

## 結合 van der Pol 方程式の安定性解析

静岡大学工学部 齊藤勝也 宮崎倫子 (Katsuya Saitoh, Rinko Miyazaki)  
Faculty of Engineering, Shizuoka University

### 1 序論

ムカデなどの多脚生物は脚それぞれの振動を同期させることで歩いていると考えられる。脚それぞれを一つの振動子と考えると、全体の足の動きは結合振動子の同期現象と考えることができる。本研究では、同期現象のおきる結合振動子のある数理モデルによって表し、その安定性解析を試みた。その数理モデルでは、何種類かの同期振動が起きることが確認される。安定性解析を行うことによって、その同期振動の種類、またその分岐条件を調べた。安定性解析の手法として、線形化、フロッケの理論を用いている。なお、安定性解析はフロッケの理論を基に、フロッケ乗数を数値的に求めることにより遂行した。

### 2 モデル

序論でも述べたように、ムカデのような多脚生物は脚同士を同期させて歩いていると考えられる。そのため、脚一本一本を一つの振動子として結合させれば、その同期現象は結合振動子としてモデル化する事ができる。また、実際の生物は周囲の環境の変化に対応して歩行している。これを数学的な性質でいえば、外乱が加わろうとも、元の安定した振動に戻るというリミットサイクルを持つモデルが必要となる。そこで、まず一本の脚の運動を表す数理モデルとして van der Pol(以下 vdP) を採用する。

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (1)$$

この方程式は非線形項の影響によって、 $\lambda > 0$  のときリミットサイクルを持つことが知られている。これによって、周囲の環境に対応できるということを表現する。

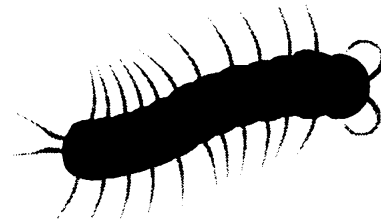


図 1: ムカデなどの多脚生物

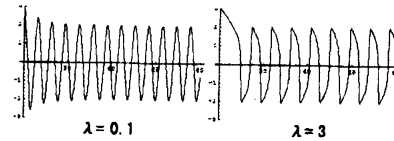


図 2: vdP 方程式に現れるリミットサイクル

多脚生物の脚を運動を表すモデルとして (1) 式で与えられる vdP 方程式を  $N$  結合した次の  $N$  結合 vdP 方程式を考える。

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - \lambda(1 - x_1^2)\dot{x}_1 + x_1 = \alpha(x_N - x_1) \\ \ddot{x}_i - \lambda(1 - x_i^2)\dot{x}_i + x_i = \alpha(x_{i-1} - x_i) \quad (i = 2, 3, \dots, N) \end{cases} \quad (2)$$

ここで  $\alpha$  は結合の強さで結合強度と呼ぶ。この結合による作用で、この方程式の解それぞれは互いに同期することが確認されている。この方程式によって、結合振動子を表現することにする。 $N=2,3$  の場合について (2) 式を数値シミュレーションを行うと安定な周期解は、3 種類確認できている。それらの解を本論文では同期振動解と呼び、以下のように定義する。

#### 定義 1(同相解)

(2) 式と同相解とは、 $i=1,2,\dots,N$  に対して、

$$x_i(t) = \phi(t), t \in \mathbf{R}$$

をみたす周期関数  $\phi \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  のことをいう。

#### 定義 2(進み型逆相解)

(2) 式の進み型逆相解とは、 $i=1,2,\dots,N$  に対して、

$$x_i(t) = \psi_a(t + (i-1)T/N), t \in \mathbf{R}$$

をみたす周期関数  $\psi_a \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  のことをいう。ここで  $T$  は  $\psi_a$  の周期である。

#### 定義 3(遅れ型逆相解)

(2) 式の遅れ型逆相解とは、 $i=1,2,\dots,N$  に対して、

$$x_i(t) = \psi_d(t - (i-1)T/N), t \in \mathbf{R}$$

をみたす周期関数  $\psi_d \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  のことをいう。ここで  $T$  は  $\psi_d$  の周期である。

