数理解析研究所講究録
第 1638 巻 2009 年 28-37

一般 J 積分の最適設計問題への適用

広島国際学院大学・情報デザイン学部　大塚 厚二 (Khoji Ohtsuka)
Faculty of Information Design
Hiroshima Kokusai Gakuin University

偏微分方程式境界値問題の弱解が特異性を持っているなど滑らかさが期待できないときにもポテンシャルエネルギーの形状微分が計算できるのが一般 J 積分法の特徴である．本講演では偏微分方程式・システムにおける弱解に対し，解の滑らかさを仮定せずにコスト関数の形状微分を導出する方法について述べる．

1 一般 J 積分

問題 $\mathsf{P}(f, V(\Omega))$： 局所 Lipschitz 条件を満たす有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d\,(d \geq 2)$，関数 $(\xi, z, \zeta) \mapsto \widehat{W}(\xi, z, \zeta) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d})$ 及び $f \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^m)$ が与えられたとき，偏微分方程式境界値問題の弱解は，次の汎関数を関数空間 $V(\Omega) \subset H^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ で最小にする元 $u \in V(\Omega)$ として与えられる．

$$\mathcal{E}(v; f, \Omega) = \int_\Omega \left\{\widehat{W}(x, v, \nabla v) - fv\right\}$$

なお $m = 1$ のとき偏微分方程式で，$m > 1$ となる整数のとき弾性体などを記述する偏微分システムとなり，領域 D で定義された m 個の成分を持つ関数によるソボレフ空間 $H^s(D; \mathbb{R}^m)$ のノルムを $\|\cdot\|_{s,2,D}$，1 階微分が有界となる関数の集合 $W^{1,\infty}(D; \mathbb{R}^m)$ のノルムを $\|\cdot\|_{1,\infty,D}$，$\partial_j = \partial/\partial x_j$，$a_i b_i = \Sigma_i a_i b_i$ で表す．また，積分における体積要素，面要素，線要素は省略する．

本報告での手法は線形問題に限定され，解の一意性が必要なので次を仮定する．

(H1) 関数 $v, w \in V(\Omega)$ に対して

$$\delta\widehat{W}(v)[w] = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{-1}\left\{\widehat{W}(x, v + \epsilon w, \nabla v + \epsilon \nabla w) - \widehat{W}(x, v, \nabla v)\right\}$$

とするとき，$v \mapsto \delta\widehat{W}(v)$ は $V(\Omega)$ から共役空間 $V(\Omega)^*$ への線形写像である．

(H2) 任意の $v, w \in V(\Omega)$ に対し，次の不等式を満たす v, w に依存しない定数 $C_1 > 0$ が存在する．

$$\left|\int_\Omega \delta\widehat{W}(v)[w]\right| \leq C_1 \|v\|_{1,2,\Omega} \|w\|_{1,2,\Omega}$$

(H3) 任意の $v \in V(\Omega)$ に対し，次の不等式を満たす v に依存しない定数 $C_2 > 0$ が存在する.

$$\int_\Omega \delta\widehat{W}(v)[v] \geq C_2 \|v\|_{1,2,\Omega}^2$$

条件 (H1)〜(H3) を満たすとき $a_\Omega(v,w) = \int_\Omega \delta\widehat{W}(v)[w]$ は $V(\Omega) \times V(\Omega)$ での２次形式を与え，解 u がただ一つ存在し，$\int_\Omega \widehat{W}(x,v,\nabla v) = \frac{1}{2}a_\Omega(v,v)$ となる.

