数理解析研究所講究録
第 1643 巻 2009 年 116-123

Absolute normの単調性とその応用[1]

三谷健一 (新潟工科大学工学部)
斎藤吉助 (新潟大学理学部)
小室直人 (北海道教育大学旭川校)

1 序文

$\mathbb{C}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が absolute であるとは, 任意の $x, y \in \mathbb{C}$ に対して

$$\|(|x|,|y|)\| = \|(x,y)\|$$

のときを言い, normalized であるとは $\|(1,0)\| = \|(0,1)\| = 1$ のときを言う. ℓ_p-ノルム $\|\cdot\|_p (1 \leq p \leq \infty)$ は最も基本的な例である:

$$\|(x,y)\|_p = \begin{cases} (|x|^p + |y|^p)^{1/p}, & \text{if} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \max\{|x|,|y|\}, & \text{if} \quad p = \infty. \end{cases}$$

AN_2 を $\mathbb{C}^2$ 上の absolute normalized norm 全体とする. また, Ψ_2 を以下を満たす $[0,1]$ 上の連続凸関数全体とする:

$$\psi(0) = \psi(1) = 1, \quad \max\{1-t, t\} \leq \psi(t) \leq 1 (0 \leq t \leq 1).$$

[1] にあるように, AN_2 と Ψ_2 は

$$\psi(t) = \|(1-t,t)\| \tag{1}$$

の下で 1 対 1 対応であることが知られている. 実際, 任意の $\psi \in \Psi_2$ に対して

$$\|(x,y)\|_\psi = \begin{cases} (|x|+|y|)\psi\left(\dfrac{|y|}{|x|+|y|}\right), & \text{if} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{if} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[1]2000 *Mathematics Subject Classification.* 46B20.
Keywords. absolute normalized norm, Lorentz sequence space, uniformly non-square.

と定義すると $\|\cdot\| \in AN_2$ であり, (1) を満たす. 例えば, $\|\cdot\|_p$ ノルム $(1 \le p \le \infty)$ に対応する関数は

$$\psi_p(t) = \begin{cases} ((1-t)^p + t^p)^{1/p}, & \text{if} \quad 1 \le p < \infty, \\ \max\{1-t, t\}, & \text{if} \quad p = \infty \end{cases}$$

である.

本論文では, $\mathbb{C}^2$ 上の absolute normalized ノルムの単調性を考察する. 2002 年, 高橋-加藤-斎藤 [12] は $\mathbb{C}^2$ 上の absolute normalized ノルム及び 2 個のバナッハ空間の ψ-直和空間の狭義凸性を調べる際に, absolute normalized ノルムの狭義の単調性を考察した. その単調性の結果を改良し, それに対応する関数 ψ の形状との関係を表すことを目的とする. 応用として, バナッハ空間上に新しい幾何学的定数 $\gamma_{X,\psi}$ を導入し, 一様 non-square 性を持つバナッハ空間を $\gamma_{X,\psi}$ を用いて評価する.

2 Absolute normalized ノルムの単調性

本章では, $\mathbb{C}^2$ 上の absolute normalized ノルムの単調性を考える. 次の命題に見られるように, absolute normalized ノルムはノルムの単調性を持つ.

命題 1 ([1]) $\psi \in \Psi_2$ とする. (i) $|z| \le |u|$, $|w| \le |v|$ ならば

$$\|(z,w)\|_\psi \le \|(u,v)\|_\psi.$$

(ii) $|z| < |u|$, $|w| < |v|$ ならば

$$\|(z,w)\|_\psi < \|(u,v)\|_\psi.$$

しかし, 高橋-加藤-斎藤 [12] にあるように, $\psi \in \Psi_2$ に対して一般に次は成立しない: $|z| \le |u|$, $|w| \le |v|$ とする. $|z| < |u|$ または $|w| < |v|$ ならば,

$$\|(z,w)\|_\psi < \|(u,v)\|_\psi. \tag{2}$$

例えば, (2) は $\psi = \psi_p (1 \le p < \infty)$ のとき成立するが, $\psi = \psi_\infty$ のときは成立しない.

高橋-加藤-斎藤 [12] は (2) を満たすための ψ の必要十分条件を与えた.

定理 2 ([12]) $\psi \in \Psi_2$ とする. このとき次は同値:

(i) $0 < t < 1$ なる任意の t に対して $\psi(t) > t$.

(ii) $\psi(t)/t$ は $(0,1]$ 上狭義単調減少.

(iii) $|z| < |u|$, $|w| \leq |v|$ ならば $\|(z,w)\|_\psi < \|(u,v)\|_\psi$.

定理 3 ([12]) $\psi \in \Psi_2$ とする. このとき次は同値:

(i) $0 < t < 1$ なる任意の t に対して $\psi(t) > 1-t$.

