数理解析研究所講究録
第 1643 巻 2009 年 217-224

一般化された近接点法と非線形写像の列について

東京工業大学・大学院情報理工学研究科 木村泰紀 (Yasunori Kimura)
Department of Mathematical and Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

実 Banach 空間 E からそれ自身への集合値写像 A に対してその零点, すなわち $0 \in Az$ をみたす $z \in E$ を求める問題は零点問題と呼ばれ, 多くの非線形問題を一般化した問題として活発に研究がなされている. とくに A が増大作用素と呼ばれる写像の場合の近似的解法として, 以下に述べる近接点法が有名である: 初期点を $x_1 \in E$ とし, 漸化式

$$x_{n+1} = (I + \rho_n A)^{-1} x_n + e_n$$

によって点列を構成する. ただし, $\{e_n\}$ は誤差をあらわす項である. この点列はいくつかの仮定の下で零点の近似列となっていることが知られている. 近接点法に関する結果としては, Hilbert 空間における代表的なものとして Rockafellar [13], Brézis-Lions [1], Pazy [10], Eckstein-Bertsekas [3], Kamimura-Takahashi [5] 等がある. Banach 空間における代表的な結果としては Bruck-Reich [2], Nevanlinna-Reich [9], Reich [11], Jung-Takahashi [4], Reich-Zaslavski [12] Kamimura-Takahashi [6] 等がある.

最近 Kimura-Takahashi [8] によって得られた結果では, 増大作用素の無限列に対して, それに対応する零点集合の列に対する極限集合の概念を導入し, その集合に属する点への弱収束定理が証明されている. また, [7] において著者は係数条件をさらに緩和した結果を得ている.

本稿では, Kamimura-Takahashi [6] および Kimura [7] で得られている結果をもとに, 誤差をあらわす項のみたすべき条件について考察する. さらに, 同論文の主定理で仮定さ

Key words and phrases. accretive operator, resolvent, m-accretive operator, proximal point algorithm, iterative scheme, weak convergence.
2000 *Mathematics Subject Classification.* 47H06, 47J25.

れている係数条件が, 誤差をあらわす項の条件の緩和に寄与していることについても述べる.

2 準備

本稿であつかう空間はすべて一様凸な実 Banach 空間であり, それを E であらわす. 共役空間は E^* であらわし, $x \in E$ のノルムを $\|x\|$ であらわす.

Banach 空間 E に対し $B = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とする. $B \times B \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上の関数 f を $x, y \in B$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して

$$f(x, y, t) = \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

と定義しよう. このとき極限 $\lim_{t \to 0} f(x, y, t)$ が $x \in B$ に関して一様に収束するならば, E は Fréchet 微分可能なノルムをもつという.

また, E が Opial 条件をみたすとは, 弱収束する E の任意の点列 $\{x_n\}$ に対し, その弱極限を $x_0 \in E$ とするとき, もし $y \in E$ が x_0 と異なるならば

$$\liminf_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| < \liminf_{n \to \infty} \|x_n - y\|$$

が成り立つことをいう.

E から E への多価写像 A が増大作用素であるとは, 任意の $\lambda > 0$ と $y_1 \in Ax_1$ および $y_2 \in Ax_2$ をみたす $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ に対して

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\|$$

が成り立つことをいう. また, 増大作用素 A が任意の $\rho > 0$ に対して $\mathrm{ran}(I + \rho A) = E$ をみたすとき, A を m 増大作用素という. ここで I は E 上の恒等写像であり, $\mathrm{ran}(I + \rho A)$ は多価写像 $(I + \rho A)$ の値域である.

A を増大作用素とし $\rho > 0$ とする. このとき, 任意の $x \in \mathrm{ran}(I + \rho A)$ に対して $x \in (I + \rho A)y$ をみたす $y \in E$ は唯一であることが知られている. よってその逆写像が存在し, $\mathrm{ran}(I + \rho A)$ から E への一価写像とみなすことができる. これを $(I + \rho A)^{-1}$ とあらわし, A のリゾルベントという. 定義より $\mathrm{dom}(I + \rho A)^{-1} = \mathrm{ran}(I + \rho A)$ および $\mathrm{ran}(I + \rho A)^{-1} = \mathrm{dom}\, A$ が成り立つ. ただし $\mathrm{dom}(I + \rho A)^{-1}$ および $\mathrm{dom}\, A$ は各写像の定義域をあらわしている. したがって, A が m 増大作用素ならばそのリゾルベント $(I + \rho A)^{-1}$ は E から E への写像となる. また, $(I + \rho A)^{-1}$ は非拡大写像, すなわち

$$\left\|(I + \rho A)^{-1}x - (I + \rho A)^{-1}y\right\| \leq \|x - y\|$$

が任意の $x, y \in \mathrm{ran}(I+\rho A)$ で成り立つ写像であり，さらに $(I+\rho A)^{-1}$ の不動点は $A^{-1}0$ と一致することが知られている．詳細は，例えば [14] を参照せよ．