1.1 一般 J 積分の定義

局所 Lipschitz 条件を満たす有界領域 $\omega \subset \mathbb{R}^d$ とベクトル場 $\mu = (\mu^1, \cdots, \mu^d) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ に対し，一般 J 積分 $\mathcal{J}_\omega(u,\mu)$ を $\omega \cap \Omega$ における体積積分 $R_\omega(u,\mu)$ と $\partial(\omega \cap \Omega)$ における面積分 $P_\omega(u,\mu)$ との和 $\mathcal{J}_\omega(u,\mu) = P_\omega(u,\mu) + R_\omega(u,\mu)$ で定義する.

$$\begin{aligned}
P_\omega(u,\mu) &= \int_{\partial(\omega\cap\Omega)} \left\{\widehat{W}(u)(\mu\cdot n) - \widehat{T}(u)\cdot(\mu\cdot\nabla u)\right\} \\
R_\omega(u,\mu) &= -\int_{\omega\cap\Omega} \left\{\mu\cdot\nabla_\xi\widehat{W}(u) + f(\mu\cdot\nabla u) - \partial_{\zeta_{ij}}\widehat{W}(u)\,\partial_j\mu^k\partial_k u_i + \widehat{W}(u)\operatorname{div}\mu\right\} \\
\widehat{T}_i(u) &= n_j\partial_{\zeta_{ij}}\widehat{W}(\xi,z,\zeta)\Big|_{(\xi,z,\zeta)=(x,u,\nabla u)}
\end{aligned}$$

ここで $\widehat{W}(u) = \widehat{W}(x,u,\nabla u)$，$n = (n_1,\cdots,n_d)$ は $\partial(\omega\cap\Omega)$ での外向き単位法線ベクトルである.

一般 J 積分は次の性質をもつ.

1. (弱解の R 積分有界性) $R_\omega(u,\mu)$ は $u \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$ に対して有限な値を取る.
2. (正則解ゼロ値) $u|_{\omega\cap\Omega} \in H^2(\omega\cap\Omega;\mathbb{R}^m)$ のとき，$\mathcal{J}_\omega(u,\mu) = 0$ が任意のベクトル場 $\mu \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ に対して成り立つ.
3. (加法性) ω が２つの領域 ω_1, ω_2 に分かれ，すなわち，$\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$ かつ閉包 $\overline{\omega} = \overline{\omega_1} \cap \overline{\omega_2}$ のとき，解 u が $\partial\omega_1$ および $\partial\omega_2$ の近傍で H^2 に属するなら
$$\mathcal{J}_\omega(u,\mu) = \mathcal{J}_{\omega_1}(u,\mu) + \mathcal{J}_{\omega_2}(u,\mu)$$

簡単のため $\omega_1 \subset \omega$，$\omega_2 = \omega \setminus \overline{\omega_1}$ として加法性について説明する：$n^{(1)}$ を $\partial\omega_1$ での ω_1 の外向き単位法線，$n^{(2)}$ を $\partial\omega_2$ での ω_2 の外向き単位法線とすると

$$n^{(1)}(x) = -n^{(2)}(x) \quad \text{for } x \in \partial\omega_1 = \partial\omega_1 \cap \partial\omega_2$$

となるので積分の加法性から

$$\begin{aligned}
P_\omega(u,\mu) + R_\omega(u,\mu) &= P_\omega(u,\mu) + R_{\omega_1}(u,\mu) + R_{\omega_2}(u,\mu) + P_{\omega_1}(u,\mu) - P_{\omega_1}(u,\mu) \\
\mathcal{J}_{\omega_2}(u,\mu) &= P_\omega(u,\mu) + R_{\omega_2}(u,\mu) - P_{\omega_1}(u,\mu)
\end{aligned}$$

から加法性を得る.

偏微分方程式によって境界条件に関係なく一般 J 積分は次のようになる.

ポアソン方程式 $-\Delta u = f$ in Ω

$$P_\omega(u,\mu) = \int_{\partial(\omega\cap\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}|\nabla u|^2(\mu\cdot n) - \frac{\partial u}{\partial n}(\mu\cdot\nabla u) \right\}$$
$$R_\omega(u,\mu) = -\int_{\omega\cap\Omega} \left\{ f(\mu\cdot\nabla u) - (\nabla u\cdot\nabla\mu^k)\partial_k u + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \operatorname{div}\mu \right\}$$