同期振動解それぞれの安定性を調べることによって、(2) 式の解の分岐条件を調べる。具体的な手法は同期振動解まわりでの線形化方程式を求め、結合係数  $\alpha$  を変化させたときのフロッケ乗数  $\mu$  を調べる。フロッケ乗数  $\mu$  の絶対値が 1 より小さければ安定、大きければ不安定といった解析法である。これを現在確認されている 3 種類の解に適用し、それぞれの安定性を調べる。ここで安定性解析に使われるフロッケ乗数、フロッケの定理について示しておく。

#### 定理 A(フロッケの定理)

$n$  次元 1 階の線形システム、

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{P}(t+T) = \mathbf{P}(t)$$

の基本行列 (一次独立な解を並べた行列) を  $\Psi$  とすると、正則な行列  $M$  が存在し、

$$\Psi(t_0+T) = M\Psi(t_0)$$

となる。  $\Psi(t_0) = I$  とするとき、  $M = \Psi(t_0+T)$  の固有値がフロッケ乗数である。

よく知られた次の定理は非線形システムの周期解の安定性は、線形化方程式のフロッケ乗数で与えられることを示すものである。

**定理 B**

$n$  次元 1 階の非線形システム,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

の周期解  $\mathbf{x}^*(t)$  が漸近安定となるための十分条件は,

$$\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t))\mathbf{y}$$

のフロッケ乗数が単根の 1 を除いて、すべて大きさが 1 より小さいことである。ただし、 $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$  は  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  のヤコビ行列である。

この定理から同期振動解の安定、不安定を調べる。

### 3 2 結合 van der Pol 方程式の解析

(3) 式に 2 結合 vdP 方程式を示す。右辺の項が結合による作用を表している。

$$\begin{cases} \ddot{x} - \lambda(1-x^2)\dot{x} + x = \alpha(y-x) \\ \ddot{y} - \lambda(1-y^2)\dot{y} + y = \alpha(x-y) \end{cases} \quad (3)$$

初期値や  $\lambda, \alpha$  のパラメータの違いにより振動パターンが二つに分岐することが確認できている。それぞれを同相解、逆相解と呼ぶ。

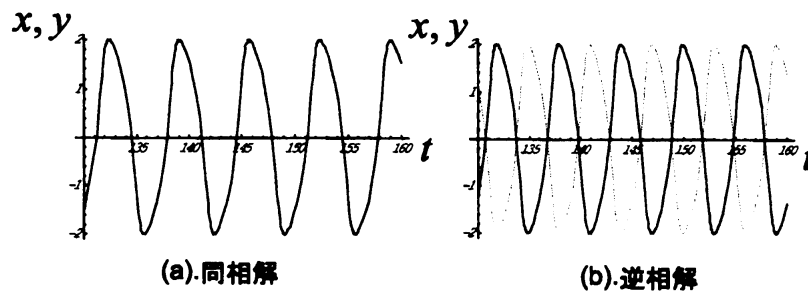


図 3: 2 結合 vdP 方程式の解の挙動

まずフロッケの理論を適用するために、2 結合 vdP 方程式の同期振動解をリミットサイクルとして持つ方程式を求める。同相解を  $\phi$  とすれば 定常状態で  $x = y = \phi$  となる。(3) 式に代入すると、

$$\ddot{\phi} - \lambda(1-\phi^2)\dot{\phi} + \phi = 0 \quad (4)$$

を得る。これが 2 結合 vdP 方程式の同相解をリミットサイクルとして持つ方程式である。また、逆相解を  $\psi$  とすれば 定常状態で  $x = -y = \psi$  となる。(3) 式に代入すると、

$$\ddot{\psi} - \lambda(1-\psi^2)\dot{\psi} + (1+2\alpha)\psi = 0 \quad (5)$$

を得る。これが 2 結合 vdp 方程式の逆相解をリミットサイクルとして持つ方程式である。ここで逆相解  $\psi$  は前節で与えられた進み型あるいは遅れ型逆相解に一致すると考えられるが、現段階では証明できていない。

