

時間遅れを有する系の力学とその大域的位相構造 ：時間遅れ制御則の応用に向けて

京都大学大学院工学研究科電気工学専攻 引原隆士 (Takashi Hikiyara)
Department of Electrical Engineering, Kyoto University

本原稿は、文献 [1] の内容の一部を、数理解析研究所における研究集会「関数方程式のダイナミクスと数理モデル」の特別講演用にまとめたものである。本研究の一部は、文献 [1] の共著者でもある山末耕平氏（現、京都大学 VBL）との共同研究であることをまず述べておく。

1. はじめに

1990 年代初頭、Ott, Grebogi, Yorke [2] によるカオス制御 (OGY 制御) の概念の提示は、非線形振動／発振、特にカオスをそのアトラクタに内在する不安定周期軌道 (UPO) に安定化することができるという意識を広く研究者に与え、数々の関連研究を触発したことで良く知られている。そのような一連のカオス制御の研究の中で、Pyragas [3] によって提案された時間遅れフィードバック制御 (TDFC) は、連続力学系においてカオス制御を達成する有効な方法として数々の応用がなされている。その実システムへの応用の容易さにも関わらず、時間遅れフィードバック制御の適用により、連続時間におけるシステムの状態空間の次元が無次元となることから、これまでその解析的な検討が難しく、未だにその有効性の解析的な説明がなされていない。本稿では、このような時間遅れフィードバック制御法に関して、状態空間の大域構造を反映する制御下の過渡状態のダイナミクスに着目して、時間遅れフィードバック制御法のメカニズムを議論する。ここに示す議論は、著者らによる結果 [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] に基づくものである。

この 20 年、時間遅れフィードバック制御の研究は、その不安定周期軌道の安定化メカニズムの理論的検討 [11, 12, 13, 14, 15, 16] と各種応用に関する研究 [18, 17, 19, 20, 21] の大きく分けて二つの方向性で進められて来た。

著者らは、時間遅れフィードバックを適用した系の、一連の実験および数値的検討 [4, 5] で多くの疑問点があった。それは、カオス制御を開始したあとの過渡状態は何で決まるのか？、目標軌道の Basin はパラメータおよび初期関数の空間でどのように表されるのか？というものであった。Just はアトラクタの引き込み領域 (Basin) と大域的ダイナミクスの重要性を指摘し、それが残された問題であると述べている [22]。さらに、安定性のロバスト性は実験において重要な問題であることも明らかである [4]。これらの問題は、TDFC が種々に改良されているにもかかわらず、本質的に解消されず、未だに明らかにされていない。

2. 過渡状態のダイナミクス

2.1. 磁気弾性系とその実験システム

磁気弾性系はカオス振動を生じる系としてよく知られている [23]。さて、この系に TDFC を適用し、カオスに埋め込まれている UPOs を安定化することを考える。実験系の概略図を Fig.1 に示す [4]。遅れフィードバック制御信号は現在の系の状態出力と記憶された状態出力との偏差にゲインを掛けて、正弦的な強制励振に重ねて加振装置によって加えられる。この制御法は、状態変数全てのフィードバックを掛ける必要はなく、実験では速度フィードバックが採用されている。TDFC において時間遅れを不安定周期軌道 (UPO) の周期に合わせると、カオスに内在する同一周期を持つ不安定周期軌道が安定化される。しかしながら、同時

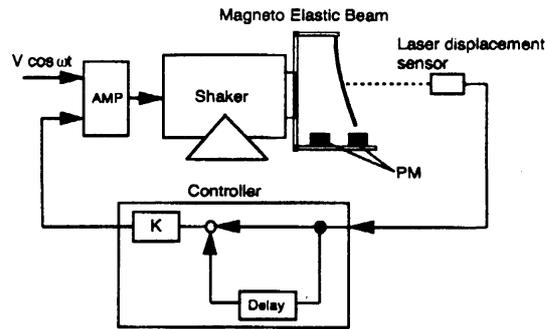


図 1: 時間遅れ制御を加えた磁気弾性振動系

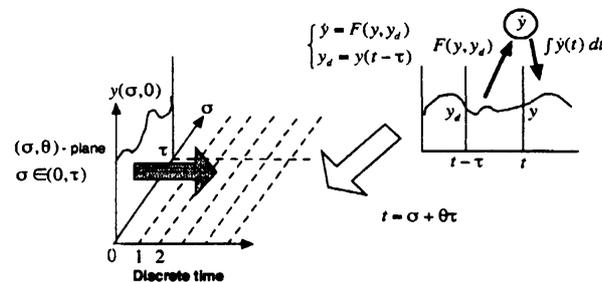


図 2: 時間遅れ系の時空間座標への展開。実験的に得られた時系列データを遅れの有限位相空間と離散時間の座標系に展開したもの [6]。

に、その周期（励振周期）の整数倍の周期を有する軌道も安定化される。それは、元の系に多様な周期軌道が共存することによる [24]。

一度カオスに内在する UPO が TDFC によって安定化されると、現在の状態と記憶された状態（遅れ状態）が一致し、制御入力ゼロとなる。すなわち、ここに成立する状態は、遅れフィードバックが加わっていない系の状態と一致することになる。言い換えると、元の系のカオスに内在する不安定周期軌道が安定化される。