楕円型方程式 $-\partial_i a_{ij}\partial_j u = f$ in Ω ただし, $a_{ij} = a_{ji}$

$$P_\omega(u,\mu) = \int_{\partial(\omega\cap\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}(a_{ij}\partial_j u\partial_i u + bu^2)(\mu\cdot n) - (n_i a_{ij}\partial_j u)(\mu\cdot\nabla u) \right\},$$
$$\begin{aligned} R_\omega(u,\mu) = -\int_{\omega\cap\Omega} \Big\{ &\frac{1}{2}((\mu\cdot\nabla a_{ij})\partial_j u\partial_i u + (\mu\cdot\nabla b)u^2) + f(\mu\cdot\nabla u) \\ &-(a_{ij}\partial_j u\partial_i\mu^k)\partial_k u + \frac{1}{2}(a_{ij}\partial_j u\partial_i u + bu^2)\operatorname{div}\mu \Big\} \end{aligned}$$

線形弾性 $-\partial_j\sigma_{ij}(x,u) = f_i$ in Ω

$$P_\omega(u,\mu) = \int_{\partial(\omega\cap\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}\sigma_{ij}(x,u)e_{ij}(u)(\mu\cdot n) - n_j\sigma_{ij}(x,u)(\mu\cdot\nabla u_i) \right\}$$
$$\begin{aligned} R_\omega(u,\mu) = -\int_{\omega\cap\Omega} \Big\{ &\frac{1}{2}(\mu\cdot\nabla C_{ijkl})e_{kl}(u)e_{ij}(u) + f_i(\mu\cdot\nabla u_i) \\ &- \sigma_{ij}(x,u)\partial_j\mu^k\partial_k u_i + \frac{1}{2}\sigma_{ij}(x,u)e_{ij}(u)\operatorname{div}\mu \Big\} \end{aligned}$$

ここで $e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$ は微小ひずみテンソル, $\sigma_{ij}(x,u) = C_{ijkl}(x)e_{ij}(u)$ は応力でフックのテンソル $C_{ijkl}(x) = C_{jilk}(x) = C_{klij}(x)$ により関係づけられる.

コッセラ弾性 [8][5]

$$\begin{aligned} P_\omega(\tilde u,\mu) = \int_{\partial(\omega\cap\Omega)} \Big\{ &\widehat{W}(\tilde u)(X\cdot n) - (n_j\sigma_{E,ij}(u,\omega))(\mu\cdot\nabla u_i) \\ &-(n_j\sigma_{R,ij}(u,\omega))(\mu\cdot\nabla\omega_i) \Big\}, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} R_\omega(\tilde u,\mu) = -\int_{\omega\cap\Omega} \{ &f_i(\mu\cdot\nabla u_i) - \sigma_{E,ij}(u,\omega)\partial_j\mu^p\partial_p u_i \\ &-\sigma_{R,ij}(u,\omega)\partial_j\mu^p\partial_p\omega_i + \widehat{W}(\tilde u)\operatorname{div}\mu \Big\}, \end{aligned}$$

ここで ε_{kij} は置換テンソルで定数 $\lambda,\mu,\alpha,\epsilon,\upsilon,\beta$ は次の条件

$$\mu > 0,\ 3\lambda + 2\mu > 0,\ \alpha > 0,\ \upsilon > 0,\ 3\epsilon + 2\upsilon > 0,\ \beta > 0,$$

を満たし，$\widehat{W}(\tilde{u})$ は変位ベクトル $u=(u_1,\cdots,u_d)$ と粒子の回転を表す $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_d)$ との対 $\tilde{u}=(u,\omega)$ および δ_{ij} をクロネッカのデルタに対して

$$
\begin{aligned}
2\widehat{W}(\tilde{u}) = &\{(3\lambda+2\mu)/3\}|\operatorname{div} v|^2 + (\mu/2)\sum_{i,j}|\partial_j u_i + \partial_i u_j - (2/3)\delta_{ij}\operatorname{div} u|^2 \\
&+ (\alpha/2)\sum_{i,j}|\partial_j u_i - \partial_i u_j + 2\varepsilon_{kji}\omega_k|^2 + \{(3\epsilon+2\upsilon)/3\}|\operatorname{div}\omega|^2 \\
&+ (\upsilon/2)\sum_{i,j}|\partial_i\omega_j + \partial_j\omega_i - (2/3)\delta_{ij}\operatorname{div}\omega|^2 \\
&+ (\beta/2)\sum_{i,j}|\partial_j\omega_i - \partial_i\omega_j|^2,
\end{aligned} \tag{1}
$$