3 係数条件の緩和と誤差項

本節では，2000 年に証明された次の定理をもとに，誤差項の列 $\{e_n\}$ がみたすべき条件について考察し，新たな係数条件の仮定のもとで得られた Kimura [7] の結果が誤差項の条件の緩和に寄与することを示す．

定理 1 (Kamimura-Takahashi [6])．E を Opial 条件をみたすかあるいはノルムが Fréchet 微分可能であるような一様凸 Banach 空間とし，A を $A^{-1}0 \neq \emptyset$ をみたす E 上の m 増大作用素とする．a を正の実数とし，$\{\rho_n\}$ を $]a, \infty[$ の数列とする．$x_1 \in E$ とし，点列 $\{x_n\}$ を漸化式

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)(I+\rho_n A)^{-1}x_n + e_n$$

によって定義する．ただし $\{\alpha_n\}$ はある正の実数 $b < 1$ に対して $\{\alpha_n\} \subset [0, b]$ をみたす数列であり，$\{e_n\}$ は $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\| < \infty$ をみたす E の点列である．このとき $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の点 x_0 に弱収束する．

なお，この定理で用いられる漸化式は $1/(1-\alpha_n)e_n = e'_n$ とすることで

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)((I+\rho_n A)^{-1}x_n + e'_n)$$

とすることができる．なお，この場合においても誤差項 $\{e'_n\}$ のみたすべき条件は $\{e_n\}$ の条件と変わらない．実際の計算においては，リゾルベントが逆写像であらわされていることが誤差の生じる主たる原因であることを考慮すれば，後者の漸化式の方がより実用的であると考えることもできる．

上記の定理において $\{e_n\}$ に要請されている条件 $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\| < \infty$ を仮定しない場合，次に示されるように，点列 $\{x_n\}$ が収束しない例があることがわかる．

例． H を Hilbert 空間とし，M をその線形閉部分空間，N をその直交補空間 $M^{\perp}$ とすると，$H = M \oplus N$ である．B を $B^{-1}0 \neq \emptyset$ をみたす N 上の m 増大作用素とし，H からそれ自身への集合値写像 A を $x \in H$ に対し

$$Ax = BP_N x$$

で定義する．ただし $P_N : H \to N$ は直交射影である．このとき $A^{-1}0 = M + B^{-1}0$ が成り立つ．実際，$z \in A^{-1}0$ とすると $0 \in Az = BP_N z$ であり，$P_N z \in B^{-1}0$ を得る．

M への直交射影 $P_M : H \to M$ を用いて $z = P_M z + P_N z$ とすると $P_M z \in M$ より $z \in M + B^{-1}0$, すなわち $A^{-1}0 \subset M + B^{-1}0$ が導かれる. 逆に $w \in M + B^{-1}0$ とすると, $P_N w \in B^{-1}0$ であり, $0 \in BP_N w = Aw$, すなわち $w \in A^{-1}0$ となる. 以上より $A^{-1}0 = M + B^{-1}0$ となることがわかった.

次に, A が m 増大作用素であることを示そう. $\rho > 0$ とする. 任意の $x \in H$ に対して $x = P_M x + P_N x$ と一意にあらわせるが, ここで B が N 上の m 増大作用素であることから $P_N x \in N$ に対して $P_N x \in y_N + \rho B y_N$ をみたす $y_N \in N$ が存在する. ここで

$$y = P_M x + y_N$$

とすると $P_N y = y_N$ であることから

$$\begin{aligned} x &= P_M x + P_N x \\ &\in P_M x + (y_N + \rho B y_N) \\ &= (P_M x + y_N) + \rho B y_N = y + \rho B P_N y = (I + \rho A) y \end{aligned}$$

となり $\mathrm{ran}(I + \rho A) = H$, すなわち A が m 増大作用素であることが示された. また, この計算において $y_N = (I + \rho B)^{-1} P_N x$ であることから,

$$(I + \rho A)^{-1} x = y = P_M x + y_N = P_M x + (I + \rho B)^{-1} P_N x$$

が成り立つこともわかる.