実験では、時間遅れを正確に励振周期に合わせることは難しい [5]。しかしながら、ほとんど制御入力は無くなり、上に説明したカオス制御が実現する。厳密な意味では元の系とは言えないが、この不安定周期軌道の安定領域は、遅れが励振周期と異なる広い領域で存在し、その意味でロバスト性がある。このことは、時間遅れフィードバック制御による安定化のメカニズムが、配意空間の大域構造に大きく依存していることを意味している。一方で、制御入力を投入後の過渡状態は何で決まるのかということに対して、おそらく Basin の構造やその大きさが関与すると想像できるが、関数空間におけるその構造は容易に求めることができない上に、無限次元の中でどのように理解すれば良いのかが分からない。

以下、特に Duffing 方程式で表される非線形振動子を考え、時間遅れフィードバック制御を加えた系の大域構造と制御のメカニズムを考える。

2.2. 過渡挙動

実験において共存する異なる UPO が TDFC で安定化できたということを上記述べた。しかし、制御入力を投入した時点で、どの不安定周期軌道が安定化するかを予測することはできない。それは初期値に相当

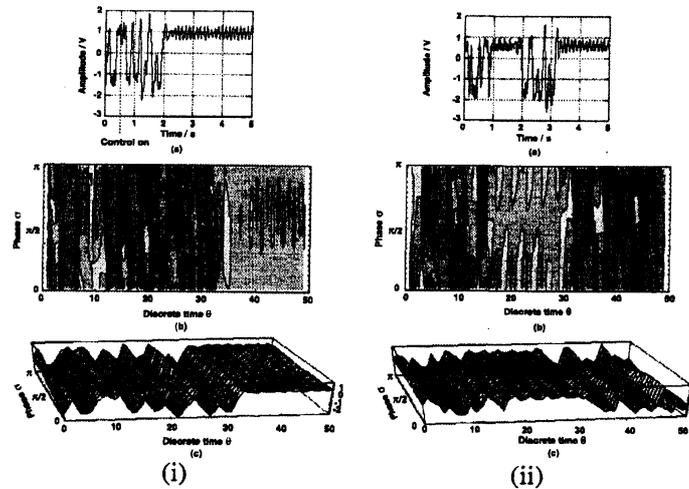


図3: カオスの時間遅れフィードバック制御時における過渡状態の時空間発展: (i) 安定軌道への収束と (ii) 不安定軌道への漸近. 等高線は同じ強度の振幅を意味し, 位相の発展が見える [5].

する記録された初期関数と関数空間の Basin に依存する. 最終的に制御入力 U が UPO への漸近で減少し, 最後には有限次元のアトラクタに収束するが, その途中においてはこの無限次元空間の中を動く. これが何によって決まるのかであろうか.

状態空間の時空間展開を用いて, 無限次元空間のダイナミクスの特徴を見ることができる [6]. この方法は Arecchi, Giacomelli et al. [25, 26] により提案された時空ダイナミクスの解析法を時間遅れ系に適用したものである. 図3の (i) と (ii) に, 実験から得られた変位の時系列を, 遅れ時間による位相と離散時間の空間に展開した結果を示す. 非線形系の制御実験において制御入力後に状態が目標に推移する間様々な過渡挙動を見ることがあるが, 時間遅れ系でも同様である. 図3において, UPO に安定化した (i) では, 時間遅れに関する空間で定在波が現れる. 一方, (ii) では, 一旦, 節の在る定在波が現れるがこれは不安定で, すぐにカオス状態に戻る. これは, 1次元の波動伝播で見られる状況と類似している. もちろん, ここに表されている以外の状態変数があり, このイメージは無限次元の関数空間における過渡状態の推移のイメージを掴む以上に何かを説明するものにはならないが, TDFC が加えられたシステムにおける安定解と不安定解の存在を裏付けるものであり, 解析的な検討の助けとなる. 同時に, TDFC で安定化できない周期軌道があることを示唆している. この実験的経験は Ushio, Nakajima らによる "奇数条件" で説明された [11, 13, 14]. TDFC による UPO の安定化が不可能となる場合を示すこの条件は, 制御入力下における解の収束性に関わるものであることから, 制御入力後の過渡挙動をも説明できるものであるはずである. そのような意味で, 興味深い条件である. 昨今, この条件を回避するための様々な試みがなされているが, 力学系として本質的に回避できるとの報告はまだ無い.

