数理解析研究所講究録
第 1643 巻 2009 年 207-211

関数の生成集合について

島根大学大学院総合理工学研究科[1] 妹尾 喜行 (YOSHIYUKI SENO)
島根大学大学院総合理工学研究科[1] 坪倉 正枝 (MASAE TSUBOKURA)
島根大学総合理工学部[2] 黒岩 大史 (DAISHI KUROIWA)

ABSTRACT. 凸関数に対する一次生成集合と、凸とは限らないより一般の関数に対する二次生成集合の定義を与え、これらの性質を調べ、凸最適化問題およびさらに一般の最適化問題への応用を考察する。

1. 凸関数に対する生成集合

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ が proper l.s.c. convex のとき、

$$f(x)=\sup_{h\in L}h(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}^n,$$

ただし、$L=\{h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\mid h\leq f,\ h:\text{affine}\}$ と書ける。いいかえれば

$$f(x)=\sup_{(a,b)\in A}(\langle a,x\rangle-b),\quad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

をみたす集合 $A\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ が存在していることが判る。すなわち $\mathbb{R}^n$ 上で定義された凸関数は、$\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合から生成されていると考えることができる。このような集合 A を f の（一次）生成集合であるということにする。

例えば f が proper l.s.c. convex ならば、epif^* や graphf^* は f の生成集合となるが、一般に f についての生成集合は複数存在する。より一般に、生成集合に関して次の定理が成立している。

Theorem 1. $A\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ とする。このとき次は同値

(i) $A:f$ の生成集合

(ii) cl$A:f$ の生成集合

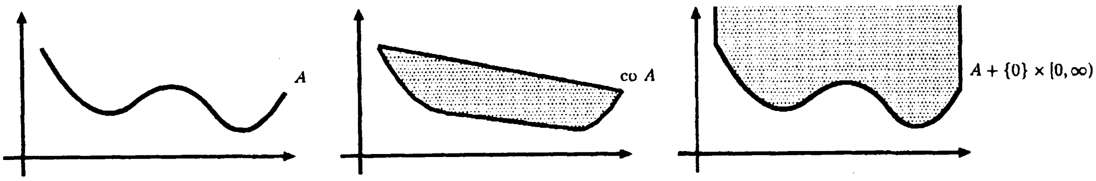
(iii) bd$A:f$ の生成集合

(iv) co$A:f$ の生成集合

(v) $A+\{0_{\mathbb{R}^n}\}\times[0,+\infty):f$ の生成集合

(vi) $\{(a,\beta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\mid \beta=\inf\{b\mid(a,b)\in A\}\}:f$ の生成集合

[1]Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University
[2]Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University



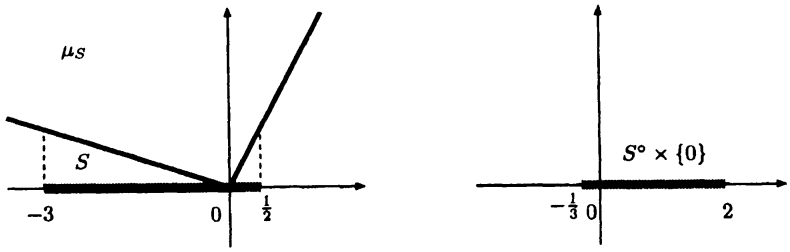
また例として、$S \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合で、$0_{\mathbb{R}^n} \in \mathrm{int} S$ であるならば、

$$S^\circ \times \{0\} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \leq 1,\ \forall x \in S\} \times \{0\}$$

は S のミンコフスキー関数 μ_S の生成集合となることも判る。ただし、

$$S^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \leq 1,\ \forall x \in S\}, \quad \mu_S(x) = \inf\left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \frac{x}{\lambda} \in S\right\}$$

