数理解析研究所講究録
第 1643 巻 2009 年 225-231

一般化された縮小写像の二つの不動点定理

城西大学・理学部　吉川美佐子 (Misako Kikkawa)
Faculty of Science, Josai University.
九州工業大学・工学研究院　鈴木智成 (Tomonari Suzuki)
Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology.

1. はじめに

(X,d) を距離空間とする. X 上の写像 T が縮小写像であるとは, $r \in [0,1)$ が存在して, 任意の $x,y \in X$ に対して

$$d(Tx,Ty) \le r\, d(x,y)$$

が成り立つことを言う. 次のバナッハの縮小写像の不動点定理は, 非常に重要であり, 様々な応用のある定理である.

定理 1 (Banach [1]). (X,d) を完備距離空間とする. このとき, X 上の縮小写像 T はただ一つの不動点を持つ.

このバナッハの定理の拡張として, 集合値写像に対するナドラーの不動点定理も有名である. X の空でない有界閉集合の全体を $\mathrm{CB}(X)$ と書くことにする. $A,B \in \mathrm{CB}(X)$ に対して, A と B の距離 $H(A,B)$ をハウスドルフの距離とする. すなわち,

$$H(A,B) = \max\left\{ \sup_{x\in A} d(x,B),\ \sup_{y\in B} d(y,A) \right\}.$$

ただし, $d(x,B) = \inf_{y\in B} d(x,y)$.

定理 2 (Nadler [5]). (X,d) を完備距離空間, T を X から $\mathrm{CB}(X)$ への写像とする. $r \in [0,1)$ が存在して, 任意の $x,y \in X$ に対して

$$H(Tx,Ty) \le r\, d(x,y)$$

が成り立つと仮定する. このとき, $z \in Tz$ となる $z \in X$ が存在する.

ところで, 定理 1 は完備性を特徴付けないことが知られている. そこで最近, 定理 1 の拡張であり, 完備性を特徴付けるような次の定理を証明した.

定理 3 ([6]). 関数 $\theta : [0,1) \to (1/2, 1]$ を

$$(1) \qquad \theta(r) = \begin{cases} 1 & (0 \le r \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}) \\ \frac{1-r}{r^2} & (\frac{\sqrt{5}-1}{2} \le r \le \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ \frac{1}{1+r} & (\frac{1}{\sqrt{2}} \le r < 1) \end{cases}$$

と定義する. (X,d) を完備距離空間, T を X 上の写像とする. $r \in [0,1)$ が存在して, 任意の $x,y \in X$ に対して

$$\theta(r)\, d(x,Tx) \le d(x,y) \to d(Tx,Ty) \le r\, d(x,y)$$

が成り立つと仮定する. このとき, T はただ一つの不動点を持つ.

MSC (2000). 54H25
キーワード. 縮小写像, 不動点, バナッハの不動点定理, ナドラーの不動点定理, 集合値写像

注意. $\theta(r)$ が大きいほどよい定理になる. しかし, 上記の $\theta(r)$ はすべての $r \in [0,1)$ に対して, ベスト定数になっていることが分かっている. つまり, 定理 3 をこれ以上改良することはできない. 詳しくは [6] を参照のこと.

本稿では最初に, 定理 3 を集合値写像に拡張した定理を証明する. さらに, 可換な写像に対しての拡張定理も紹介する.

2. 集合値写像に対する不動点定理

この節では定理 3 の集合値版を証明する.

定理 4 ([3], [7]). 関数 $\eta : [0,1) \to (1/2, 1]$ を

$$\eta(r) = \begin{cases} 1 & (0 \leq r < \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{1+r} & (\frac{1}{2} \leq r < 1) \end{cases}$$

と定義する. (X,d) を完備距離空間, T を X から $\mathrm{CB}(X)$ への写像とする. $r \in [0,1)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$\eta(r)\, d(x, Tx) \leq d(x,y) \to H(Tx, Ty) \leq r\, d(x,y)$$

が成り立つと仮定する. このとき, $z \in Tz$ となる $z \in X$ が存在する.