(ii) $\psi(t)/(1-t)$ は $[0,1)$ 上狭義単調増加.

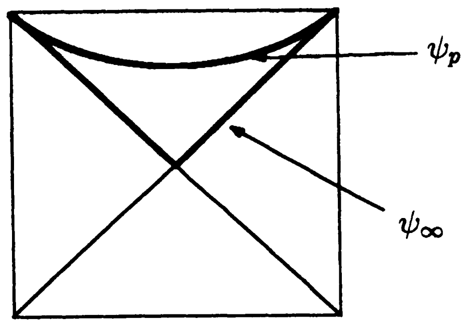
(iii) $|z| \leq |u|$, $|w| < |v|$ ならば $\|(z,w)\|_\psi < \|(u,v)\|_\psi$.

定理 4 ([12]) $\psi \in \Psi_2$ とする. このとき次は同値:

(i) $0 < t < 1$ なる任意の t に対して $\psi(t) > \psi_\infty(t)$.

(ii) $|z| \leq |u|$, $|w| < |v|$ または $|z| < |u|$, $|w| \leq |v|$ ならば $\|(z,w)\|_\psi < \|(u,v)\|_\psi$.

例 5 ℓ_p-ノルム $\|\cdot\|_p (1 \leq p < \infty)$ の単調性を考える. 明らかに, 任意の $t \in (0,1)$ に対して $\psi_p(t) > \psi_\infty(t)$ である.



従って, 定理 4 を適用することにより次が得られる: $|z| \leq |u|$, $|w| < |v|$ または $|z| < |u|$, $|w| \leq |v|$ ならば

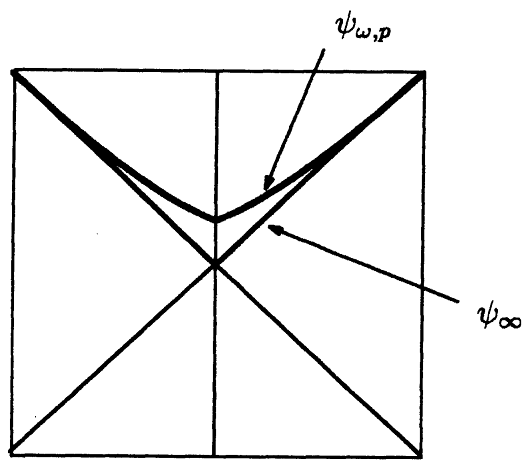
$$\|(z,w)\|_p < \|(u,v)\|_p.$$

例 6 $1 \le q < \infty, 0 < \omega < 1$ とする. 2次元 Lorentz 数列空間 $d^{(2)}(\omega, q)$ は, 次のノルムを持つ $\mathbb{R}^2$ である：

$$\|(x,y)\|_{\omega,q} = (x^{*q} + \omega y^{*q})^{1/q},$$

ここで $x^* = \max\{|x|,|y|\}$, $y^* = \min\{|x|,|y|\}$ である. このとき $\|\cdot\|_{\omega,q} \in AN_2$ であり, このノルムに対応する Ψ_2 の中の関数 $\psi_{\omega,q}(\in \Psi_2)$ は

$$\psi_{\omega,q}(t) = \begin{cases} ((1-t)^q + \omega t^q)^{1/q}, & \text{if} \quad 0 \le t \le 1/2, \\ (t^q + \omega(1-t)^q)^{1/q}, & \text{if} \quad 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$



上の図から, 任意の $t \in (0,1)$ に対して $\psi_{\omega,p}(t) > \psi_\infty(t)$ である. よって定理4より $|z| \le |u|$, $|w| < |v|$ または $|z| < |u|$, $|w| \le |v|$ ならば

$$\|(z,w)\|_{\omega,p} < \|(u,v)\|_{\omega,p}.$$

我々は定理2及び3の結果をさらに改良し, ノルムの狭義の単調性とそれに対応する関数 ψ の形状との関係を表す.

定理 7 $\psi \in \Psi_2$ とし, $1/2 \le t_0 \le 1$ とする. このとき次は同値:

(i) 任意の $0 < t < t_0$ なる t に対して $\psi(t) > t$. また任意の $t_0 \le t \le 1$ なる t に対して $\psi(t) = t$.

(ii) $\psi(t)/t$ は $(0, t_0)$ 上狭義単調減少. また任意の $t_0 \le t \le 1$ なる t に対して $\psi(t)/t = 1$.

(iii) $|z| < |u|$ とする. $\frac{|w|}{|u|+|w|} < t_0$ ならば

$$\|(z,w)\|_\psi < \|(u,w)\|_\psi.$$

また $\frac{|w|}{|u|+|w|} \ge t_0$ ならば

$$\|(z,w)\|_\psi = \|(u,w)\|_\psi.$$

定理 8 $\psi \in \Psi_2$ とし, $0 \le t_0 \le 1/2$ とする. このとき次は同値:

(i) 任意の $t_0 < t < 1$ なる t に対して $\psi(t) > 1-t$. また任意の $0 \le t \le t_0$ なる t に対して $\psi(t) = 1-t$.

