数理解析研究所講究録
第 1638 巻 2009 年 112-117

圧力安定化特性曲線有限要素スキーム
A pressure-stabilized characteristic-curve finite element scheme

九州大学大学院数理学研究院
野津 裕史 (Hirofumi NOTSU)* 田端 正久 (Masahisa TABATA)†
Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 はじめに

$\Omega \subset \mathbb{R}^d\,(d=2,3)$ を有界領域, $\Gamma \equiv \partial\Omega$ を Ω の境界とし, Navier-Stokes 方程式;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - \nabla(2\nu D(u)) + \nabla p = f, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \nabla\cdot u = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u = g, & (x,t) \in \Gamma \times (0,T), \\ u = u^0, & x \in \Omega,\ t = 0, \end{cases} \tag{1}$$

を満たす関数 $(u,\ p) : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ を求める問題を考える. ここに, u, p はそれぞれ流速と圧力を表し, $\nu > 0$ は粘性係数, $f:\ \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^d$, $g:\ \Gamma \times (0,T) \to \mathbb{R}^d$, $u^0:\ \Omega \to \mathbb{R}^d$ は与えられた関数である. $D(u)$ は変形速度テンソル,

$$D_{ij}(u) \equiv \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) \quad (i,j = 1,\cdots,d),$$

であり,

$$[\nabla D(u)]_i \equiv \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial D_{ij}(u)}{\partial x_j} \quad (i = 1,\cdots,d),$$

である.

特性曲線有限要素スキーム [2, 8, 9, 11] は現れる行列が対称であり, 連立一次方程式の求解において利点がある. しかしながら, これらのスキームは下限上限条件 [4] を満たす要素 (P2/P1 要素など) を用いるため, 大きなメモリ量が要請される. 我々はこの点を改善した圧力安定化特性曲線有限要素スキーム [7, 6] を開発した. 本スキームは, 移流項の近似に特性曲線法, 要素選択に P1/P1 要素を採用し, 圧力安定化手法 [3] を適用した解法である. 現れる行列が対称であり, 大規模数値計算に有用である. 本稿では, スキームを述べたあと, 3 次元数値計算により信頼性と実用計算における有用性を確認する.

*E-mail : notsu@math.kyushu-u.ac.jp
†E-mail : tabata@math.kyushu-u.ac.jp

2 有限要素スキーム

時間刻み Δt と関数 $w:\ \Omega \to \mathbb{R}^d$ に対して, 関数 $X_1(w,\Delta t):\ \Omega \to \mathbb{R}^d$ を

$$X_1(w,\Delta t)(x) \equiv x - w(x)\Delta t$$

で定義する. 記号 $\circ$ は関数の合成を表し, Ω 上の関数 ψ に対して

$$\psi \circ X_1(w,\Delta t)(x) \equiv \psi(X_1(w,\Delta t)(x))$$

とする. $t^n \equiv n\Delta t$ とし, $\Omega \times (0,T)$ または $\Gamma \times (0,T)$ 上の関数 ψ に対して $\psi^n \equiv \psi(\cdot,t^n)$ とする. $N_T \equiv [T/\Delta t]$ とする. $\mathscr{T}_h \equiv \{K\}$ を領域 Ω の三角形 (四面体) 分割とする. 近似領域を

$$\Omega_h \equiv \mathrm{int} \bigcup \{K;\ K \in \mathscr{T}_h\}$$

とし, $\Gamma_h \equiv \partial\Omega_h$ とする. $g \in C^0(\Gamma \times [0,T])^d$ とし, P1/P1 有限要素空間を

$$\begin{aligned}
X_h &\equiv \Big\{ v_h \in C^0(\overline{\Omega}_h)^d;\ v_h|_K \in P_1(K)^d,\ \forall K \in \mathscr{T}_h \Big\},\\
M_h &\equiv \Big\{ q_h \in C^0(\overline{\Omega}_h);\ q_h|_K \in P_1(K),\ \forall K \in \mathscr{T}_h \Big\},\\
V_h(g^n) &\equiv \Big\{ v_h \in X_h;\ v_h(P) = g^n(P),\ \forall P:\ \Gamma_h\ \text{上の節点} \Big\},\\
Q_h &\equiv \Big\{ q_h \in M_h;\ (q_h, 1) = 0 \Big\},
\end{aligned}$$