3. 初期関数と Basin

Basin は, 常微分方程式においては初期値とパラメータ空間で議論することができ, それが状態推移の先々を説明するものになる. それらの値が与えられると, 解は決定論的に一意に決まる. さらに Basin は解のロバスト性を説明するものとなる. 一方, 時間遅れフィードバックを有する常微分方程式系においては, Basin は無限次元空間において考えられなければならない. 特に, 制御入力 U が投入された時点で, その制御量は記憶された過去の状態から決定される. すなわち初期関数が以後のダイナミクスを決定することになる. それまでのダイナミクスから決まる軌道の一部が初期関数として以後の無限次元におけるダイナミクス

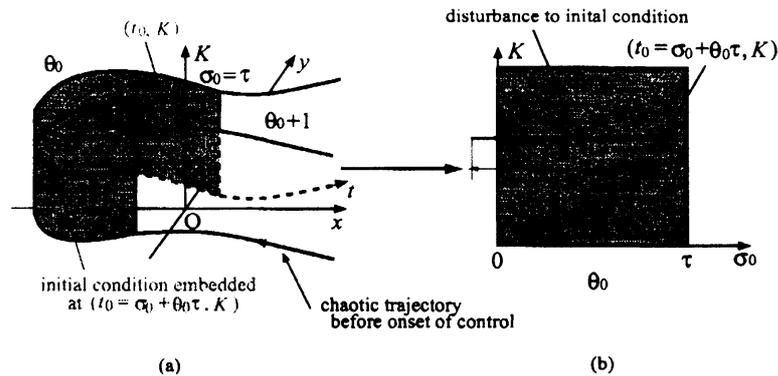


図 4: 初期関数空間と摂動 [7]. 初期関数は (a) において過去におけるカオス軌道の一部, すなわちカオス制御が投入された時点 $t = t_0$ からさかのぼった軌道 $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ で与えられる. 摂動は (b) に示す様に, ガウス関数の様な関数分布を持つものとして, 初期関数に加算的に加わるものとする.

を決定する. 図 3 の結果は, この時空状態空間における Basin を考えることの重要性を示していると言える.

図 1 の実験系は次の制御入力を有する Duffing 方程式で与えられる.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\delta y(t) + \alpha x(t) - \gamma x(t)^3 + A \cos \omega t + u(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$u(t) = K\{y(t - \tau) - y(t)\} \quad (2)$$

ここで, $t = t_0$ で制御入力を加える. すなわち,

$$x(t_0) = x_{t_0}, \quad y(t_0) = y_{t_0}, \quad (3)$$

$$y(t_0) = y(t_0 + \theta); \quad \theta \in [-\tau, 0] \quad (4)$$

が満たされる. 上述した様に, 初期関数は $u(t) = 0$ のもとで初期値 $(x(0), y(0)) = (1.0, 0)$ から生じるカオス軌道の一部から生成する. この選び方により制御のメカニズムの理解の一般性が失われるものではない. 簡単のために ω は 1 とする. $\delta, \alpha, \gamma,$ と A はそれぞれ 0.16, 1.0, 1.0 そして 0.27 とする. 時間遅れ τ はカオスに内在する UPO の周期に一致させる.

図 Fig.5 は, カオスアトラクタに埋め込まれた周期 2π の不安定周期軌道を表している. ${}^1\mathbf{I}$ と ${}^1\mathbf{I}'$ は逆不安定周期軌道のストロポ点を表し, ${}^1\mathbf{D}$ は正不安定周期軌道の同時刻でのストロポ点を表す. ${}^1\mathbf{I}$ と ${}^1\mathbf{I}'$ は TDFC によって安定化され, 安定な周期軌道となる. 一方, ${}^1\mathbf{D}$ は奇数条件により安定化できない.

制御信号は目標軌道が安定化された後にはゼロとなる. 結果として, 制御された系はカオスを生じる元の系に収束し, 安定化された不安定周期軌道はカオスに埋め込まれた周期軌道と一致する. 目標軌道の Basin は無限次元の関数空間で特徴づけられるが, これはその軌道周辺における線形化で把握することは困難である.

図 6 は, 制御投入時刻とフィードバックゲインのパラメータ空間における軌道の安定化可能領域を示している [7]. これより, 他に多くの解が共存することが分かる. 過去の実験において, 必ずしもいつも同じ不安定周期軌道が安定化できるものではなく, その Basin は制御入力の投入条件で分類できる程, 明確ではないことを示した [5]. この結果は, ここに示した Basin の状態から, 納得できるものである.

位相空間の大域的構造を理解するために, 初期関数に異なる摂動を与える (図 4). これらの共存解の周期は 2π に一致せず, 制御信号 $u(t)$ は安定化後も残る. 従って, 解は元の力学系に埋め込まれた不安定周期軌道とは異なる. 言い換えれば, カオス制御はこのような共存解が安定化されるケースの中で, 周期が遅れと一致するケースにすぎない.