次に線形化方程式を求める.  $X = (x, \dot{x}), Y = (y, \dot{y}), \phi$  を同期解とする. (3) 式を 4 次元 1 階の微分方程式として記述すれば,

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda(1-x_1^2) \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} (Y-X) \\ \dot{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda(1-y_1^2) \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} (X-Y) \end{cases} \quad (6)$$

である.  $X^* = (\phi, \dot{\phi})$  とおくと,  $\phi$  の安定性は (6) 式における  $(X^*, X^*)$  の安定性として与えられる. この  $(X^*, X^*)$  まわりでの線形化方程式は,

$$\begin{cases} \dot{X} = DF(X^*)X + K(Y-X) \\ \dot{Y} = DF(X^*)Y + K(X-Y) \end{cases} \quad (7)$$

となる. ここで,

$$DF(X^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\lambda\phi\dot{\phi} & \lambda(1-\phi^2) \end{pmatrix} \quad (8)$$

はヤコビアン行列である.

さらに計算を簡単にするために, モード分解を行う.

$$U := \frac{X+Y}{2}, V := \frac{X-Y}{2} \quad (9)$$

とおいて, (7) 式に代入すれば,

$$\begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DF(X^*(t)) & 0 \\ 0 & DF(X^*(t)) - 2K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \quad (10)$$

(7),(10) 式の基本行列をそれぞれ  $\Psi_1(t), \Psi_2(t)$  とおくと,

$$\Psi_1(t) = Q\Psi_2(t), Q := \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\therefore \Psi_1^{-1}(0)\Psi_1(T) = \Psi_2^{-1}(0)\Psi_2(T) \quad (12)$$

すなわち, (7) 式フロッケ乗数と (10) 式フロッケ乗数は一致する. よって, 定理 A を (10) 式に適用し, 同期振動解とその周期を数値的に求め, それぞれの同期解に対してフロッケ乗数を数値的に計算することにより, 同相解の安定性に関する結果が得られる. 逆相解についても同様である.

結合係数  $\alpha$  を変化させ, フロッケ乗数を計算した結果を図 4 に示す. 安定の領域ではフロッケ乗数の大きさは 1 より小さく, 不安定の領域ではその大きさが 1 より大きいことを示している. まず同相解, 逆相解どちらも安定の領域では, 初期値によって 2 結合 vdP 方程式の解はどちらかに漸近する. 同相解のみが安定の領域では, ほとんどの初期値に対してその解は同相解に漸近する. 逆相解も同様である. ここで重要なのが, 逆相解のみが安定な領域が存在するということである. 例えば, 脚という振動子が二つあるヒトの歩行を考えてみよう. ヒトは脚を交互に前へだして歩行している. これはちょうど振動子が常に逆相であることに対応する. つまり結合係数というパラメータの設定によってヒトの歩行が表現できる.

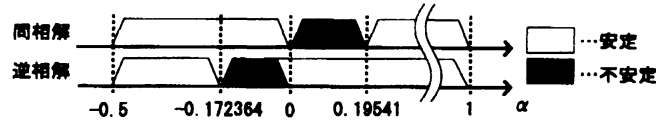


図 4: パラメータ  $\alpha$  の変化による 2 結合 vdp 方程式の安定性 ( $\lambda = 1$ )

#### 4 3 結合 van der Pol 方程式の解析

$N=3$  の場合を考えよう.

$$\begin{cases} \ddot{x} - \lambda(1-x^2)\dot{x} + x = \alpha(z-x) \\ \ddot{y} - \lambda(1-y^2)\dot{y} + y = \alpha(x-y) \\ \ddot{z} - \lambda(1-z^2)\dot{z} + z = \alpha(y-z) \end{cases} \quad (13)$$

初期値や  $\lambda, \alpha$  のパラメータの違いにより分岐される振動パターンが 3 種類確認できている.