(ii) $\psi(t)/(1-t)$ は $(t_0, 1)$ 上狭義単調増加. また任意の $0 \le t \le t_0$ なる t に対して $\psi(t)/(1-t) = 1$.

(iii) $|w| < |u|$ とする. $\frac{|v|}{|z|+|v|} > t_0$ ならば

$$\|(z,w)\|_\psi < \|(z,v)\|_\psi.$$

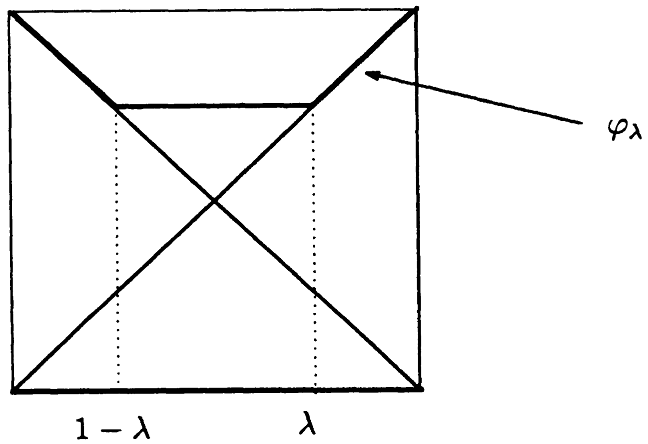
$\frac{|v|}{|z|+|v|} \le t_0$ ならば

$$\|(z,w)\|_\psi = \|(z,v)\|_\psi.$$

例 9

$$\varphi_\lambda(t) = \max\{\lambda, 1-t, t\} \in \Psi_2$$

を考える, ここで $1/2 < \lambda \le 1$.



この関数に対応するノルムは

$$\|(x,y)\|_{\varphi_\lambda} = \max\{\lambda\|(x,y)\|_1, \|(x,y)\|_\infty\}.$$

このとき $0 < t < \lambda$ ならば $\varphi_\lambda(t) > t$. $\lambda \le t \le 1$ ならば $\varphi_\lambda(t) = t$. 従って上の定理を適用することにより次が成り立つ : $|z| < |u|$ とする. $\frac{w|}{|u|+|w|} < \lambda$ ならば

$$\|(z,w)\|_{\varphi_\lambda} < \|(u,w)\|_\psi.$$

また $\frac{w|}{|u|+|w|} \ge \lambda$ ならば

$$\|(z,w)\|_\psi = \|(u,w)\|_\psi.$$

3 バナッハ空間における幾何学的定数

X をバナッハ空間とする. また, $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ とおく. このとき

$$\rho_X(t) = \sup\{\frac{\|x+ty\| + \|x-ty\|}{2} - 1 : x, y \in S_X\}$$

を X の modulus of smoothness と言う. Yang-Wang[13] はバナッハ空間 X 上の幾何学的定数 γ_X を導入した:

$$\gamma_X(t) = \sup\{\frac{\|x+ty\|^2 + \|x-ty\|^2}{2} : x, y \in S_X\}.$$

本章では, これらの定数を一般化したバナッハ空間上の幾何学的定数 $\gamma_{X,\psi}$ を導入する.

バナッハ空間 X, Y と $\psi \in \Psi_2$ に対し、次のノルムを持つ X, Y の直和空間をバナッハ空間 X, Y の ψ-直和といい, $X \oplus_\psi Y$ と表す:

$$\|(x, y)\|_\psi = \|(\|x\|, \|y\|)\|_\psi \quad (x \in X,\ y \in Y).$$

このとき, バナッハ空間 X と $\psi \in \Psi_2$ に対し, [0,1] 上の関数 $\gamma_{X,\psi}$ を以下のように定義する ([8]):

$$\gamma_{X,\psi}(t) = \sup\left\{\|(x+ty, x-ty)\|_\psi : x, y \in S_X\right\}.$$

明らかに,

$$\gamma_{X,\psi_1}(t) = 2(\rho_X(t) + 1).$$

ここで ψ_1 は ℓ_1-ノルムに対応する関数である. また

$$\gamma_{X,\psi_2}(t) = \sqrt{2\gamma_X(t)}.$$

ここで ψ_2 は ℓ_2-ノルムに対応する関数である.