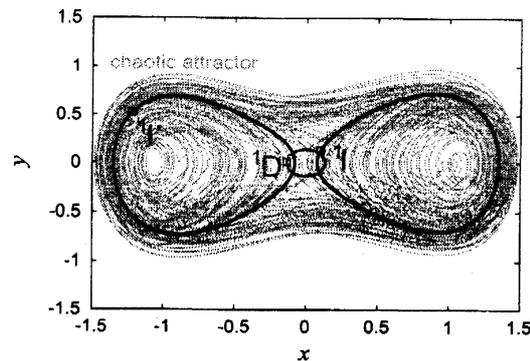


図 5: カオスアトラクタに埋め込まれた周期 2π の不安定周期軌道。 ^1I と $^1\text{I}'$ は逆不安定周期軌道を表し、これは適当なゲインを有する TDFC により安定化できる。 ^1D は同じく正不安定周期軌道で、これは安定化できない。

矢印で示したパラメータ $(K, t_0) = (1.1, 0.94\tau + 18\tau)$ において、関数空間における振動を考慮した Basin は図 7 (a) と得られる。二つの共存領域の境界は滑らかである。この場合は、初期関数により収束解を選択することが可能である。一方、パラメータ $(K, t_0) = (0.75, 0.8\tau + 18\tau)$ の場合、Basin は図 7 (b) で与えられる。図 7 (c) は図 7 (b) の四角形で囲んだ領域の拡大である。これより、目標解への収束を制御することが難しいことが分かる。このように、Basin の構造が制御投入後の過渡挙動を決定することが明らかである。

4. カオスの残滓

この節では、二つのポテンシャル井戸を持つ Duffing 方程式に関して、そのカオス振動に対して TDFC が投入された際の大域的位相構造を見る。TDFC の下で複数の安定周期軌道が共存することは既に述べた。周期 2π の逆不安定周期軌道の Basin が複雑に入り交じっていることも示した。それは、無限次元空間において過渡軌道がそのような大域構造の影響を受けることを意味している。従って、そのような構造を議論することで TDFC の元におけるダイナミクスを議論することが可能となると考えられる。

位相空間の大域構造は、TDFC によって制御できない正不安定周期軌道（ストロボ点が ^1D ） [23, 24] が関数空間内に持つ一次元多様体に支配されると考えてよい [8]。特に不安定多様体がカオスアトラクタに収束することから、その過渡時における推移を見ることで、過渡時のダイナミクスを把握できる。

上記 Duffing 方程式の大域構造を時刻 2π ごとのストロボ写像による断面上の多様体で見ると、そのホモクリニック交叉が確認できる。安定多様体と不安定多様体は不安定周期軌道近傍では二次元の平面上に存在するため、カオス的不変集合の存在が予測される。カオスアトラクタは目標とする UPO と ^1D を同時に埋め込んでいることから、この推測は妥当と言える。

図 8 にこれらの多様体を示す。同図 (a)(b) において、目標軌道は不安定でカオスアトラクタが残存している。これは同図上のストロボ点の動きで裏付けられる。一方、同図 (c)(d) では目標軌道は安置化される。従って、ストロボ点も過渡挙動を示すものの目標軌道のストロボ点に収束する。すなわち、それらの目標 UPO は ^1S と $^1\text{S}'$ に分岐する。同図 (c)(d) において矢印は制御入力投入された時点を示している。

制御ゲインを $K > 0$ に定めて制御を投入すると、元の力学系は振動を受ける。すなわち、元の 2 次元力学系が無次元力学系に変化する。しかしながら、図 8 はその無限次元力学系における過渡挙動が、元の力学系の ^1D の不安定多様体で支配されていることを明らかに示している。これは ^1D が奇数条件により不安定状態を続けることによって、その存在が保証される。

図 8 (b) において、式 2 のフィードバックゲインが小さい場合、目標軌道は不安定でカオスアトラクタが残っていることを述べた。不安定多様体は元の図 8 (a) と同様に大域的に伸ばされかつ折り曲げられてる構

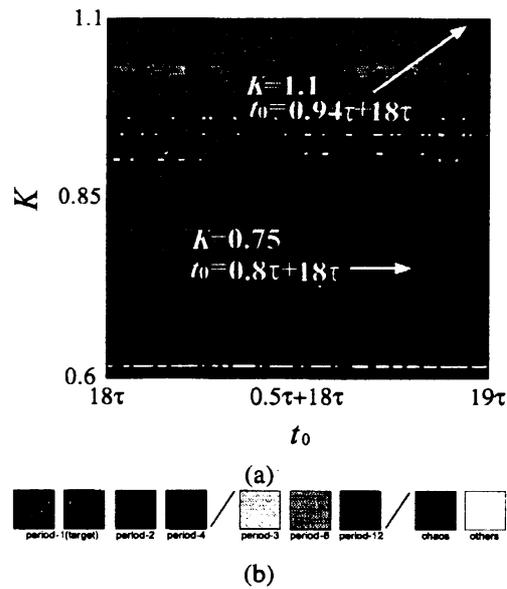


図 6: 初期関数空間における安定化された軌道の分類。パラメータは $(\delta, A) = (0.16, 0.27)$ とする。濃い色の部分と薄い色の部分はそれぞれ、図 5 に示した二つの目標軌道への収束領域を表す。