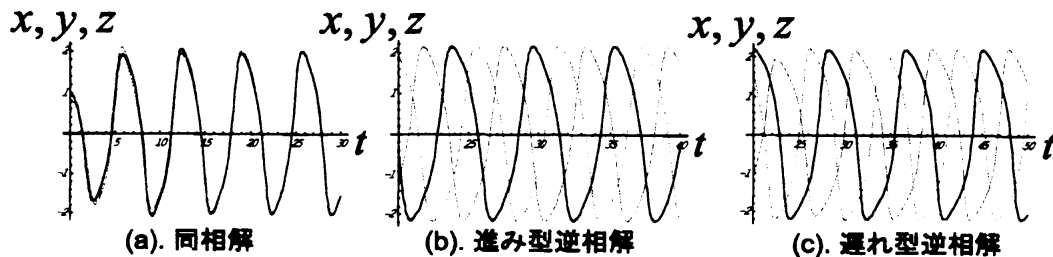


図 5: 3 結合 vdP 方程式の解の挙動

図 5 によりそれぞれ定常状態での振動パターンの周期特性が得られる. 同相解では振動パターン  $x(t) = y(t) = z(t)$  より,

$$\ddot{x} - \lambda(1-x^2)\dot{x} + x = \alpha(x(t) - x(t)) = 0 \quad (14)$$

と単独の vdP 方程式になる. このリミットサイクルが (13) 式と同相解である. 次に進み型逆相解では  $x(t) = y(t+\tau) = z(t+2\tau)$  より,

$$\ddot{x} - \lambda(1-x^2)\dot{x} + x = \alpha(x(t-2\tau) - x(t)) \quad (15)$$

が得られる. ただし  $\tau$  は結合している解間の時間遅れである. この方程式の周期  $3\tau$  のリミットサイクルが (13) 式を進み型逆相解である. 最後に遅れ型逆相解では  $z(t) = y(t+\tau) = x(t+2\tau)$  より,

$$\ddot{x} - \lambda(1-x^2)\dot{x} + x = \alpha(x(t-\tau) - x(t)) \quad (16)$$

が得られる. この方程式の周期  $3\tau$  のリミットサイクルが (13) 式の遅れ型逆相解である. このように逆相解は Delayed Feedback 制御項を含む vdP 方程式のリミットサイクルとして与えられる. Delayed Feedback (以下 DF) 制御項 (時間遅れ) を含む vdP 方程式がリミットサイクルを持つかどうかは, 理論的には分かっていない. そのため, 数値計算から時間遅れに対しリミットサイクルが存在するかを確認, 存在するならばその周期を計算する. まず DF 制御項を持つ vdP 方程式を一般的に記述すれば,

$$\ddot{x} - \lambda(1-x^2)\dot{x} + x = \alpha(x(t-\tau) - x(t)) \quad (17)$$

である。ただし  $r$  は時間遅れである。まず (17) 式の  $r$  を徐々に変えていき、その周期  $T$  を数値的に求めていく。得られた数値データから、リミットサイクルの周期  $T$  を時間遅れ  $r$  の関数として  $r-T$  平面上に補完曲線を描くことができる。次に時間遅れ  $r$  を周期  $T = 3r$  となるように決定する。そのとき進み型逆相解に対して  $r = 2\tau, T = 3/2\tau$ 、遅れ型逆相解に対して  $r = \tau, T = 3\tau$  の関係があるから、 $r-T$  平面上にこれらの直線を引いて、それらとの交点を求める (図 6 参照)。その交点の  $r$  座標を時間遅れ  $r$  に代入して (17) 式から得られるリミットサイクルの数値解を利用し、線形化方程式のフロッケ乗数を求めればよい。

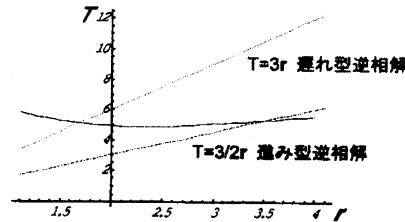


図 6: DF 制御項のある vdP 方程式の  $r-T$  グラフ

次に線形化方程式を求める。  $X = (x, \dot{x}), Y = (y, \dot{y}), Z = (z, \dot{z})$  とおき、 $\phi$  を同期解とする。(13) 式を 6 次元 1 階の微分方程式として記述すれば、

$$\begin{cases} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda(1-x_1^2) \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} (Z - X) \\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda(1-y_1^2) \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} (X - Y) \\ Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda(1-z_1^2) \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} (Y - Z) \end{cases} \quad (18)$$