そして

$$
\begin{aligned}
\sigma_{E,ij}(u,\omega) =&\lambda\delta_{ij}\operatorname{div} u + (\mu+\alpha)\partial_i u_j + (\mu-\alpha)\partial_j u_i - 2\alpha\varepsilon_{ijk}\omega_k, \\
\sigma_{R,ij}(u,\omega) =&\epsilon\delta_{ij}\operatorname{div}\omega + (\upsilon+\beta)\partial_i\omega_j + (\upsilon-\beta)\partial_j\omega_i.
\end{aligned}
$$

このとき，関数空間

$$V(\Omega)=\left\{\tilde{u}=(v,\omega)\in W^{1,2}(\Omega)^6 \,|\, \tilde{u}=0 \quad \text{on } \Gamma_D\right\}.$$

で条件 (H3) を満たすことが [5] において証明されている.

1.2 一般 J 積分の基本定理

次に，領域 Ω の微小変形 $\{\Omega(t)\}_{0\le t<\epsilon}$ を考え，Ω と $\Omega(t)$ は次の性質をもつ写像 Φ_t で結びついている.

(M1) $t\mapsto\Phi_t\in C^1\left([0,\varepsilon);W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)\right)$

(M2) Φ_t は $\mathbb{R}^d$ から $\mathbb{R}^d$ への同相写像で，$\Phi_t(\Omega)=\Omega(t)$

問題 P$(f,V_t(\Omega(t)))$： 次の汎関数を関数空間 $V_t(\Omega(t))=\{w:w=v\circ\Phi_t, v\in V(\Omega)\}$ で次のエネルギー汎関数を最小にする元を $u(t)\in V_t(\Omega(t))$ とする.

$$\mathcal{E}(w;f,\Omega(t))=\int_{\Omega(t)}\left\{\widehat{W}(x,w,\nabla w)-fw\right\}$$

定理 1 条件 (H1)〜(H3) を満たす楕円型境界問題 P$(f,V(\Omega))$ に対し，(M1)〜(M2) を満たす写像による摂動問題 P$(f,V_t(\Omega(t)))$ を考えると

$$\left.\frac{d}{dt}\mathcal{E}(u(t);f,\Omega(t))\right|_{t=0}=-R_\Omega(u,\mu_\Phi)-\int_{\partial\Omega}fu(\mu_\Phi\cdot n)$$

が成り立つ. ここで $\mu_\Phi=d\Phi_t/dt|_{t=0}$.

この定理の最初の証明は [6] にあり，(M1) の条件は $t \mapsto \Phi_t \in C^2\left([0,\varepsilon);C^\infty\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)\right)$ であった．その後 [7] で，$t \mapsto \Phi_t \in C^2\left([0,\varepsilon);W^{2,\infty}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)\right)$ に弱めることができ，最近の木村・若野氏の論文 [3][4] では $t \mapsto \Phi_t \in C^2\left([0,\varepsilon);W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)\right)$ で証明がされている．

2 解の形状感度解析と最適設計問題

この定理は，ポテンシャルエネルギーの形状感度解析 [9] を与えている．形状感度解析の多くの論文では，解の形状感度解析

$$u' = \lim_{t\to 0} t^{-1}\left(u(t)\circ\Phi_t - u\right)$$

を求めてからポテンシャルエネルギーの形状感度解析を計算するので，解の滑らかさが必要になる．この定理では解の滑らかさは必要ない．

しかし，エネルギー以外での計算では解の形状感度解析が必要となる．そこで，解の滑らかさを仮定せずに一般 J 積分を使って解の形状感度解析を与える．

定理 2 関数 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ を与えたとき，問題 $\mathrm{P}(\varphi,\Omega)$ の弱解を u_φ とすると