により定義し, $V_h \equiv V_h(0)$ とする. 同じ記号 Π_h で $C^0(\overline{\Omega} \times [0,T])^d$ から X_h または $C^0(\overline{\Omega} \times [0,T])$ から M_h への補間作用素を表す. $f \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T])$ とし $f_h^n \equiv \Pi_h f^n$ とする. $u, w \in H^1(\Omega_h)^d$ に対して V_h 上の一次形式 $\mathscr{M}_h(u,w,\Delta t)$, $\mathscr{F}_h^n$ をそれぞれ

$$\langle \mathscr{M}_h(u,w;\Delta t),\ v_h \rangle \equiv \Big(\frac{u - w \circ X_1(w,\Delta t)}{\Delta t},\ v_h \Big), \quad \langle \mathscr{F}_h^n,\ v_h \rangle \equiv \big(f_h^n,\ v_h \big),$$

とし, $H^1(\Omega_h)^d \times H^1(\Omega_h)^d$, $H^1(\Omega_h)^d \times L^2(\Omega_h)$, $H^1(\Omega_h) \times H^1(\Omega_h)$ 上の双一次形式 a_h, b_h, $\mathscr{C}_h$ をそれぞれ,

$$a_h(u,v) \equiv 2\nu\big(D(u),\ D(v)\big), \quad b_h(v,q) \equiv -\big(\nabla \cdot v,\ q\big), \quad \mathscr{C}_h(p,q) \equiv -\delta \sum_{K \in \mathscr{T}_h} h_K^2 \big(\nabla p,\ \nabla q\big)_K,$$

とする. ここで, δ は正定数, h_K は要素 K の直径, $(\cdot,\cdot)_K$ は $L^2(K)^d$ 内積である.

u^0 の近似関数 u_h^0 を与えて (1) のための圧力安定化特性曲線有限要素スキーム;

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{M}_h(u_h^n, u_h^{n-1}; \Delta t), v_h \rangle + a_h(u_h^n, v_h) + b_h(v_h, p_h^n) + b_h(u_h^n, q_h) + \mathscr{C}_h(p_h^n, q_h) = \langle \mathscr{F}_h^n, v_h \rangle,\\
\forall (v_h, q_h) \in V_h \times Q_h,\ n = 1, \cdots, N_T,
\end{aligned} \tag{2}$$

により $\{(u_h^n, p_h^n) \in V_h(g^n) \times Q_h;\ n = 1, \cdots, N_T\}$ を求める.

3 数値計算結果

スキームは対称なため, 点ヤコビ前処理付 CG 法および CR 法を用いた [1, 5]. 合成関数を含む項の数値積分に, 2 次の数値積分公式 [10] を用いた. ノルム空間 X の関数集合 $\{\psi^n\}_{n=1}^{N_T}$ に対して, ノルム $\|\cdot\|_{l^2(X)}$ を

$$\|\psi\|_{l^2(X)} \equiv \left\{\Delta t \sum_{n=1}^{N_T} \|\psi^n\|_X^2\right\}^{1/2}$$

で定義する. (u,p), (u_h,p_h) をそれぞれ (1), (2) の解とする. 誤差として

$$Err \equiv \frac{\|\Pi_h u - u_h\|_{l^2(H^1(\Omega)^d)} + \|\Pi_h p - p_h\|_{l^2(L^2(\Omega))}}{\|u_h\|_{l^2(H^1(\Omega)^d)} + \|p_h\|_{l^2(L^2(\Omega))}}$$

を用いる. 以下の例 1 において, スキーム (2) の厳密解への数値的収束精度を調べる.

例 1 (テスト問題). 問題 (1) において, $\Omega = (0,1)^3$, $T=1$, $\nu = 1,\ 10^{-1},\ 10^{-2},\ 10^{-3}, 10^{-4}$ とする. 厳密解は

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}(x,t) = \begin{pmatrix} \sin(x_1+2x_2+x_3+t) - \sin(x_1+x_2+2x_3+t) \\ -\sin(2x_1+x_2+x_3+t) + \sin(x_1+x_2+2x_3+t) \\ \sin(2x_1+x_2+x_3+t) - \sin(x_1+2x_2+x_3+t) \\ \sin(x_1+x_2+x_3+t) - 8\sin^3(1/2)\sin(t+3/2) \end{pmatrix}$$

である.

