぞれ u, u' に $[0,R]$ 上一様収束する.

補題 2. $u(r,\alpha)$ を (15), (16) の解とする．条件 (11) の成立を仮定する．さらに $K \in C[0,\infty)$ かつ，ある定数 $M > 0$ に対して，$0 < K(r) \leq M$ $(r \geq 0)$ を満たすとする．そのとき

$$u(r,\alpha) > 0, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{\alpha/[Mf(\alpha)]}.$$

補題 3. $f'(0) > \pi^2$ かつ (11), (12) の成立を仮定する．そのとき，以下の (i)–(iii) を満たす r_1, r_2, r_3 と方程式

$$U'' + rE(r)f(r^{-1}U) = 0$$

の解 U_1, U_2, $U_3 \in C^1[0,\infty)$ が存在する:

(i) $0 < r_1 < r_2 < r_3$, $0 < U_1'(0) < U_2'(0) < U_3'(0)$

(ii) U_1, U_3 は区間 $(0,r_3)$ 内にすくなくとも 2 個の零点をもつ;

(iii) U_2 は区間 $(0,r_3)$ 内にちょうど 1 個の零点をもち，$U_2(r_3) < 0$.

ここで

$$E(r) = \begin{cases} 1, & r \in [0,r_1] \cup [r_2,\infty), \\ 0, & r_1 < r < r_2 \end{cases} \tag{17}$$

である．

[定理 2 の証明] $c = 2\pi^2/[f'(0)]$, $g(s) = cf(s)$ とおく．そのとき (11), (12) より，$g'(0) = 2\pi^2$, $g'(s) > 0$ $(s \in \mathbf{R})$ かつ $\lim_{|s|\to\infty} g(s)/s = 0$ である．補題 3 より，補題 3 の (i)–(iii) を満たす r_1, r_2, r_3 と方程式

$$U'' + rE(r)g(r^{-1}U) = 0$$

の解 U_1, U_2, U_3 が存在する．ここで $E(r)$ は (17) によって定義されるものである．十分大きな $n>0$ に対して $J_n(r)$ を

$$J_n(r)=\begin{cases} 1, & 0\le r\le r_1, \\ (1-n)(r-r_1)+1, & r_1<r<r_1+\dfrac{1}{n}, \\ \dfrac{1}{n}, & r_1+\dfrac{1}{n}\le r\le r_2-\dfrac{1}{n}, \\ (n-1)(r-r_2)+1, & r_2-\dfrac{1}{n}<r<r_2, \\ 1, & r\ge r_2 \end{cases}$$

と定義する．さらに $K_n\in C^\infty[0,r_3]$ を

$$|K_n(r)-J_n(r)|<\frac{1}{2n},\quad 0\le r\le r_3.$$

満たすようにとる．そのとき

$$K_n(r)>J_n(r)-\frac{1}{2n}\ge\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}>0,\quad 0\le r\le r_3,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{r_3}|K_n(r)-E(r)|dr=0$$

が成り立つ．いま $u_i(r)=r^{-1}U_i(r)$, $i=1,2,3$ とおく．そのとき u_1, u_2, u_3 は

$$u''+\frac{2}{r}u'+E(r)g(u)=0$$

の解で, u_1, u_3 は $(0,r_3)$ 内にすくなくとも 2 個の零点をもち, u_2 は $(0,r_3)$ 内にちょうど 1 個の零点をもち, かつ, $u_2(r_3)<0$ を満たす．

$$u_i(0)=\lim_{r\to0}\frac{U_i(r)}{r}=U_i'(0)$$

であるから, $0 < u_1(0) < u_2(0) < u_3(0)$ を得る. さらに次のことがわかる.

$$\begin{aligned} u_i'(0) = \lim_{r\to 0} u_i'(r) = \lim_{r\to 0}\frac{rU_i'(r) - U_i(r)}{r^2} &= \lim_{r\to 0}\frac{(rU_i'(r) - U_i(r))'}{(r^2)'} \\ &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{2}U_i''(r) \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{r\to 0} rE(r)g(r^{-1}U_i(r)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

y_i, $i = 1, 2, 3$ を初期値問題

$$y'' + \frac{2}{r}y' + K_n(r)g(y) = 0, \qquad (18)$$
$$y(0) = u_i(0), \quad y'(0) = 0$$