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} u(t)\,\varphi = \delta R_\Omega\left(u,u_\varphi;\mu_\Phi\right) + \int_{\partial\Omega} f u_\varphi\left(\mu_\Phi\cdot n\right)$$

が成り立つ．ここで，$\delta R_\Omega\left(u,u_\varphi;\mu_\Phi\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{-1}\left\{R_\Omega\left(u+\epsilon u_\varphi;\mu_\Phi\right) - R_\Omega\left(u;\mu_\Phi\right)\right\}$．さらに，

$$\left|\delta R_\Omega\left(u,u_\varphi;\mu_\Phi\right) + \int_{\partial\Omega} f u\left(\mu_\Phi\cdot n\right)\right| \le C_3\left\|f\right\|_{1,2,\mathbb{R}^d}\left\|\varphi\right\|_{0,2,\mathbb{R}^d}\left\|\mu_\Phi\right\|_{1,\infty,\mathbb{R}^d}$$

となり，$C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ は $H^0(\Omega;\mathbb{R}^m) = L^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$ で稠密なので $t^{-1}\left(u(t)\circ\Phi_t - u\right)$ は $L^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$ で弱収束する時

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} u(t)\,\varphi = \int_\Omega\left(\dot{u} - \mu\cdot\nabla u\right)\varphi,\ \dot{u} = \lim_{t\to 0} t^{-1}\left(u(t)\circ\Phi_t - u\right)$$

となる．

証明は [7] を参照されたい．

形状感度解析では，$\dot{u}$ を物質微分，$u' = \dot{u} - \mu\cdot\nabla u$ を形状微分と呼ぶ．上記の結果から $u' \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$ である．次に最適形状を決めるコスト関数が偏微分方程式境界値問題の解 $u(\Omega)$ に対して

$$J^o\left(u(\Omega)\right) = \int_\Omega g\left(u(\Omega)\right)$$

で与えられるとき，コスト関数の領域 Ω に関する勾配を計算する．もし，$z \mapsto g(z) \in H^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$，$u(\Omega) \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$，かつ領域摂動 $\{\Omega(t)\}_{0\le t<\epsilon}$ に対して $u' \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$ となるとき，次を得る．

$$\left.\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} g\left(u(t)\right)\right|_{t=0} = \int_\Omega \nabla_z g(u)\,u' + \int_{\partial\Omega} g(u)\left(\mu_\Phi\cdot n\right)$$

命題 3 問題 $\mathrm{P}(\nabla_z g(u), \Omega)$ の弱解を p とするとき，

$$\int_\Omega \nabla_z g(u)\, u' = \delta R_\Omega (u, p; \mu_\Phi) + \int_{\partial\Omega} fp\,(\mu_\Phi \cdot n)$$

を得る．よって

$$\left.\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} g(u(t))\right|_{t=0} = \delta R_\Omega (u, p; \mu_\Phi) + \int_{\partial\Omega} (fp + g(u))\,(\mu_\Phi \cdot n) \tag{2}$$

領域 Ω が多面体 (または多角形) 領域のとき，u_h, p_h を一次連続要素による有限要素近似とするとき，メッシュサイズ h をゼロに近づけるなら $\delta R_\Omega (u_h, p_h; \mu_\Phi) \to \delta R_\Omega (u, p; \mu_\Phi)$ となるので有限要素法で上式での右辺は近似計算ができる．

解が滑らかとなる場合，すなわち．$u, p \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$ のときは $\mathcal{J}_\Omega (u + \epsilon p, \mu_\Phi) = 0$ となるので $\delta R_\Omega (u, p; \mu_\Phi) = -\delta P_\Omega (u, p; \mu_\Phi)$ が成り立ち

$$\left.\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} g(u(t))\right|_{t=0} = -\delta P_\Omega (u, p; \mu_\Phi) + \int_{\partial\Omega} (fp + g(u))\,(\mu_\Phi \cdot n)$$