証明. まずはじめに $r \in [0, 1/2)$ の場合を証明する. $r < r_1 < 1/2$ となる実数 r_1 をとる. $u_1 \in X$ と $u_2 \in Tu_1$ に対して, $\eta(r)\, d(u_1, Tu_1) \leq \eta(r)\, d(u_1, u_2) \leq d(u_1, u_2)$ であるから,

$$d(u_2, Tu_2) \leq H(Tu_1, Tu_2) \leq r\, d(u_1, u_2)$$

を得る. したがって, $d(u_2, u_3) \leq r_1\, d(u_1, u_2)$ となるような $u_3 \in Tu_2$ が存在する. 同様にして, X の点列 $\{u_n\}$ で $u_{n+1} \in Tu_n$ かつ $d(u_{n+1}, u_{n+2}) \leq r_1\, d(u_n, u_{n+1})$ を満たすものがとれる. このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(u_n, u_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} {r_1}^{n-1}\, d(u_1, u_2) < \infty$$

となるので, $\{u_n\}$ はコーシー列になる. X の完備性から, $\{u_n\}$ は収束するから, その収束先を $z \in X$ とおくことにする.

次に, $x \neq z$ である $x \in X$ に対して,

$$d(z, Tx) \leq r\, d(z, x) \tag{2}$$

が成り立つことを示そう. $\{u_n\}$ は収束し, $u_{n+1} \in Tu_n$ であるから, 十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対しては $\eta(r)\, d(u_n, Tu_n) \leq d(u_n, x)$ が成り立つ. よって, 仮定より $H(Tu_n, Tx) \leq r\, d(u_n, x)$ なので, $d(u_{n+1}, Tx) \leq r\, d(u_n, x)$ となる. この式で, n について極限をとると, (2) を得る.

次に $z \in Tz$ を背理法で示す. $z \notin Tz$ と仮定する. Tz は閉集合なので, $d(z, Tz) > 0$ である. $\varepsilon > 0$ で $2r_1\big(d(z, Tz) + \varepsilon\big) < d(z, Tz)$ となるものをとる. さらに, $d(z, a) \leq d(z, Tz) + \varepsilon$ となる $a \in Tz$ をとる. $a \neq z$ なので, (2) から $d(z, Ta) \leq r\, d(z, a)$. よって $d(z, b) \leq r_1\, d(z, a)$ となる $b \in Ta$ が存在する.

一方で, $a \in Tz$ から, $H(Tz, Ta) \le r\, d(z, a)$ であるから, $d(b, Tz) \le r\, d(z, a)$. よって, $d(b, a') \le r_1\, d(z, a)$ となる $a' \in Tz$ がとれる. したがって,

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\le d(z, a') \le d(z, b) + d(b, a') \le 2\, r_1\, d(z, a) \\ &\le 2\, r_1 \big(d(z, Tz) + \varepsilon\big) < d(z, Tz). \end{aligned}$$

これは矛盾. よって, $r \in [0, 1/2)$ の場合に $z \in Tz$ が証明できた.

次に, $r \in [1/2, 1)$ の場合を証明する. $1/2 \le r < r_1 < 1$ となる実数 r_1 をとる. すると, $r \in [0, 1/2)$ の場合と同様にして, $u_{n+1} \in Tu_n$ を満たす点列 $\{u_n\} \subset X$ である点 $z \in X$ に収束するものがとれる. さらに, $x \neq z$ である $x \in X$ に対して,

$$d(z, Tx) \le r\, d(z, x)$$

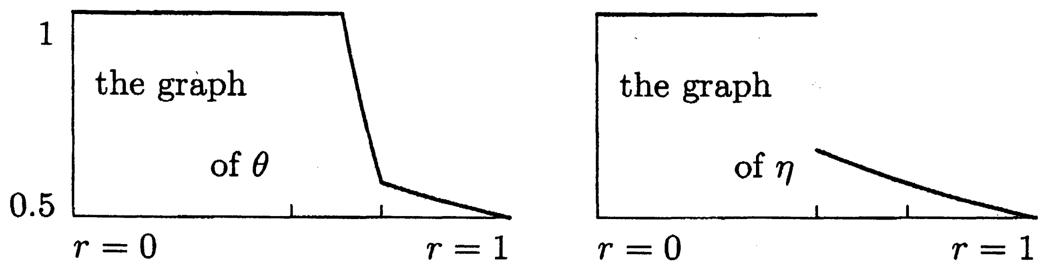
が成り立つことも証明できる. 次に, 任意の $x \in X$ に対して, $H(Tx, Tz) \le r\, d(x, z)$ が成り立つことを示す. $x = z$ のときは明らかなので, $x \neq z$ と仮定する. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $d(z, y_n) \le d(z, Tx) + \frac{1}{n} d(x, z)$ となる $y_n \in Tx$ が存在する. $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} d(x, Tx) \le d(x, y_n) \le d(x, z) + d(z, y_n) &\le d(x, z) + d(z, Tx) + \frac{1}{n} d(x, z) \\ &\le d(x, z) + r\, d(x, z) + \frac{1}{n} d(x, z) = \left(1 + r + \frac{1}{n}\right) d(x, z) \end{aligned}$$