の解とする. 補題 1 により, $n > 0$ を十分大きくとると次が成り立つ: y_1, y_3 は $(0, r_3)$ 内に少なくとも 2 個の零点をもつ; y_2 は $(0, r_3)$ 内にちょうど 1 個の零点をもち, $y_2(r_3) < 0$. 初期条件 $y(0) = \alpha$, $y'(0) = 0$ を満たす (18) の解を $y(r, \alpha)$ と表すことにする. $y(r, \alpha)$ に対して Prüfer 変換を行う, 即ち, $\rho(r, \alpha)$, $\theta(r, \alpha)$ を

$$y(r, \alpha) = \rho(r, \alpha)\sin\theta(r, \alpha),$$
$$r^2 y'(r, \alpha) = \rho(r, \alpha)\cos\theta(r, \alpha),$$

を満たすものとする. ここで $' = d/dr$ である. そのとき $\theta(r_3, u_1(0)) > 2\pi$, $\theta(r_3, u_2(0)) < 2\pi$ かつ $\theta(r_3, u_3(0)) > 2\pi$ であることに注意する. 補題 2 と $\lim_{|s|\to\infty} g(s)/s = 0$ より, $\alpha^* > u_3(0)$ を十分大きくとると, $\alpha \geq \alpha^*$ のとき $\theta(r_3, \alpha) < \pi$ が成り立つ. 従って, 次を満たす α_1, α_2, α_3 が存在する: $0 < u_1(0) < \alpha_1 < u_2(0) < \alpha_2 < u_3(0) < \alpha_3 < \alpha^*$, $\theta(r_3, \alpha_i) = 2\pi$, $i = 1, 2, 3$. よって $y(r, \alpha_i)$, $i = 1, 2, 3$ は (18) の解で区間 $(0, r_3)$ 内にちょうど 1 個零点をもち, かつ $y(r_3, \alpha_i) = 0$ を満たす. $v_i(r) = y(r_3 r, \alpha_i)$, $i = 1, 2, 3$ とおく. そのとき v_1, v_2, v_3 は

$$v'' + \frac{2}{r}v' + cr_3^2 K_n(r_3 r)f(v) = 0, \quad v'(0) = v(1) = 0, \quad v(0) > 0,$$

の解で区間 $(0, 1)$ 内にちょうど 1 個零点をもつ. 証明終わり.

引用文献

[1] H. Brezis and L. Oswald, Remarks on sublinear elliptic equations, *Nonlinear Anal.* **10** (1986), 55–64.

[2] W. Dambrosio, Nodal solutions to semilinear elliptic equations in a ball, *Differential Integral Equations* **15** (2002), 945–972.

[3] M. J. Esteban, Multiple solutions of semilinear elliptic problems in a ball, *J. Differential Equations* **57** (1985), 112–137.

[4] R. Kajikiya, Necessary and sufficient condition for existence and uniqueness of nodal solutions to sublinear elliptic equations, *Adv. Differential Equations* **6** (2001), 1317–1346.

[5] M. K. Kwong, Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in R^n, *Arch. Rational Mech. Anal.* **105** (1989), 243–266.

[6] Y. Naito, Bounded solutions with prescribed numbers of zeros for the Emden-Fowler differential equation, *Hiroshima Math. J.* **24** (1994), 177–220.

[7] W.-M. Ni, Uniqueness of solutions of nonlinear Dirichlet problems, *J. Differential Equations* **50** (1983), 289–304.

[8] T. Ouyang and J. Shi, Exact multiplicity of positive solutions for a class of semilinear problem. II. *J. Differential Equations* **158** (1999), 94–151.

[9] S. Tanaka, On the uniqueness of solutions with prescribed numbers of zeros for a two-point boundary value problem, *Differential Integral Equations.* **20** (2007), 93–104.

[10] S. Tanaka, On the uniqueness of nodal radial solutions of sublinear elliptic equations in a ball, 数理解析研究所講究録 1445 関数方程式と複雑系 (2005), 12–18.

[11] E. Yanagida, Structure of radial solutions to $\Delta u + K(|x|)|u|^{p-1}u = 0$ in R^n, *SIAM J. Math. Anal.* **27** (1996), 997–1014.