であり、2 結合と同様に  $X^* = (\phi, \dot{\phi})$  とすれば、 $(X^*, X^*, X^*)$  まわりでの線形化方程式は、

$$\begin{cases} \dot{X} = DF(X^*)X + K(Z - X) \\ \dot{Y} = DF(X^*)Y + K(X - Y) \\ \dot{Z} = DF(X^*)Z + K(Y - Z) \end{cases} \quad (19)$$

となる。ここで、2 結合の場合と同様に、

$$DF(X^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\lambda\phi\dot{\phi} & \lambda(1-\phi^2) \end{pmatrix} \quad (20)$$

はヤコビアン行列である。

以下に結果を示す。3 結合の場合は数値計算の精度上、結合係数  $\alpha$  の範囲を 0~1 とした。進み型逆相解のみが安定な領域では、ほとんどの初期値に対して解は進み型逆相解のみに漸近する。同相解と進み型逆相解が安定な領域では、初期値に対して解はどちらかに漸近する。結合係数が 0~1 の範囲では、遅れ型逆相解が安定な領域は現れなかった。ここで重要なことは進み型逆相解のみが安定な領域が存在することである。脚という振動子が三対ある生物を考えてみよう。前脚から順に  $x, y, z$  とすれば、 $x, y, z, x, y, z$  と振動することは前脚、中脚、後脚の順に脚が出て前進することに一致する。先ほどの重要なこの領域では、どのような外乱が加わっても再び進み型逆相解に漸近することで前進を続けることができるという特徴がある。

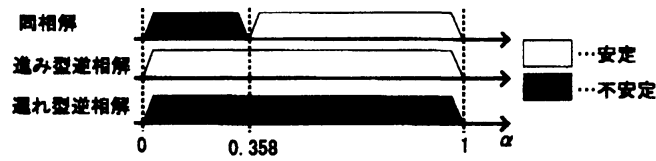


図 7: パラメータ  $\alpha$  の変化による 3 結合 vdp 方程式の安定性 ( $\lambda = 1$ )

## 5 結論

本研究では 2 結合, 3 結合の安定性解析によって, 結合係数による解の分岐を与えた. この分岐条件はまだ狭い範囲ではあるが, この方法を推し進めていくことで, 広範囲での解の分岐条件を調べることができるはずである. また  $N$  結合 van der Pol 方程式の一つの形に対して, 存在しうる 3 種類の解を確認した. 解が他にあるかどうかはまだ分からないが, 3 種類の解については明確な定義付けができた. さらに重要なこととして, 逆相解のみが安定な領域が発見ができた. ほとんどの生物の歩行が脚を交互に出すなど, どこかの部分で逆相が現れている. 外乱が加わっても, 歩行が乱されないという応用上のメリットを得ることができた.

なお, 結合 vdP 方程式に関する研究は過去に数多く出されており, 本研究結果がすでに得られているものではないかという懸念は払拭できていない. 特に 2 結合の場合は Stori and Reinhall[2] の結果は我々の結果も含んでいると思われるが, 数値計算結果のグラフ提示にとどまっており判断が困難である. また, Golubitsky and Stewart[1] による結果は結合後に現れる同期軌道のタイプを知るうえで大変興味深い.

## 参考文献

- [1] M.Golubitsky and I.Stewart, "The Symmetry Perspective", Chapter 3, Birkhäuser Verlag, 2002.
- [2] D.W.Storti and P.G. Reinhall, Stability of in-phase and out-of-phase modes for a pair of linearly coupled van der Pol oscillators, "Nonlinear Dynamics, The Richard Rend 50th Anniversary Volume", 1-23, 1997.