命題 10 任意のバナッハ空間 X と $\psi \in \Psi_2$ に対して

$$2\psi(\tfrac{1-t}{2}) \le \gamma_{X,\psi}(t) \le 2(1+t)\psi(\tfrac{1}{2}).$$

定義 11 バナッハ空間 X が一様 *non-square* であるとは, ある $\delta > 0$ が存在し, $\|(x-y)/2\| \ge 1-\delta$ なる $x, y \in S_X$ ならば $\|(x+y)/2\| < 1-\delta$ であるときを言う.

一様 non-square を持つバナッハ空間を考える。[2, 13] において一般のバナッハ空間の一様 non-square 性の ρ_X, γ_X による特徴づけが与えられた.

定理 12 ([2, 13]) X をバナッハ空間とする．このとき次は同値:
(i) X が一様 non-square.
(ii) $0 < t \leq 1$ なる任意の (ある) t に対して $\rho_X(t) < t$.
(iii) $0 < t \leq 1$ なる任意の (ある) t に対して $\gamma_X(t) < (1+t)^2$.

この定理の拡張として以下の定理が与えられた．

定理 13 ([8]) X をバナッハ空間, $\psi \in \Psi_2$ とする．また任意の $0 < t < 1$ に対して $\psi(t) > \psi_\infty(t)$. このとき次は同値:
(i) X が一様 non-square.
(ii) 任意の $0 < t \leq 1$ に対して $\gamma_{X,\psi}(t) < 2(1+t)\psi(\frac{1}{2})$.
(iii) ある $0 < t_0 \leq 1$ に対して $\gamma_{X,\psi}(t_0) < 2(1+t_0)\psi(\frac{1}{2})$.

しかし定理 7 と定理 8 を用いることにより, 以下のように改良することができる．

定理 14 X をバナッハ空間, $\psi \in \Psi_2$ とする．また $\psi \neq \psi_\infty$ とする．このとき次は同値:
(i) X が一様 non-square.
(ii) 任意の $0 < t \leq 1$ に対して $\gamma_{X,\psi}(t) < 2(1+t)\psi(\frac{1}{2})$.
(iii) ある $0 < t_0 \leq 1$ に対して $\gamma_{X,\psi}(t_0) < 2(1+t_0)\psi(\frac{1}{2})$.

$\varphi_\lambda = \max\{\lambda, 1-t, t\} \in \Psi_2$ を考える, ここで $1/2 < \lambda \leq 1$. このとき $\varphi_\lambda(\frac{1}{2}) = \lambda$ であり, $\varphi_\lambda \neq \psi_\infty$ である．従って上の定理より次が得られる．

系 15 X をバナッハ空間とする．また $1/2 < \lambda \leq 1$ とする．このとき次は同値:
(i) X は一様 non-square.
(ii) 任意の $0 < t \leq 1$ に対して $\gamma_{X,\varphi_\lambda}(t) < 2\lambda(1+t)$.
(iii) ある $0 < t_0 \leq 1$ に対して $\gamma_{X,\varphi_\lambda}(t_0) < 2\lambda(1+t_0)$.

参考文献

[1] F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges II, London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol.10, 1973.

[2] J. Gao, Normal structure and modulus of smoothness in Banach spaces, Nonlinear Funct. Anal. Appl. 8 (2003) 233–241.

[3] J. Gao and K. S. Lau, On two classes of Banach spaces with uniform normal structure, Studia Math. 99 (1991) 41–56.

[4] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces, Studia Math. 144 (2001) 275–295.

[5] M. Kato, K. -S. Saito and T. Tamura, On ψ-direct sums of Banach spaces and convexity, J. Austral. Math. Soc. 75 (2003) 413–422.

[6] M. Kato, K. -S. Saito and T. Tamura, Uniform non-squareness of ψ-direct sums of Banach spaces $X \oplus_\psi Y$, Math. Inequal. Appl. 7 (2004) 429–437.

[7] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, A note on geometrical properties of Banach spaces using ψ-direct sums, J. Math. Anal. Appl. 327 (2007) 898–907.

[8] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, A new geometrical constant and ψ-direct sums of Banach spaces, Proceedings of the 2nd international symposium on Banach and function spaces II, Yokohama Publishers, (2008) 385–391.

[9] K.-S. Saito and M. Kato, Uniform convexity of ψ-direct sums of Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 277 (2003) 1–11.

[10] K.-S. Saito, M. Kato and Y, Takahashi, Absolute norms on $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl. 252 (2000) 879–905.

[11] Y. Takahashi and M. Kato, Von Neumann-Jordan constant and uniformly non-square Banach spaces, Nihonkai Math. J. 9 (1998) 155–169.

[12] Y. Takahashi, M. Kato and K.-S. Saito, Strict convexity of absolute normes on $\mathbb{C}^2$ and direct sums of Banach spaces, J. Inequal. Appl. 7 (2002) 179–186.

[13] C. Yang and F. Wang, On a new geometric constant related to the von Neumann-Jordan constant, J. Math. Anal. Appl. 324 (2006) 555–565.