$\delta = 0.05$, $u_h^0 \equiv \Pi_h u^0$ とした. N_Ω を立方体領域の一辺の分割数, $h \equiv 1/N_\Omega$ とする. $\Delta t = h$ とし, $N_\Omega = 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64$ に対してほぼ一様なメッシュで計算を行った. 図 1 左図は $N_\Omega = 8$ のメッシュであり, 右図は Δt に対する Err の両対数グラフである. $\Delta t\,(=h)$ に関して概ね 1 次精度である結果が得られた.

$Re \equiv 1/\nu$ とする. 以下の 3 次元合法キャビティ流れ問題 ($Re = 1{,}000$) の数値計算結果を述べる.

例 2 (合法キャビティ流れ問題, $Re = 1{,}000$). (1) において $\nu = 10^{-3}$, $f=0$,

$$g_1(x,t) = \begin{cases} 16x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) & (x_3 = 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}, \qquad g_2 = g_3 = 0,$$

とし, u^0 は各メッシュでの定常 Stokes 方程式の解とした (図 2).

スキーム (2) において $\delta = 0.05$ とした. 境界層を考慮して, 図 3 の非一様な 2 つのメッシュを採用した. 左図をメッシュF (Fine mesh), 右図をメッシュC (Coarse mesh) と呼ぶ. メッシュ F のとき $\Delta t = 1/32$, メッシュ C のとき $\Delta t = 1/24$ とした. 両メッシュにおいて解は数値的に定常解に収束した. 図 4 の上左図は両メッシュでの定常解の $u_{h1}(0.5,0.5,\cdot)$, $u_{h3}(\cdot,0.5,0.5)$ のグラフであり, ほぼ一致している. 図 4 の上右, 下左, 下右図は, メッシュF による定常解の流速ベクトルを各平面に射影した図であり, 流れの特徴が捉えられている.

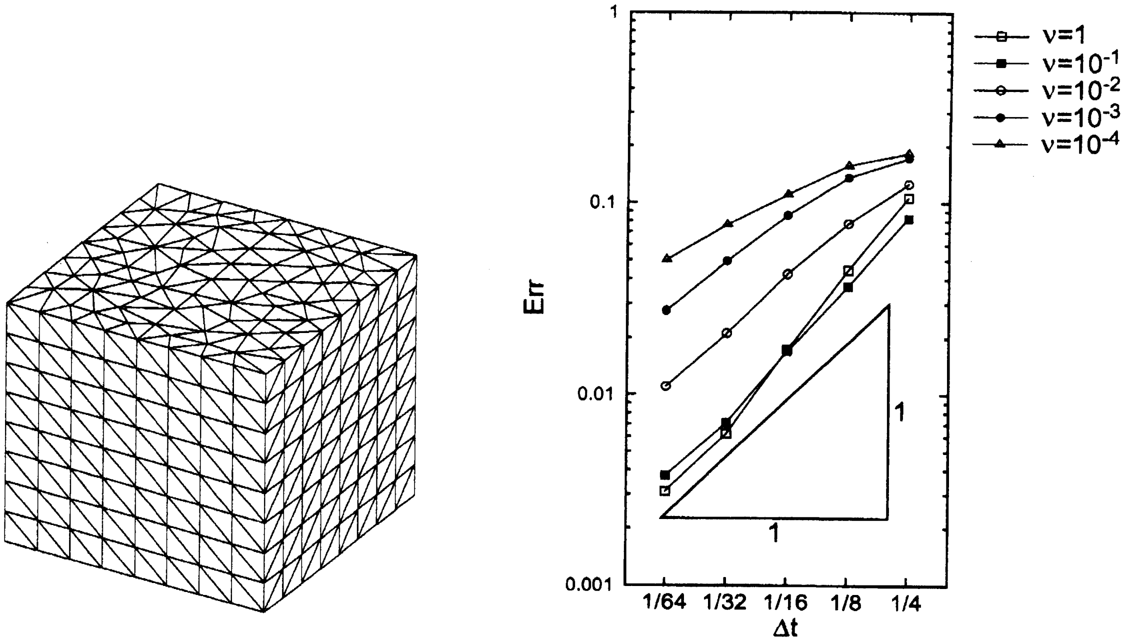

図 1: $N_\Omega = 8$ のメッシュ (左) および Δt に対する Err の両対数グラフ (右).