このように定義された m 増大作用素 A に対し, $x_1 \in H$ および

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)(I + \rho_n A)^{-1} x_n + e_n$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ を考える. ここで $\{\alpha_n\}$ は定理 1 において仮定されている条件をみたすものとする.

今, M の 0 でない要素 e に対し, $e_n = (1/n)e_n$ が各 $n \in \mathbb{N}$ で成り立っていると仮定しよう. このとき

$$\begin{aligned} P_N x_{n+1} &= P_N(\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)(I + \rho_n A)^{-1} x_n + e_n) \\ &= \alpha_n P_N x_n + (1 - \alpha_n) P_N (I + \rho_n A)^{-1} x_n + P_N e_n \\ &= \alpha_n P_N x_n + (1 - \alpha_n) P_N (P_M x_n + (I + \rho B)^{-1} P_N x_n) \\ &= \alpha_n P_N x_n + (1 - \alpha_n)(I + \rho B)^{-1} P_N x_n \end{aligned}$$

が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つので, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $y_n = P_N x_n$ とすると, $y_1 \in M$ かつ

$$y_{n+1} = \alpha_n y_n + (1 - \alpha_n)(I + \rho B)^{-1} y_n$$

が成り立つ．よって定理 1 より $\{y_n\} = \{P_N x_n\}$ は $y_0 \in B^{-1}0$ に弱収束する．一方,

$$\begin{aligned} P_M x_{n+1} &= P_M(\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)(I+\rho_n A)^{-1}x_n + e_n) \\ &= \alpha_n P_M x_n + (1-\alpha_n)P_M(I+\rho_n A)^{-1}x_n + P_M e_n \\ &= \alpha_n P_M x_n + (1-\alpha_n)P_M(P_M x_n + (I+\rho B)^{-1}P_N x_n) + \frac{1}{n}e \\ &= \alpha_n P_M x_n + (1-\alpha_n)P_M x_n + \frac{1}{n}e \\ &= P_M x_n + \frac{1}{n}e \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} P_M x_n &= P_M x_{n-1} + \frac{1}{n-1}e \\ &= P_M x_{n-2} + \frac{1}{n-2}e + \frac{1}{n-1}e \\ &= \cdots \\ &= P_M x_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}e \end{aligned}$$

となる．$\|\sum_{k=1}^{\infty}(1/k)e\| = \sum_{k=1}^{\infty}(1/k)\,\|e\| = \infty$ であるから, $\{P_M x_n\}$ は収束しないことがわかる．したがって, $\{x_n\} = \{P_M x_n + P_N x_n\}$ は収束しないことがわかった．

この例は, 定理 1 において誤差項の列 $\{e_n\}$ に対する条件 $\|\sum_{k=1}^{\infty} e_n\| < \infty$ を仮定しない場合, 仮に $\{e_n\}$ が 0 に強収束することを仮定したとしても, $\{x_n\}$ が弱収束しない場合が存在することを示している．この観点から, $\|\sum_{k=1}^{\infty} e_n\| < \infty$ という条件は, 点列 $\{x_n\}$ の収束を保証する際には妥当な条件の一つであると言うことができるであろう．

次の定理は, 最近著者によって証明された m 増大作用素の列 $\{A_n\}$ に対する共通零点への弱収束定理である．

定理 2 (Kimura [7])．E を Opial 条件をみたすかあるいはノルムが Fréchet 微分可能であるような一様凸 Banach 空間とし, $\{A_n\}$ を $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{-1}0 \neq \emptyset$ をみたす E 上の m 増大作用素の列とする．さらに, E の点列 $\{u_n\}$ および $\{v_n\}$ が $u_n \in A_n v_n$ をみたし, $\{u_n\}$ が 0 に強収束するとき, $\{v_n\}$ の部分列の弱極限はつねに $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{-1}0$ に属すると仮定する．$x_1 \in E$ とし, 点列 $\{x_n\}$ を漸化式

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)(I+A_n)^{-1}x_n + e_n$$

によって定義する．ただし $\{\alpha_n\}$ は $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n) = \infty$ をみたす $[0,1[$ の数列であり,