造を残し、 1D に対して x の正側、負側を行き来している。もちろん、この多様体の図は無次元の関数空間を元の 2 次元ストロボ空間に射影したものである。

フィードバックゲインを増加するにつれて、二つの目標軌道は安定になる。しかしながら、その不安定多様体の引き伸ばされて折り曲げられる構造自体は図 8(c) に見られる様に残っている。従って、過渡挙動に元の力学系の有する大域構造が残り、制御入力投入後も 1S もしくは ${}^1S'$ に収束するまで長い過渡挙動を示すと同時に、目標軌道への収束はこの大域構造に起因する複雑な初期関数依存性を示すことになる。

図 9 は対応する変位 x と制御入力 u の時間変化を示している。制御入力投入後も上述した過渡挙動を示していることが確認できる。長い過渡挙動の後、突然 1S に収束している。従って、制御という立場では望ましくないこととなる。一方、フィードバックゲインを $K = 1.1$ にすると、元のカオスの不変集合は消滅し、多様体は速やかに目標軌道に収束している。これはホモクリニック交叉が消滅していることを意味している。

本節では、TDFC の元での過渡ダイナミクスを無限次元位相空間内の大域構造に基づいて議論して来た。TDFC で安定化できる UPO が共存することは、同時に軌道が過渡的にそれらの間を遊走することを意味している。同時に、過渡的にカオス的挙動が生じて、制御としての特性を決めることになる。工学的には、過渡挙動は制御において最も重要な特性である。特に、大乱やノイズに対して系が安定であるかどうか、ここに示した位相空間の大域に支配されることが容易に分かる。

5. TDFC の応用例

本節では、TDFC をナノテクノロジー分野の観測、操作において重要な役割を有している原子間力顕微鏡の特性改善への応用を検討した例を示す。

5.1. ダイナミックモード原子間力顕微鏡とその力学

昨今、原子間力顕微鏡 [27] は、物質のナノ構造の測定に広く用いられている [28]。特に、ダイナミックモード原子間力顕微鏡 (DFM) [29, 30] はこの 20 年間、原子間力顕微鏡の有効な操作法としては開発されてきた [31]。DFM において、共振周波数で振動するカンチレバー (片持ち梁) を力センサーとして用いる。

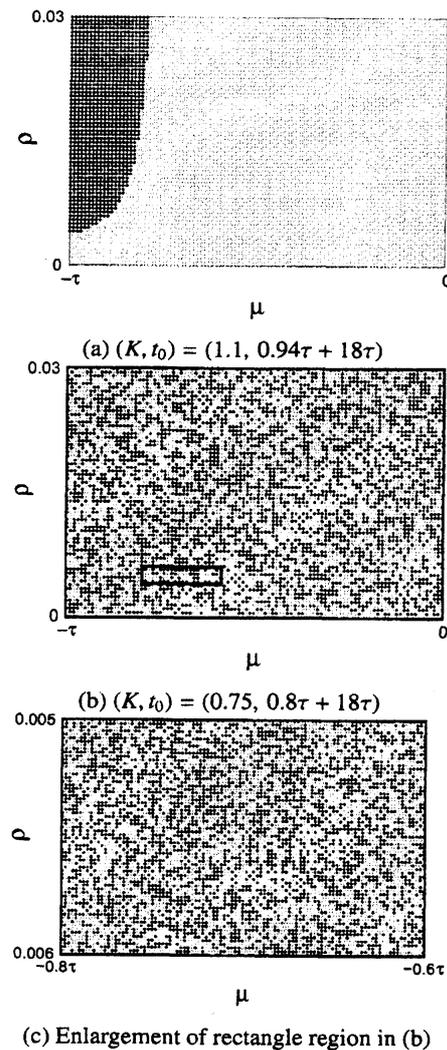


図 7: 時間遅れフィードバック制御された two-well Duffing 方程式の引き込み領域。パラメータの設定値は $(\delta, A) = (0.16, 0.27)$ 。引き込み領域は図 4 の矢印で示された初期条件の周辺で得られたもの。

自由振動しているカンチレバー先端の探針がサンプルの表面に接近するとその間に相互作用が働く。この時の共振周波数の変化が測定できればサンプル表面の凹凸もしくは空間変化が測定できることになる。これが、DFM の基本的な原理である。

実験分野では、AFM を用いた計測において、カオスを含む非線形振動が存在することは知られていた。1990 年代終わり [32] と最近の研究 [33, 34] でそれらが実験的に示された。特に、カンチレバーの予期しない分数調波振動、カオス振動を含む不規則な非線形振動により、DFM の操作領域が制限されることにもつながっており、その対策が望まれてきた。この流れの中で、既に非線形振動を抑制するいくつかの試みが行われ、報告されている [35, 36, 37]。