が成り立つので, $(1/(1+r))\, d(x, Tx) \le d(x, z)$ を得る. よって仮定から, $H(Tx, Tz) \le r\, d(x, z)$ となる. したがって,

$$d(z, Tz) = \lim_{n \to \infty} d(u_{n+1}, Tz) \le \lim_{n \to \infty} H(Tu_n, Tz) \le \lim_{n \to \infty} r\, d(u_n, z) = 0$$

が成り立つ. これと, Tz が閉であることから $z \in Tz$ を得る. 以上により, いずれの場合でも $z \in Tz$ が証明された. □



注意. 定理 4 からナドラーの不動点定理が得られるのは明らか. また, $r \in [0, 1/2) \cup [1/\sqrt{2}, 1)$ に対しては, $\theta(r) = \eta(r)$ であるから $\eta(r)$ はベスト定数になっている. しかし, $r \in [1/2, 1/\sqrt{2})$ のときのベスト定数はまだ求められていない.

3. 可換な写像に対する不動点定理

この節では, 定理 3 と Jungck の定理 [2] の拡張になっている可換な写像についての不動点定理を証明する.

定理 5 ([3]). 関数 θ を (1) で定義する. (X,d) を完備距離空間, S と T を X 上の写像で以下を満たすものとする.

(a) S は連続;
(b) $T(X) \subset S(X)$;
(c) S と T は可換.

$r \in [0,1)$ が存在して, 任意の $x,y \in X$ に対して

$$\theta(r)\, d(Sx,Tx) \le d(Sx,Sy) \to d(Tx,Ty) \le r\, d(Sx,Sy)$$

が成り立つと仮定する. このとき, S と T の共通不動点がただ一つ存在する.

証明. (b) より, 任意の $x \in X$ に対して $SIx = Tx$ となる X 上の写像 I が定義できる. $\theta(r) \le 1$ なので, $\theta(r)\, d(Sx,Tx) = \theta(r)\, d(Sx,SIx) \le d(Sx,SIx)$ が成り立つ. よって, 仮定から, $x \in X$ に対して,

$$d(SIx,SIIx) = d(Tx,TIx) \le r\, d(Sx,SIx) \tag{3}$$

が成り立つ. $u \in X$ とする. $u_0 = u$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $u_n = I^n u$ とすると, $u_{n+1} = Iu_n$ だから, $Su_{n+1} = Tu_n$ となる. (3) から,

$$\begin{aligned} d(Su_n, Su_{n+1}) &= d(SIu_{n-1}, SIIu_{n-1}) \le r\, d(Su_{n-1}, SIu_{n-1}) \\ &= r\, d(Su_{n-1}, Su_n) \le \cdots \le r^n\, d(Su_0, Su_1) \end{aligned}$$

であるから, $\sum_{n=1}^{\infty} d(Su_n, Su_{n+1}) < \infty$ を得る. したがって, $\{Su_n\}$ はコーシー列となり, X の完備性から, その収束先 $z \in X$ が存在する.

次に, $Sx \neq z$ となる $x \in X$ に対して,

$$d(Tx,z) \le r\, d(Sx,z) \tag{4}$$

が成り立つことを示す. $Su_n \to z$ なので, $\nu_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \ge \nu_1$ に対して $d(Su_n,z) \le (1/3)\, d(Sx,z)$ が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} \theta(r)\, d(Su_n,Tu_n) &\le d(Su_n,Tu_n) = d(Su_n,Su_{n+1}) \\ &\le d(Su_n,z) + d(Su_{n+1},z) \\ &\le \frac{2}{3} d(Sx,z) = d(Sx,z) - \frac{1}{3} d(Sx,z) \\ &\le d(Sx,z) - d(Su_n,z) \le d(Su_n,Sx) \end{aligned}$$

なので, $n \ge \nu_1$ に対して, $d(Tu_n,Tx) \le r\, d(Su_n,Sx)$. したがって, $Sx \neq z$ となる $x \in X$ に対して,

$$\begin{aligned} d(Tx,z) &= \lim_{n\to\infty} d(Tx,Su_n) = \lim_{n\to\infty} d(Tx,Tu_{n-1}) \\ &\le \lim_{n\to\infty} r\, d(Sx,Su_{n-1}) = r\, d(Sx,z) \end{aligned}$$

が成り立つ.