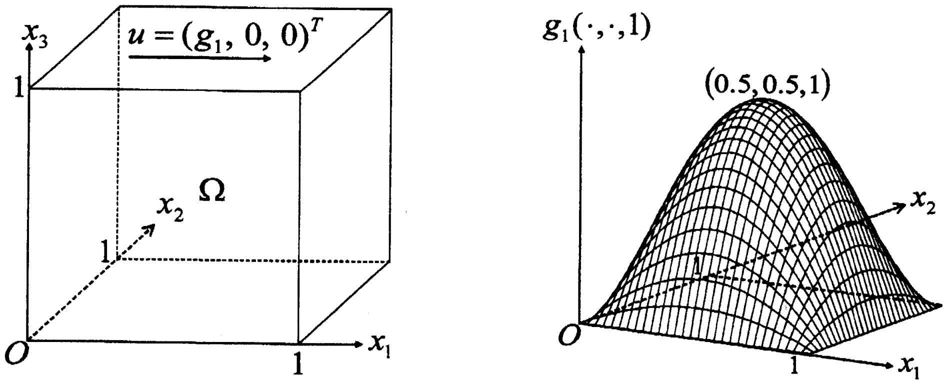

図 2: 問題 2 の設定 (左) と $g_1(\cdot,\cdot,1)$ のグラフ (右).

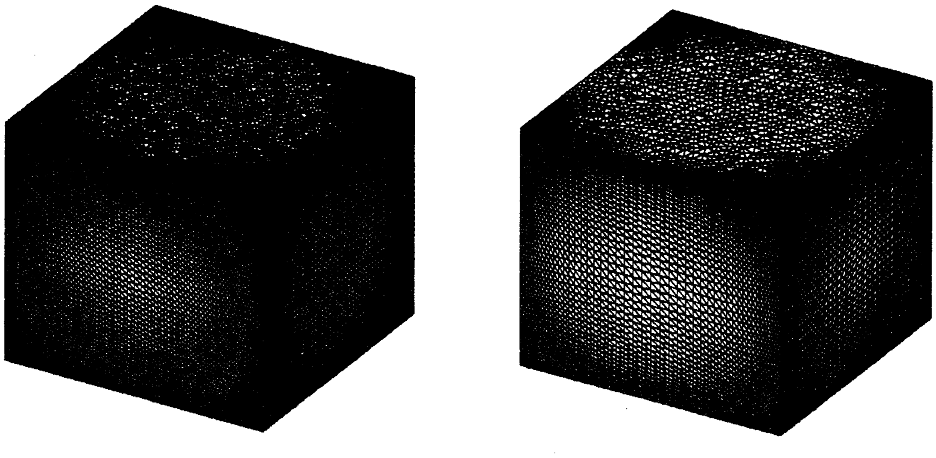

図 3: 例 2 に用いたメッシュ, 左: Fine mesh ($N_\Omega = 64$), 右: Coarse mesh ($N_\Omega = 48$).