である。



このように、生成集合は凸関数に対して深く関連している概念であることが判る。以下において生成集合を用いた最適化問題の特徴付けを述べる。

1.1. 生成集合を用いた最適化問題の特徴付け

次の最小化問題を考える。

$$\text{(P)} \quad v = \inf\{f(x) \mid g(x) \leq 0\}$$

ここで、B を関数 g の生成集合とすると、

$$v = \inf\{f(x) \mid \langle a, x \rangle \leq b,\ \forall (a, b) \in B\}$$

となる。一般には B は有限個とは限らないため、この問題は半無限計画問題となるが、B が compact ならば、(P) は有限線形制約の問題に書き直すことが出来る。

Theorem 2 (c.f. [1]). $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, proper u.s.c. quasiconvex, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, proper l.s.c. convex とする。もし g の生成集合 B で

(i) B : compact

(ii) $\forall (a_0, b_0), (a_1, b_1), \cdots, (a_n, b_n) \in B, \exists x \in \mathbb{R}^n$ s.t. $\langle a_i, x \rangle < b_i, \forall i \in \{0, 1, \cdots, n\}$

となるものが存在すれば、

$$\exists (\hat{a}_1, \hat{b}_1), (\hat{a}_2, \hat{b}_2), \cdots, (\hat{a}_n, \hat{b}_n) \in B \text{ s.t.}$$
$$v = \inf\{f(x) \mid \langle \hat{a}_i, x \rangle \leq \hat{b}_i, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}\}$$

が成立する。

また関数 f に対する compact な生成集合の存在性は、次のように特徴付けられる。

Theorem 3 (c.f. [1]). $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, convex とする。このとき、次は同値

(i) $\exists B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$: g の生成集合 s.t. B は compact

(ii) $\exists h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: sublinear s.t. $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x) - h(x)| < +\infty$

2. 二次生成集合

前章でのアフィン関数を次の二次関数

$$a_0 \|\cdot\|^2 + \langle a, \cdot \rangle - b$$

として考える。すなわち $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} (= \mathbb{R}^{n+2})$ が f の二次生成集合であるとは、

$$f(x) = \sup_{(a_0, a, b) \in A} (a_0 \|x\|^2 + \langle a, x \rangle - b), \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

が成立するときをいう。一次の生成集合と同様で、関数に対する生成集合は複数存在している。また例として、$A = \{(a_0, a, b) \in \mathbb{R}^3 \mid {a_0}^2 + a^2 \leq 1, b = 0\}$ は、関数 $f(x) = |x|\sqrt{x^2+1}$ の二次生成集合である。

一次の生成集合と同様に、次の定理が成立する。

Theorem 4. $A \subset \mathbb{R}^{n+2}$ とする。このとき次は同値

(i) A : f の二次生成集合

(ii) $\mathrm{cl}A$: f の二次生成集合

(iii) $\mathrm{bd}A$: f の二次生成集合

(iv) $\mathrm{co}A$: f の二次生成集合

(v) $A + (-\infty, 0] \times \{0_{\mathbb{R}^n}\} \times [0, +\infty)$: f の二次生成集合

(vi) $\{(a_0, a, \beta) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \beta = \inf\{b \mid (a_0, a, b) \in A\}\}$: f の二次生成集合。

(vii) $\{(\gamma, a, b) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \gamma = \sup\{a_0 \mid (a_0, a, b) \in A\}\}$: f の二次生成集合。

2.1. クラス $\Lambda_0(\mathbb{R}^n)$ の定義と $\mathcal{L}$-劣微分

以下では

$$\mathcal{L} := \{a_0 \|\cdot\|^2 + \langle a, \cdot \rangle - b \mid a_0 \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}\}$$

とし、次のような関数のクラスを考える。

$$\Lambda_0(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \mid f : \text{proper l.s.c.}, \mathcal{L}(f) \neq \emptyset\}$$

ただし、$\mathcal{L}(f) := \{h \in \mathcal{L} \mid h \leq f\}$ とする。このとき、次の定理が成立する。

Theorem 5 ([5]). $f \in \Lambda_0(\mathbb{R}^n)$ のとき、

$$f(x) = \sup_{h \in \mathcal{L}(f)} h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