次に, z が S の不動点であることを示す. $\sharp\{n : d(Su_n,Tu_n) > d(Su_n,SSu_n)\} = \infty$ の時は, $\{u_n\}$ の部分列 $\{u_{n_j}\}$ で $d(Su_{n_j},Tu_{n_j}) > d(Su_{n_j},SSu_{n_j})$ となる

ものが存在する．よって，

$$\begin{aligned}d(Sz,z)&=\lim_{j\to\infty}d(SSu_{n_j},z)\le\lim_{j\to\infty}\left\{d(SSu_{n_j},Su_{n_j})+d(Su_{n_j},z)\right\}\\&\le\lim_{j\to\infty}\left\{d(Su_{n_j},Tu_{n_j})+d(Su_{n_j},z)\right\}\\&=\lim_{j\to\infty}\left\{d(Su_{n_j},Su_{n_j+1})+d(Su_{n_j},z)\right\}=0.\end{aligned}$$

したがって $z=Sz$ を得る．$\sharp\{n:d(Su_n,Tu_n)>d(Su_n,SSu_n)\}<\infty$ の場合は，$\nu_2\in\mathbb{N}$ で，任意の $n\ge\nu_2$ に対して $d(Su_n,Tu_n)\le d(Su_n,SSu_n)$ を満たすものがとれるので，$d(Tu_n,TSu_n)\le r\,d(Su_n,SSu_n)$．よって，

$$\begin{aligned}d(Su_n,SSu_n)&=d(Tu_{n-1},STu_{n-1})=d(Tu_{n-1},TSu_{n-1})\\&\le r\,d(Su_{n-1},SSu_{n-1})\le\cdots\le r^{n-\nu_2}\,d(Su_{\nu_2},SSu_{\nu_2})\end{aligned}$$

であることより，$\lim_n d(Su_n,SSu_n)=0$ を得る．よって，$z=Sz$ を得る．

次に，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$d(T^nz,T^{n+1}z)\le r^n\,d(z,Tz)\tag{5}$$

が成り立つことを示す．$T^0z=z$ とおく．

$$\begin{aligned}\theta(r)\,d(ST^{n-1}z,T^nz)&\le d(ST^{n-1}z,T^nz)=d(ST^{n-1}z,T^nSz)\\&=d(ST^{n-1}z,ST^nz)\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}d(T^nz,T^{n+1}z)&\le r\,d(ST^{n-1}z,ST^nz)=r\,d(T^{n-1}Sz,T^nSz)\\&=r\,d(T^{n-1}z,T^nz)\end{aligned}$$

を得る．これを用いて (5) を示すことができる．

次に，z が T の不動点であることを次の 3 つの場合に分けて示そう．

- $0\le r\le\frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\frac{1}{\sqrt{2}}\le r<1$ かつ $\sharp\{n:Su_n\ne z\}=\infty$
- $\frac{1}{\sqrt{2}}\le r<1$ かつ $\sharp\{n:Su_n\ne z\}<\infty$

最初に，$0\le r\le 1/\sqrt{2}$ の場合を示す．このとき，$\theta(r)\le(1-r)r^{-2}$ となる．$z\ne Tz$ と仮定する．任意の $n\ge 2$ に対して，

$$\max\left\{d(T^nz,z),\ d(T^nz,Tz)\right\}\le r^{n-1}\,d(z,Tz)\tag{6}$$

が成り立つことを帰納法を用いて示す．$z\ne Tz=STz$ と (4) より，

$$d(T^2z,z)\le r\,d(STz,z)=r\,d(TSz,z)=r\,d(Tz,z)$$

を得る．また (5) から $d(T^2z,Tz)\le r\,d(z,Tz)$ が成り立つ．したがって $n=2$ のとき (6) は正しい．ある $n\ge 2$ において (6) が成り立つと仮定すると，$ST^nz=T^nz\ne z$ と (4) より，

$$d(T^{n+1}z,z)\le r\,d(ST^nz,z)=r\,d(T^nz,z)\le r^n\,d(Tz,z)$$

を得る．また

$$\begin{aligned} d(z,Tz) &\le d(z,T^n z) + d(T^n z, Tz) \\ &\le d(z,T^n z) + r^{n-1}\, d(z,Tz) \\ &\le d(z,T^n z) + r\, d(z,Tz) \end{aligned}$$