DFM の構造の概略と原理を図 10 に示す。共振周波数で振動するカンチレバーは、探針とサンプル表面との距離を測定するための力センサーであり、作用力の変化による共振周波数のシフト量から、その平均的距離を測定することが可能な構造となっている。スキャンすることで、サンプル表面の凹凸の空間分布が測定できる¹。

¹実際には、AM-DFM [29] と FM-DFM [30] があり、前者は振幅の変化から、後者は共振周波数の変化から測定する。後者は共振周

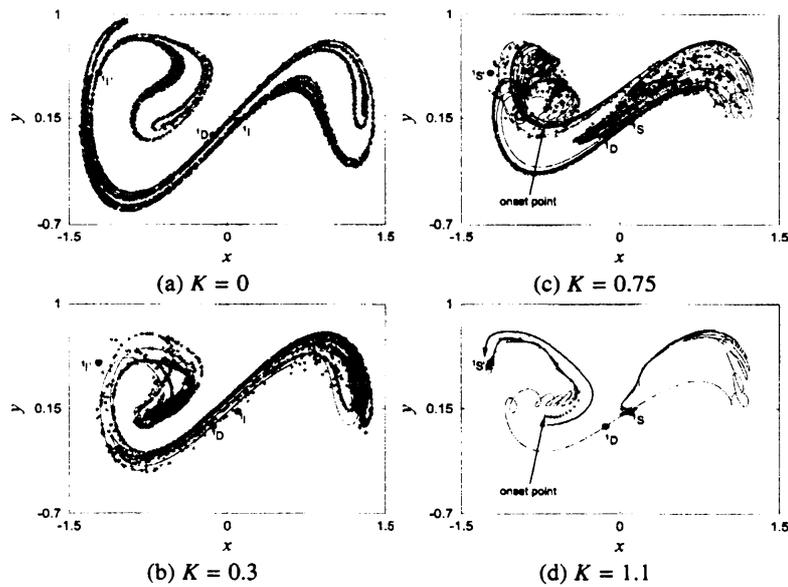


図 8: 不安定多様体に基づくカオスの存在と過渡挙動 [8].

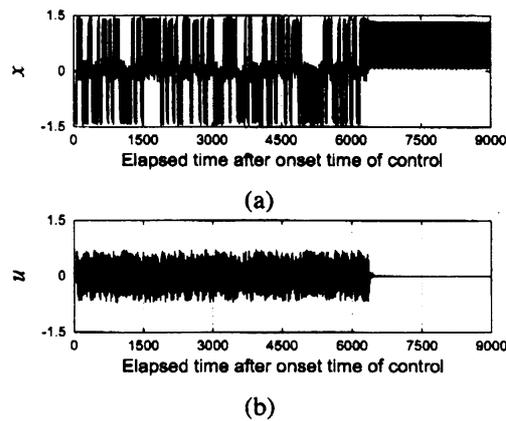


図 9: 制御投入後の過渡挙動：(a) 変位, (b) 制御入力.

一般に、探針とサンプル表面の作用は、ファン・デア・ワールス力で支配され、その力によるポテンシャル形状は Lennard-Jones ポテンシャルで表される。その時、カンチレバーの一次モードの振動に関して次の方程式が成立する [36]。ここで、スキャナー信号 $u(t)$ でカンチレバーが制御されると考える。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - \frac{d}{(\alpha+x)^2} + \frac{\Sigma^6 d}{30(\alpha+x)^8} + \epsilon(\Gamma \cos \Omega t - \Delta y) \end{pmatrix} + \mathbf{b}u \quad (5)$$

ここで、 x と y は探針の変位と変位速度を表し、 \mathbf{b} は制御を決める二次元の定数ベクトルである。

非線形ポテンシャルを有するカンチレバーの力学は、TDFC によるカオス制御を最初の実現した磁気弾性梁の力学と類似しており、その研究の延長線上で議論することが可能である。 α はカンチレバー探針に強制外部入力無く重力のみの場合の平衡点の位置を表している。 Γ と Ω は正弦波による励振の振幅と周波数を表している。カンチレバーのダンピング係数は Δ とする。 Σ は探針とサンプルを構成する原子の径と波数を一定に保つ外部ループがあり、その条件を満たすサンプルの上での移動距離からサンプルの凹凸を測定する原理となっている。