境界条件が Dirichlet 条件の場合は $V(\Omega) = H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ となり

$$\left.\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} g(u(t))\right|_{t=0} = \delta R_\Omega (u, p; \mu_\Phi) + \int_{\partial\Omega} g(u)\,(\mu_\Phi \cdot n)$$

さらに解が滑らかなら

$$\left.\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} g(u(t))\right|_{t=0} = \int_{\partial\Omega} \left\{\widehat{T}(u)\,\partial_n p + \widehat{T}(p)\,\partial_n u - \delta\widehat{W}(u)[p] + g(u)\right\}(\mu_\Phi \cdot n)$$

を得る．

2.1 ポアソン方程式で解が正則

従来の結果と比較するためポアソン方程式で解が滑らかな場合について考える．境界条件が Dirichlet のとき，

$$\left.\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} g(u(t))\right|_{t=0} = -\delta P_\Omega (u, p; \mu_\Phi) + \int_{\partial\Omega} g(u)\,(\mu_\Phi \cdot n)$$

で $\widehat{T}(u) = \partial_n u, \widehat{T}(p) = \partial_n p, \delta\widehat{W}(u)[p] = \nabla u \cdot \nabla p = (\partial_n u)(\partial_n p)$ となるので，

$$\left.\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} g(u(t))\right|_{t=0} = \int_{\partial\Omega} \{\partial_n u \partial_n p + g(u)\}\,(\mu_\Phi \cdot n)$$

を得る．境界条件が Neumann 条件の場合は $V(\Omega) = H^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$ で，$\widehat{W}(u) = \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2 + u^2\right)$ に対して

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} g(u(t))\bigg|_{t=0} = \int_{\partial\Omega}\{-(\nabla u\cdot\nabla p + up) + fp + g(u)\}(\mu_\Phi\cdot n)$$

2.2 ポアソン方程式混合境界問題

境界条件が Dirichlet と Neumann の混合条件の場合は $u = 0$ on Γ_D，$\widehat{T}(u) = 0$ on Γ_N とし，$B(\varepsilon)$ を $\Gamma_{DN} = \overline{\Gamma_D}\cap\overline{\Gamma_N}$ の開近傍

$$B(\varepsilon) = \left\{x\in\mathbb{R}^d : \min_{y\in\Gamma_{DN}}|x-y| < \varepsilon\right\}$$

として $\Omega(\varepsilon) = \Omega\setminus B(\varepsilon)$ とすることで $u|_{\Omega(\varepsilon)}, p|_{\Omega(\varepsilon)}\in H^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$ が予想でき，次を使って詳しい性質を調べることが出来る．

$$\delta R_\Omega(u,p;\mu_\Phi) = -\delta P_{\Omega(\varepsilon)}(u,p;\mu_\Phi) + \delta R_{B(\varepsilon)}(u,p;\mu_\Phi)$$

2.2.1 2次元問題

以下，$d = 2$ で $\Gamma_{DN} = \{\gamma_1,\gamma_2\}$ と接合点が 2 点として話を進める．領域 $\omega(\varepsilon)$ では解は

$$u = \sum_{j=1}^{2} k(\gamma_j)\, r(\gamma_j)^{1/2}\sin(\theta(\gamma_j)/2) + u_R,\quad u_R\in H^2(\omega(\varepsilon)\cap\Omega)$$

の構造を持つ．ここで $(r(\gamma_j),\theta(\gamma_j))$ は γ_j を中心とする局所極座標で，$\theta(\gamma_j)$ は Dirichlet 境界方向を零とする接線からの角度とし，$k(\gamma_j)$ は定数である．このことから

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial(\omega(\varepsilon)\cap\Omega)}\left\{\widehat{W}(u)(\mu\cdot n) - \partial_n u(\mu\cdot\nabla u)\right\} = \frac{\pi}{8}\sum_{j=1}^{2} k(\gamma_j)^2\mu(\gamma_j)\cdot\tau(\gamma_j)\,\mathrm{sign}_D(\tau(\gamma_j))$$