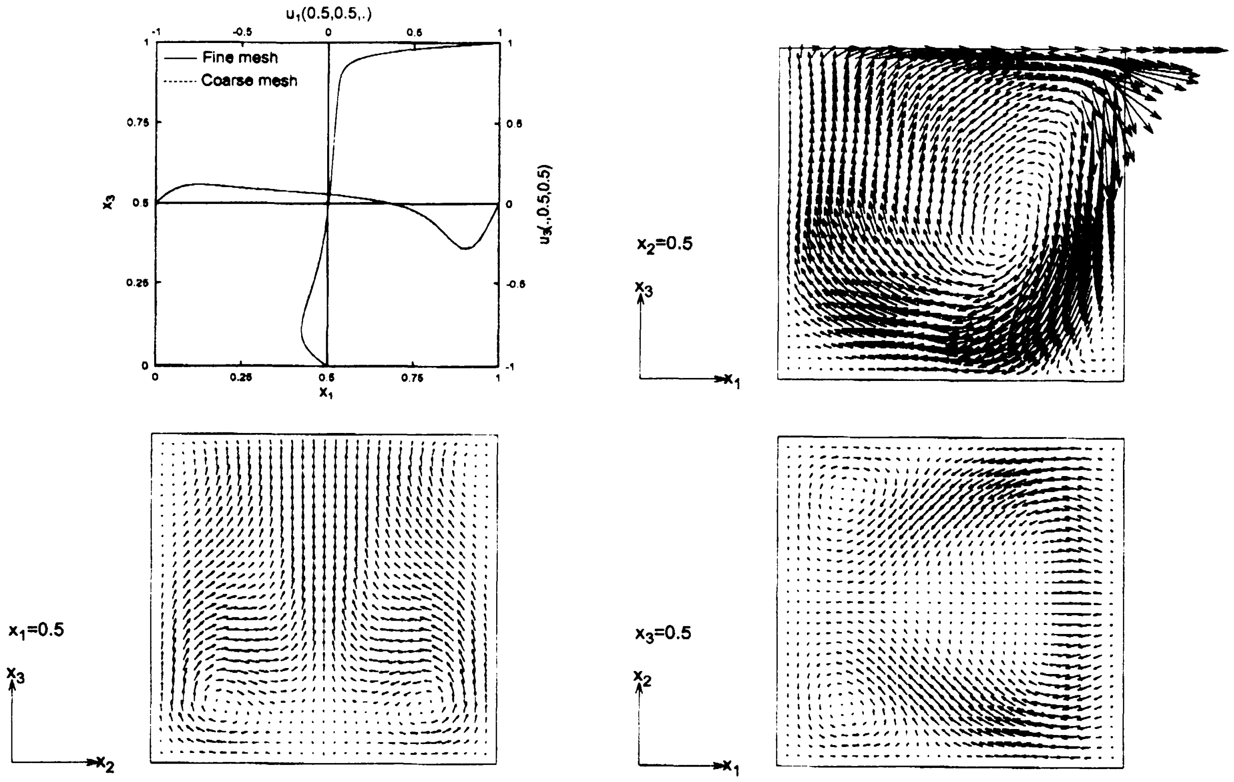

図 4: 両メッシュでの $u_{h1}(0.5,0.5,\cdot)$ および $u_{h3}(\cdot,0.5,0.5)$ のグラフ (上左) と流速ベクトルの各平面への射影図 ($x_2 = 0.5$ (上右), $x_1 = 0.5$ (下左), $x_3 = 0.5$ (下右)).

4 結び

Navier-Stokes 方程式のための圧力安定化特性曲線有限要素スキームを述べた. スキームは対称で, 大規模数値計算に有用である. 3 次元テスト問題において, スキームの数値的収束精度が空間および時間について 1 次であることが観察され, 信頼性を確認できた. $Re = 1,000$ の 3 次元合法キャビティ流れ問題において, 流れの特徴を捉えた有限要素解を得られた. これはスキームの実用性を示す結果であるといえる.

謝辞

本研究は, 日本学術振興会科学技術研究費補助金基盤研究 (S), No. 16104001 から支援を受けた.

参考文献

[1] Barrett, R., Berry, M., Chan, T. F., Demmel, J., Donato, J., Dongarra, J., Eijkhout, V., Pozo, R., Romine, C. and van der Vorst, H., *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, SIAM, Philadelphia, 1994.

[2] Boukir, K., Maday, Y., Métivet, B. and Razafindrakoto, E., A high-order characteristics/finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **25**, 1997, pp. 1421–1454.

[3] Brezzi, F. and Douglas Jr., J., Stabilized mixed methods for the Stokes problem, *Numerische Mathematik*, **53**, 1988, pp. 225–235.

[4] Girault, V. and Raviart, P.-A., *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer, Berlin, 1986.

[5] 森正武, 杉原正顕, 室田一雄, 線形計算, 岩波, 東京, 1994.

[6] Notsu, H., Numerical computations of cavity flow problems by a pressure stabilized characteristic-curve finite element scheme, *Transactions of Japan Society for Computational Engineering and Science*, **2008**, 2008, No.20080032.

[7] 野津裕史, 田端正久, Navier-Stokes 方程式のための圧力安定化・特性曲線法結合有限要素スキーム, 日本応用数理学会論文誌, **18**, No. 3, 2008, pp. 427–445.

[8] Notsu, H. and Tabata, M., A single-step characteristic-curve finite element scheme of second order in time for the incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of Scientific Computing*, **38**, No.1, 2009, pp.1–14.

[9] Pironneau, O., On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, **38**, 1982, pp. 309–332.

[10] Stroud, A. H., *Approximate calculation of multiple integrals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

[11] Süli, E., Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations, *Numerische Mathematik*, **53**, 1988, pp. 459–483.