この定理により、任意の $\Lambda_0(\mathbb{R}^n)$ の元 f に対する二次生成集合は存在することがわかる。二次の生成集合で表される関数のクラスは非常に大きい（[2]）が、このことについて研究が進みつつある（[5]）。

proper な関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対し、$x \in \mathrm{dom} f$ での $\mathcal{L}$-劣微分 $\partial_{\mathcal{L}} f(x)$ を

$$\partial_{\mathcal{L}} f(x) = \left\{(a_0, a) \,\middle|\, f(z) \geq f(x) + a_0\|z\|^2 + \langle a, z\rangle - a_0\|x\|^2 - \langle a, x\rangle,\ \forall z \in \mathbb{R}^n \right\}$$

で定義する。$\partial_{\mathcal{L}} f(x)$ は $(x, f(x))$ を通り f 以下となる二次関数の二次と一次の係数の組 (a_0, a) の全体である。例えば $f(x) = \max\{-(x-1)^2, -(x+1)^2\}$ $(x \in \mathbb{R})$ のとき、

$$\partial_{\mathcal{L}} f(x) = \begin{cases} (-\infty, -1] \times [-2, 2] & x = 0 \\ \{(a_0, -2(a_0+1)x + 2) \mid a_0 \leq -1\} & x > 0 \\ \{(a_0, -2(a_0+1)x - 2) \mid a_0 \leq -1\} & x < 0 \end{cases}$$

となる。

2.2. $\mathcal{L}$-劣微分を用いた最適性の条件

$f, g \in \Lambda_0(\mathbb{R}^n)$ のとき、次の最小化問題を考える。

$$\text{(P)} \quad v = \inf\{f(x) \mid g(x) \leq 0\}$$

ここで g の二次生成集合 B と $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、次の仮定を考える。

(A1) B : compact

(A2) $B(\bar{x}) = \{(a_0, a, b) \in B \mid a_0\|\bar{x}\|^2 + \langle a, \bar{x}\rangle - b = 0\}$ とおくとき、$B(\bar{x}) \neq \emptyset$ かつ

$$\exists d \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \forall (a_0, a, b) \in B(\bar{x}),\ \langle 2a_0\bar{x} + a, d\rangle < 0$$

(A3) $\{2a_0\bar{x} + a \mid (a_0, a) \in \partial_{\mathcal{L}} f(\bar{x})\} (\neq \emptyset)$: compact

(A4) $\displaystyle \lim_{r \to 0} \sup_{x \in U(\bar{x}, r)} \frac{1}{r} \left\{ f(x) - \sup_{(a_0, a) \in \partial_{\mathcal{L}} f(\bar{x})} q(f, \bar{x}, a_0, a)(x) \right\} = 0$

ただし $q(f, \bar{x}, a_0, a) = a_0\|\cdot\|^2 + \langle a, \cdot\rangle + f(\bar{x}) - a_0\|\bar{x}\|^2 - \langle a, \bar{x}\rangle$

このとき、次の定理が成立する。

Theorem 6. **(A1)**～**(A4)** が成立すると仮定する。もし $\bar{x}$ が (P) の局所的最小解ならば、

- $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n \geq 0$,
- $({a_0}^1, a^1, b^1), ({a_0}^2, a^2, b^2), \cdots, ({a_0}^n, a^n, b^n) \in B$,
- $(\xi_0, \xi) \in \partial_{\mathcal{L}} f(\bar{x})$

が存在して、

$$0 = 2\xi_0 \bar{x} + \xi + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (2{a_0}^i \bar{x} + a^i)$$

が成立する。

References

[1] J. M. Borwein, Direct theorems in semi-infinite convex programming, Math. Prog. **21** (1981), 301–318.

[2] A. M. Rubinov, Abstract Convexity and Global Optimization, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[3] V. Jeyakumar, A. M. Rubinov, Z. Y. Wu, Generalized Fenchel's conjugation formulas and duality for abstract convex functions, J. Optim. Theory Appl. **132** (2007), 441–458.

[4] M. López, G. Still, Semi-infinite programming, Euro. J. Oper. Res. **180** (2007), 491–518.

[5] Y. Seno, M. Tsubokura, D. Kuroiwa, Constraint qualification for lower semicontinuous inequality system, preprint.