を得る．ここで，$\tau(\gamma_j)$ は γ_j における単位接ベクトルで，$\tau(\gamma_j)$ の向きが Dirichlet 境界のとき $\mathrm{sign}_D(\tau(\gamma_j)) = 1$ で，反対向きのとき $\mathrm{sign}_D(\tau(\gamma_j)) = -1$ と定義する．よって

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{E}(w(\Phi_t);f,\Phi_t)\bigg|_{t=0} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega\setminus\omega(\varepsilon)}\left\{\widehat{W}(u)(\mu\cdot n) - \partial_n u(\mu\cdot\nabla u)\right\}\\ &\quad - \frac{\pi}{8}\sum_{j=1}^{2} k(\gamma_j)^2\mu(\gamma_j)\cdot\tau(\gamma_j)\,\mathrm{sign}_D(\tau(\gamma_j)) + \int_{\Gamma_N} fu(\mu\cdot n)\end{aligned}$$

すなわち，

$$-R_{\Omega}(u,\mu) = P_{\Omega}(u,\mu) - \frac{\pi}{8}\sum_{j=1}^{2} k(\gamma_j)^2 \mu(\gamma_j)\cdot\tau(\gamma_j)\,\mathrm{sign}_D(\tau(\gamma_j))$$

$$\mathcal{J}_{\Omega}(u,\mu) = P_{\Omega}(u,\mu) + R_{\Omega}(u,\mu) = \frac{\pi}{8}\sum_{j=1}^{2} k(\gamma_j)^2 \mu(\gamma_j)\cdot\tau(\gamma_j)\,\mathrm{sign}_D(\tau(\gamma_j))$$

を得る．このように，接合点の移動は接線方向にのみ影響を受け，境界の移動は法線方向の感度解析にのみ影響を受けている．ただし，極限においては接合点の切り抜き方 $B(\varepsilon)$ に依存する可能性があると思われる．

2.3 一般J積分と力法

形状感度解析の式 (2) から，より最適な形状 Ω^o を見つける安定な方法として畔上氏 [2] の力法がある．変分法に基づき，解の滑らかさを要求しない，そして数学に乗りやすい利点をもつ力法で最適設計を求める方法について説明する．

1. 最初に候補となる領域 Ω を考え，変分問題 $\mathrm{P}(f, V(\Omega))$ の解を有限要素計算する．有限要素解を u_h とする．
2. 随伴問題 $\mathrm{P}(\nabla_z g(u), \Omega)$ の弱解 p を，$\mathrm{P}(\nabla_z g(u_h), \Omega)$ の近似解 p_h として求める．
3. ヒルベルト空間 $H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ での強圧的で有界な双線形形式 $b(\eta,\eta')$ を考える．
4. つぎに，任意の $\eta \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ に対して次の関係式を満たす μ を求める．有限要素計算では u, p のところに u_h, p_h を代入して有限要素計算ができる．
$$-b(\mu,\eta) = \delta R_{\Omega}(u,p;\eta) + \int_{\partial\Omega}(fp + g(u))(\eta\cdot n)$$
5. 小さな数 $\epsilon > 0$ に対して $\Omega(\epsilon) = \{x + \epsilon\mu(x) : x \in \Omega\}$ とすれば，
$$\int_{\Omega(\varepsilon)} g(u(\varepsilon)) \le \int_{\Omega} g(u)$$
6. 適切な打ち切り条件を設け，その条件を満たさない時は $\Omega = \Omega(\epsilon)$ として 1 に戻る．

じっさい，

$$b(\eta,\eta) \ge \alpha \|\eta\|_{1,2,\Omega}^2 \quad \forall\eta \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$$

として微小変動 $\Phi_\epsilon(x) = x + \epsilon\mu(x)$ を考えると

$$\begin{aligned} J^o(u(\Omega_\epsilon)) &= J^o(u(\Omega)) + \epsilon\left(\delta R_{\Omega}(u,p;\mu) + \int_{\Gamma}(fp + g(u))\,\mu\cdot n\right) + o(\varepsilon) \\ &= J^o(u(\Omega)) - \epsilon b(\mu,\mu) + o(\epsilon) \\ &\le J^o(u(\Omega)) - \epsilon\alpha\|\mu\|_{1,2,\Omega}^2 + o(\epsilon) \end{aligned}$$