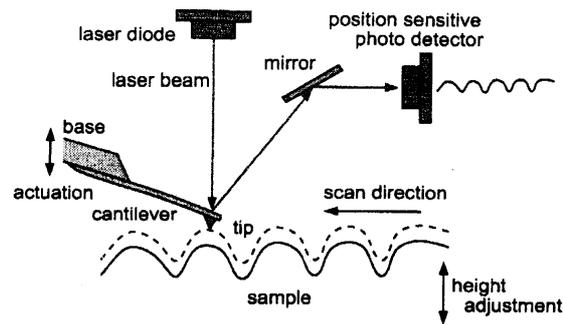


図 10: 原子間力顕微鏡 (DFM) の概略図と動作原理

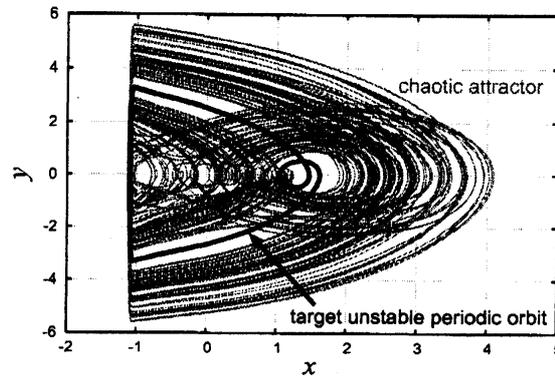


図 11: カオスアトラクタ [38] と埋め込まれた不安定周期軌道

する。さらに d は、正規化の定数 $4/27$ 、 ϵ は微小パラメータとする。文献 [35, 36] において、制御入力がない場合にこの方程式 (5) で表される系においてカオスが存在することは Melnikov の方法で証明されている。その発生は周期倍分岐による [38]。

図 11 は文献 [38] で示されたカオスアトラクタである。そして、TDFC のターゲットとなりうる不安定周期軌道が埋め込まれていて、その周期は励振周期と同じ 2π である。ターゲットの軌道が共振周波数が不安定化したものであれば、この領域で安定化することにより測定領域は広がる。さらに、過渡挙動が早く収束すれば測定のスキャン速度を上げることができる。

以後、係数は文献 [38] に従い、 $\Delta = 0.4$ 、 $\Omega = 1.0$ 、 $\Sigma = 0.3$ 、 $\epsilon = 0.1$ 、 $\alpha = 1.2$ そして $\Gamma = 20$ とする。 τ は $2\pi/\Omega$ に設定する。

5.2. TDFC の適用

Jamitzky et al. と Hu et al. による AFM におけるカオス振動の実験結果の報告 [33, 34] を受けて、TDFC の実際のカオス制御に適用することの妥当性を式 (5) を用いて数値計算により示す。Hu と Raman によるカオスの報告は、タッピングモードと言われる、探針とサンプルが接触する振動を利用したもので、確かにその場合もカオスが存在し同様に安定化できる [10]。しかしながら、ここでは双安定の場合のカオス制御についてのみ考える。

特に、TDFC を AM-DFM の感度を維持することに利用できないかどうかに興味深い。カオスが発生するパラメータ領域では、サンプルの表面測定データはダイナミックノイズにより感度が低下する [34]。ここで、制御信号を

$$u = K(y(t-\tau) - y(t)) \quad (6)$$

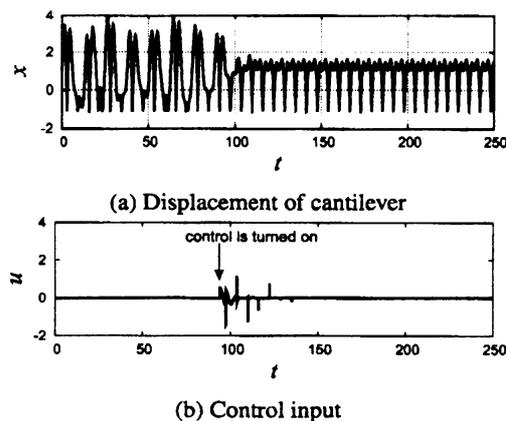


図 12: TDFC を用いた AFM に生じるカオスの目標軌道への安定化 [9].

と与える。 τ は目標軌道の周期から決まる遅れ時間を表し、 K はフィードバックゲインである。式 (6) ではスカラーの制御信号を考える。

図 12 は数値計算結果を示す。AM-DFM において、カオス振動が制御されている。ここでフィードバックゲインは $K = 0.2$ である。

TDFC 投入後、カオス振動は図 12(a) に示す通り安定化されて、制御入力は無視できる。すなわち、この振動は探針と表面との元の系のダイナミクスに戻っている。

6. おわりに

本稿は、時間遅れを有する系の力学を、時間遅れフィードバック制御を用いた力学系において議論したものである。特にその大域的位相構造は、時間遅れにより無限次元となることから、その理解が難しい。しかしながら、カオスの時間遅れフィードバック制御においては、目標軌道への収束が、元の系に含まれる安定化できない不安定周期軌道の不安定多様体の構造で支配されることを説明した。最後に、時間遅れフィードバックは現実の物理系への適用が容易であることから、時間遅れを用いたシステムの安定化とその特性の改善は新しい観点を与えてくれる。今後、さらに、様々な系への応用が期待されると同時に、一層、時間遅れを有する系の力学的構造を詳細に検討して行く必要がある。