$\{e_n\}$ は $\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n\| < \infty$ をみたす E の点列である．このとき $\{x_n\}$ は $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{-1}0$ の点 x_0 に弱収束する．

この定理において，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n = \rho A$ とすることによって，次の結果が得られる．ただし，A は E 上の増大作用素であり，$\{\rho_n\}$ は次の定理の条件をみたす実数列である．

定理 3. E を Opial 条件をみたすかあるいはノルムが Fréchet 微分可能であるような一様凸 Banach 空間とし，A を $A^{-1}0 \neq \emptyset$ をみたす E 上の m 増大作用素とする．a を正の実数とし，$\{\rho_n\}$ を $]a,\infty[$ の数列とする．$x_1 \in E$ とし，点列 $\{x_n\}$ を漸化式

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)(I+\rho_n A)^{-1}x_n + e_n$$

によって定義する．ただし $\{\alpha_n\}$ は $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n) = \infty$ をみたす $[0,1[$ の数列であり，$\{e_n\}$ は $\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n\| < \infty$ をみたす E の点列である．このとき $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の点 x_0 に弱収束する．

この定理において $1/(1-\alpha_n)e_n = e'_n$ とし，漸化式を

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)((I+\rho_n A)^{-1}x_n + e'_n)$$

とすることによって，誤差項の列 $\{e'_n\}$ の条件を緩和することができる．

定理 4. E を Opial 条件をみたすかあるいはノルムが Fréchet 微分可能であるような一様凸 Banach 空間とし，A を $A^{-1}0 \neq \emptyset$ をみたす E 上の m 増大作用素とする．a を正の実数とし，$\{\rho_n\}$ を $]a,\infty[$ の数列とする．$x_1 \in E$ とし，点列 $\{x_n\}$ を漸化式

$$x_{n+1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)x_n + \frac{1}{n}((I+\rho_n A)^{-1}x_n + e'_n)$$

によって定義する．ただし $\{e'_n\}$ は各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|e_n\| \leq 1/n$ をみたす E の点列である．このとき $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の点 x_0 に弱収束する．

証明． 漸化式を

$$x_{n+1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)x_n + \frac{1}{n}(I+\rho_n A)^{-1}x_n + \frac{1}{n}e'_n$$

と変形し，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha_n = 1-1/n$ と定義すると

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)(I+\rho_n A)^{-1}x_n + \frac{1}{n}e'_n$$

とあらわせる．ここで

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$$

であり，さらに

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{1}{n}e_n'\right\|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$$

である．したがって定理3より $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の点 x_0 に弱収束する． $\square$

上記の結果により，誤差項のみたすべき条件の緩和には成功したが，一方で $\{x_n\}$ の収束の速さの低下もまねいていることがわかる．これらを両立させる条件の発見や新たな近似法の開発が今後の課題である．

参考文献

[1] H. Brézis and P.-L. Lions, *Produits infinis de résolvantes*, Israel J. Math. **29** (1978), 329–345.

[2] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[3] J. Eckstein and D. P. Bertsekas, *On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators*, Math. Programming **55** (1992), 293–318.

[4] J. S. Jung and W. Takahashi, *Dual convergence theorems for the infinite products of resolvents in Banach spaces*, Kodai Math. J. **14** (1991), 358–365.

[5] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.

[6] ———, *Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications*, Set-Valued Anal. **8** (2000), 361–374.

[7] Y. Kimura, *Weak convergence of an iterative scheme with a weaker coefficient condition*, Proceedings of the International Conference on Modeling, Computation and Optimization, to appear.

[8] Y. Kimura and W. Takahashi, *A generalized proximal point algorithm and implicit iterative schemes for a sequence of operators on Banach spaces*, Set-Valued Anal. **16** (2008), 597–619.

[9] O. Nevanlinna and S. Reich, *Strong convergence of contraction semigroups and of iterative methods for accretive operators in Banach spaces*, Israel J. Math. **32** (1979), 44–58.

[10] A. Pazy, *Remarks on nonlinear ergodic theory in Hilbert space*, Nonlinear Anal. **3** (1979), 863–871.

[11] S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980), 287–292.

[12] S. Reich and A. J. Zaslavski, *Infinite products of resolvents of accretive operators*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **15** (2000), 153–168, Dedicated to Juliusz Schauder, 1899–1943.

[13] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim. **14** (1976), 877–898.

[14] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis: fixed point theory and its applications*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.