数理解析研究所講究録
第 1643 巻 2009 年 203-206

On the relation between the Takahashi fixed point theorem and the Fan-Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem

松江工業高等専門学校 情報工学科 松下 慎也* (Shin-ya Matsushita)
Department of Information Engineering
Matsue College of Technology

1 はじめに

本論文を通して E を Hausdorff 線形位相空間とする。1961 年 Fan [4] は次の結果を証明した[1]。

定理 1.1 (Fan [4]) Y を E のコンパクト集合とし、X を E の凸集合で、$X \subset Y$ となるものとする。このとき、X から 2^Y への写像 F で、つぎの 2 つの条件：

(1) 任意の $x \in X$ に対して、$F(x)$ は Y の E に関する相対位相で閉集合である：

(2) 任意の $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset X$ に対して、$\mathrm{co}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset \cup_{i=1}^n F(x_i)$ である（ただし、$\mathrm{co}D$ は集合 D の凸包をあらわす）

を満たすものが存在するならば、$\cap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset$ である。

この定理は 1929 年に Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz [7] 等によって有限次元空間で得られた結果を一般化したものであり、この結果を用いて Fan [6] はミニマックス定理、不動点定理などさまざまな応用を与えた。

また Aubin [1, 2] は精力的にこの研究に取り組み、定理 1.1 と Brouwer の不動点定理、角谷の不動点定理、ミニマックス定理、変分不等式の解の存在性などについてそれらの関係をまとめている ([3] 参照)。この研究に関連して、Trafdar [13] は、論文 [12] で得た集合値写像に関する不動点定理と定理 1.1 とが互いに証明しあえることを証明した。この研究に動機付けられて、Lin と

*matsushita@matsue-ct.ac.jp (〒 690-8518 島根県松江市西生馬町 14-4)
[1]論文ではさらに一般的な条件で証明されている。

Tian [8] は彼らの証明したミニマックス定理と定理 1.1 とがやはり互いに証明しあえることを証明した。

一方、1986 年に高橋 [9] は次の定理を証明している ([10, 11] 参照)。

定理 1.2 (高橋 [9]) Y を E のコンパクト集合とし、X を E の凸集合で、$X \subset Y$ となるものとする。A を X から 2^Y への写像で、任意の $y \in Y$ に対して、$A^{-1}(y)$ がつねに凸集合になっているものとする。このとき、X から 2^Y への写像 B で、つぎの 3 つの条件：

(1) 任意の $x \in X$ に対して、$B(x) \subset A(x)$ である；

(2) 任意の $y \in Y$ に対して、$B^{-1}(y) \neq \emptyset$ である：

(3) 任意の $x \in X$ に対して、$B(x)$ は Y の E に関する相対位相で開集合である

を満たすものが存在するならば、$x_0 \in A(x_0)$ となる x_0 が存在する。

この定理は Fan-Browder の不動点定理の拡張であり、1 の分解定理と Brouwer の不動点定理を用いて証明されている。

本論文では [13] と [8] の研究に動機付けられて、定理 1.1 と定理 1.2 とが互いに証明しあえることを証明する。

2　高橋の不動点定理と FKKM 定理

はじめに定理 1.2 を用いて定理 1.1 を示す。定理 1.1 の条件で、$\cap_{x \in X} F(x) = \emptyset$ と仮定する。ここで Y から 2^X への写像 f を次のように定義する。任意の $y \in Y$ に対して

$$f(y) = \{x \in X : y \notin F(x)\}$$

とする。仮定より $f(y) \neq \emptyset$ となる。また任意の $x \in X$ に対して、

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \{z \in Y : x \in f(z)\} \\ &= \{z \in Y : z \notin F(x)\} \\ &= F(x)^c \\ &= Y \setminus F(x) \end{aligned}$$