本原稿をまとめるに当たり、図面等の使用を快諾頂いた山末耕平氏に謝意を表します。

References

- [1] T.Hikihara and K.Yamasue, Chap.36 in *Handbook of Chaos Control* (2nd Ed.) (Edited by E. Schöll and H.G.Shuster) (2008, Wiley-VCH)
- [2] Ott, E., Grebogi, C., and Yorke, A., *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990), p. 1196
- [3] Pyragas, K., *Phys. Lett. A* **170** (1992), p. 421
- [4] Hikihara T. and Kawagoshi T., *Phys. Lett. A* **211** (1996), p. 29
- [5] Hikihara T., Touno, M., and Kawagoshi, T., *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* **7** (1997), p. 2837
- [6] Hikihara, T. and Ueda, Y., *Chaos* **9** (1999), p. 887
- [7] Yamasue, K. and Hikihara, T., *Phys. Rev. E* **69** (2004), p. 056209
- [8] Yamasue, K. and Hikihara, T., *Phys. Rev. E* **73** (2006), p. 036209
- [9] Yamasue, K. and Hikihara T., *Rev. Sci. Instrum.* **77** (2006), p. 053703
- [10] Yamasue, K. and Hikihara T., *Proceedings of Int. Symp. on Nonlinear Theory and its Applications* (IEICE, 2006), p. 927
- [11] Ushio, T., *IEEE Trans. Circuits Syst., I: Fundam. Theory Appl.* **43** (1996), p. 815

- [12] Konishi, K., Ishii, M., and Kokame, H., *Phys. Rev. E* 54 (1996), p. 3455
- [13] Nakajima, H. and Ueda, Y., *Physica D* 111 (1998), p. 143
- [14] Just, W., Bernard, T., Ostheimer, M., Reibold, E., and Benner, H. *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997), p. 203
- [15] Just, W., *Physica D* 142 (2000), p. 153
- [16] Pyragas, K., *Phys. Rev. Lett.* 86 (2001), p. 2265
- [17] Socolar, J. E. S., Sukow, D. W., and Gauthier, D. J. *Phys. Rev. E* 50, 1994, p. 3245
- [18] Pyragas, K., and Tamaševičius, A., *Phys. Lett. A* 180, 1993, p. 99
- [19] Bielawski, S., Derozier, D., and Glorieux, P., *Phys. Rev. E*, 49, 1994, p. R971
- [20] Parmananda, P., Madrigal, R., Rivera, M., Nyikos, L., Kiss, I. Z., and Gáspár, V., *Phys. Rev. E*, 59, 1999, p. 5266
- [21] Pierre, T., Bonhomme, G., and Atipo, A., *Phys. Rev. Lett.*, 76, 1996, p. 2290
- [22] Just, W., Reibold, E., Kacperski, K., Fronsak, P., Holyst, J. A., and Benner, H., *Phys. Rev. E* 61 (2000), p. 5045
- [23] Moon, F. C. and Holmes, P. J., *J. Sound Vib.* 65 (1979), p. 275
- [24] Ueda, Y., Nakajima, H., Hikihara, T., and Stewart, H. B., in *Dynamical Systems Approaches to Nonlinear Problems in Systems and Circuits*, SIAM, Philadelphia, 1988, p. 128
- [25] Arrechi, F. T., Giacomelli, G., Lapucci, A., and Meucci, R., *Phys. Rev. A* 45 (1992), p. 4225
- [26] Giacomelli G. and Politi, A., *Phys. Rev. Lett.* 76 (1996), p. 2686
- [27] Binning, G. Quante, C. F., and Gerber, Ch., *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986), p. 930
- [28] Giessibl., *Rev. Mod. Phys.* 75 (2003), p. 949
- [29] Martin, Y., Williams and Wickramasinghe, H. K., *J. Appl. Phys.* 61 (1987), p. 4723
- [30] Albrecht, T. R., Grütter, P., GHorne, D., and Rugar, D., *J. Appl. Phys.* 69 (1991), p. 668
- [31] García, R. and Pérez, *Surf. Sci. Rep.* 47 (2002), p. 197
- [32] Mezić, I., private communication.
- [33] Jamitzky, F., Stark, M., Bunk, W., Heckl, W. M., and Stark, R. W., *Nanotechnology* 20, (2006), p. 38
- [34] Hu., S. and Raman, A., *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006), p. 036107.
- [35] Ashhab, M., Salapaka M. V., Dahleh, M., and Mezić, I., *Automatica* 35 (1999), p. 1663.
- [36] Ashhab, M., Salapaka M. V., Dahleh, M., and Mezić, I., *Nonlinear Dyn.* 20 (1999), p. 197.
- [37] Fang, Y., Dawson D., Feemster M., and Jalili N., *Proceedings of 2002 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition* (ASME, New York, 2002), p. 33539.
- [38] Basso, M., Giarre, L., Dahleh, M., and Mezić, I., *J. Dyn. Syst., Meas., Control* 122 (2000), p. 240.