より，$(1-r)\, d(z,Tz) \le d(z,T^n z)$ となるから，

$$\begin{aligned} \theta(r)\, d(T^n z, T^{n+1} z) &\le (1-r)\, r^{-2}\, d(T^n z, T^{n+1} z) \\ &\le (1-r)\, r^{-n}\, d(T^n z, T^{n+1} z) \\ &\le (1-r)\, d(z,Tz) \le d(T^n z, z) \end{aligned}$$

を得る．よって，仮定から

$$d(T^{n+1} z, Tz) \le r\, d(T^n z, z) \le r^n d(z,Tz).$$

したがって，$n := n+1$ のとき，(6) が成り立つことが示せた．帰納法により (6) は任意の $n \ge 2$ で成り立つ．これより，$z = \lim_n T^n z = Tz$ を得るが，これは $Tz \ne z$ に矛盾する．したがって，$Tz = z$ が言えた．次に，$1/\sqrt{2} \le r < 1$ かつ $\sharp\{n : Su_n \ne z\} = \infty$ のときは，$\{u_n\}$ の部分列 $\{u_{n_j}\}$ で $Su_{n_j} \ne z$ となるものが存在するから，(4) より，

$$\begin{aligned} \theta(r)\, d(Su_{n_j}, Tu_{n_j}) &\le \theta(r) \left(d(Su_{n_j}, z) + d(Tu_{n_j}, z) \right) \\ &\le \theta(r) \left(d(Su_{n_j}, z) + r\, d(Su_{n_j}, z) \right) \\ &= d(Su_{n_j}, z) \end{aligned}$$

を得る．よって，仮定より，$d(Tu_{n_j}, Tz) \le r\, d(Su_{n_j}, z)$ となり，

$$d(z,Tz) = \lim_{j\to\infty} d(Su_{n_j+1}, Tz) = \lim_{j\to\infty} d(Tu_{n_j}, Tz) \le \lim_{j\to\infty} r\, d(Su_{n_j}, z) = 0.$$

したがって，$Tz = z$ を得る．$1/\sqrt{2} \le r < 1$ かつ $\sharp\{n : Su_n \ne z\} < \infty$ のときは，$\nu_3 \in \mathbb{N}$ で任意の $n \ge \nu_3$ に対して $Su_n = z$ となるものが存在する．特に，$Su_{\nu_3} = Su_{\nu_3+1} = z$ である．

$$Tz = TSu_{\nu_3} = STu_{\nu_3} = SSu_{\nu_3+1} = Sz = z$$

が成り立つ．以上により，すべての場合で z が S と T の共通不動点であることが証明できた．

最後に共通不動点の一意性を示す．y を S と T の共通不動点とする．このとき $\theta(r)\, d(Sz,Tz) = 0 \le d(Sz,Sy)$ から，

$$d(z,y) = d(Tz,Ty) \le r\, d(Sz,Sy) = r\, d(z,y)$$

となるので，$z = y$ を得る． □

注意． この $\theta(r)$ は すべての $r \in [0,1)$ に対して，ベスト定数になっている．

参考文献

[1] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math., **3** (1922), 133–181.

[2] G. Jungck, *Commuting mappings and fixed points*, Amer. Math. Monthly, **83** (1976), 261–263.

[3] M. Kikkawa and T. Suzuki, *Three fixed point theorems for generalized contractions with constants in complete metric spaces*, Nonlinear Anal., **69** (2008), 2942–2949.

[4] ———, *Some similarity between contractions and Kannan mappings*, Fixed Point Theory Appl., **2008** (2008), Article ID 649749, 1–8.

[5] S. B. Nadler, Jr., *Multi-valued contraction mappings*, Pacific J. Math., **30** (1969), 475–488.

[6] T. Suzuki, *A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness*, Proc. Amer. Math. Soc., **136** (2008), 1861–1869.

[7] T. Suzuki and M. Kikkawa, *Some remarks on a recent generalization of the Banach contraction principle*, in Proceedings of the Eighth International Conference on Fixed Point Theory and its Applications (S. Dhompongsa, K. Goebel, W. A. Kirk, S. Plubtieng, B. Sims, and S. Suantai Eds.), pp. 151–161, Yokohama Publishers, 2008.