となる。ここで $B(x) = f^{-1}(x)$ とおくと B は X から 2^Y への写像となり、$B^{-1}(y) \neq \emptyset$ で $B(x)$ は Y の E に関する相対位相で開集合となる。次に X から 2^Y への写像 A を任意の $x \in X$ に対して

$$A(x) = (\mathrm{co} f)^{-1}(x)$$

とする。A の定義より任意の $y \in Y$ に対して $A^{-1}(y)$ は凸集合で、任意の $x \in X$ に対して、

$$B(x) \subset A(x)$$

となる。定理 1.2 より、$x_0 \in A(x_0)$ となる $x_0 \in X$ が存在する。A の定義より、$x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ となる $\{x_i\}_{i=1}^n \subset f(x_0)$ と $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset [0,1]$ (ただし、$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$) が存在する。これより任意の $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ に対して、$x_0 \notin F(x_i)$ となり

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = x_0 \notin \cup_{i=1}^n F(x_i).$$

これは F の仮定に矛盾する。よって $\cap_{x\in X} F(x) \neq \emptyset$ が成り立つ。

次に定理 1.1 を用いて定理 1.2 を示す。B の条件 (2) より

$$\cup_{x\in X} B(x) = Y \tag{2.1}$$

が成り立つ。ここで任意の $x \in X$ に対して、

$$F(x) = B(x)^c$$

とすると、$F(x)$ は Y の E に関する相対位相で閉集合となる。ここで $D \neq \emptyset$ のとき $\cap_{x\in X} B(x)^c \neq \emptyset$ となるが、これは (2.1) に矛盾するので $D = \emptyset$ となる。このとき定理 1.1 より

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \notin \cup_{i=1}^n F(x_i)$$

となる $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$ と $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset [0,1]$ (ただし、$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$) が存在する。$x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ とおくと、任意の $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ に対して、

$$x_0 \notin F(x_i) = B(x_i)^c、$$

つまり

$$x_0 \in B(x_i)$$

となる。B の条件 (1) より $B(x_i) \subset A(x_i)$ であるので、

$$x_i \in A^{-1}(x_0)$$

が成り立つ。ここで $A^{-1}(x_0)$ の凸性より、

$$x_0 = \sum_{i=1}^n x_i \in A^{-1}(x_0)$$

つまり $x_0 \in A(x_0)$ が成り立つ。

■

参考文献

[1] J.-P. Aubin, *Mathematical methods of game and economic theory*, North-Holland Publishing, Amsterdam-New York, 1979.

[2] J.-P. Aubin, *Optima and Equilibria*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[3] J.-P. Aubin and I. Ekeland, *Applied nonlinear analysis*, Wiley, New York, 1984

[4] K. Fan, *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Math. Ann., **142** (1961), 305-310.

[5] K. Fan, *A minimax inequality and applications*, in: O. Shisha (Ed.), Inequalities, vol. III, Academic Press, New York, (1972), 103-113.

[6] K. Fan, *Some properties of convex sets related to fixed point theorems*, Math. Ann., **266** (1984), 519-537.

[7] H. Knaster, C. Kuratowski, S. Mazurkiewicz, *Ein Beweis des Fixpunktsatzes fur n-dimensional simplexe*, Fund. Math., **14** (1929), 132-137.

[8] Y. J. Lin and G. Tian, *Minimax inequalities equivalent to the Fan-Knaster-Kuratowski-Mazurkiewcz theorems*, Appl. Math. Optim., **28** (1993), 173-179 .

[9] W. Takahashi, *Fixed point, minimax, and Hahn-Banach theorems*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, American Mathematical Society, **45** (1986), 419-427.

[10] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[11] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama-Publishers, 2000.

[12] E. Trafdar, *On nonlinear variational inequalities*, Proc. Amer. Math. Soc., **67** (1977), 95-98.

[13] E. Trafdar, *A fixed point theorem equivalent to the Fan-Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem*, J. Math. Anal. Appl., **128** (1987), 475-479.