となるので $J^o(u(\Omega_\epsilon)) < J^o(u(\Omega))$ を得る．ただし，ステップ 4 において $\eta \mapsto \delta R_\Omega(u,p;\eta)$ を $H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数であると考えているが，u,p が弱解だけだと $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ 上で線形連続性

$$|\delta R_\Omega(u,p;\mu)| \le C_2 \|u\|_{1,2,\Omega} \|p\|_{1,2,\Omega} \|\mu\|_{1,\infty,\Omega}$$

しか導出できない．そこで，u と p との滑らかさを仮定して $\mu \mapsto \delta R_\Omega(u,p;\mu)$ を $H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ 上の有界線形 $\widetilde{\delta R}_\Omega(u,p;\mu)$ への拡張とできる条件を考える．$\delta R_\Omega(u,p;\mu)$ は，u,p,μ を微分 ∂_i した関数の積を加えた形になっているので

$$\|up\|_{1,2,\Omega} \le C_3 \|u\|_{1+k,l,\Omega} \|p\|_{1+k,l,\Omega}$$

となる k,l を考えればよい．これは，ソボレフ空間での関数の積に関する諸定理から分かる．

1. $d=2$ のとき，$u,p \in W^{1,l}(\Omega;\mathbb{R}^m), l > 2$
2. $d=3$ のとき，$u,p \in W^{1,l}(\Omega;\mathbb{R}^m), l > \dfrac{12}{5}$
3. $u,p \in H^2(\Omega;\mathbb{R}^m), k=1$ ならば $l=2$ で成り立つ．

すなわち，2 次元問題では解の滑らかさが少しでも上がると $\widetilde{\delta R}_\Omega(u,p;\mu)$ が構成できるので，力法は理論的にも無理のない方法である．

謝辞 この研究では畔上秀幸氏 (名古屋大学) 及び海津 聰氏 (茨城大学) から力法を教えていただき，木村正人氏 (九州大学) から一般 J 積分に関する新しい知見をいただき，長年停滞していた一般 J 積分法について新しい展開が得られたことに大変感謝しています．この研究は科学研究補助金「特異性を持つ連続体力学の数理研究」(#1934007) の補助を受けている．

参考文献

[1] Haug, E., Choi, K. and Komkov, V: Design sensitivity analysis of structural systems, Academioc press, 1986.

[2] 海津 聰, 畔上 秀幸: 最適形状問題と力法について, 日本応用数理学会論文誌, 16 巻 3 号 (2006), 277 - 290.

[3] 木村 正人, 若野功, 亀裂進展に伴うエネルギー解放率の数学解析に関する再考察, 日本応用数理学会論文誌, 16 巻 3 号 (2006), 345 - 358.

[4] Kimura, M: Shape derivative of minimum potential energy: abstract theory and applications, Jindřich Něcas Center for Mathematical Modeling Lecture notes, Volume 4(2008), 1–38.

[5] Kupradze, V. D., Gegelia, T. G., Basheleishvili, M. O.,Burchuladze, T. V., (Basheleishvili, M. O.; Burchuladze, T. V.): Three-Dimeneional Probleme of the Mathematical Theoy of Elasticity and Thermoelasticity, North Holland, Aterdam 1979.

[6] Ohtsuka, K: Generalized J-integral and its applications. I. – Basic theory. Japan Journal of Applied Mathematics, 2, 1985, 329–350.

[7] Ohtsuka, K and Khludnev, A: Generalized J-integral method for sensitivity analysis of static shape design, Control & Cybernetics, 29(200), 513–533.

[8] 大南正瑛編，マイクロメカニックス入門，オーム社，1980.

[9] Sokolowski, J. and Zolesio, J-P: Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis, Springer, 1992.