

## Gray-Scott モデルにおける定常パルス解の 不安定多様体に対する数値解析

岐阜大学工学部 矢ヶ崎一幸 (Kazuyuki Yagasaki)  
 Faculty of Engineering, Gifu University

### 1. はじめに

Gray-Scott モデルと呼ばれる反応・拡散系

$$\begin{aligned} \dot{U} &= D_u U'' - UV^2 + f(1 - U), \\ \dot{V} &= D_v V'' + UV^2 - (f + k)V, \end{aligned} \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

では、あたかも細胞が分裂しているかのように次々とパルスの峰の数が増えて行く、自己複製パターンを示すことが知られている [1]. このような遷移ダイナミクスを理解するためにさまざまな研究が行われ、特に、不安定パルス解の不安定多様体の挙動により、その多くが説明できることが示唆されている [2]. 本報告では、これまで困難であった、大自由度系の高次元不安定多様体の計算により、Gray-Scott モデル (1) のパルス定常解の不安定多様体を数値的に求める。

### 2. 定常パルス解

式 (1) において、 $f^2 t$  と  $(\sqrt{f/D_u}) x$  を、それぞれ、新しい独立変数  $t$  と  $x$  とし、 $u = (1 - U)/f$ 、 $v = V/f$  を代入して得られる偏微分方程式系

$$\dot{u} = u'' - u + v^2 - fuv^2, \quad \dot{v} = \delta v'' - (1 + \kappa)v + v^2 - fuv^2 \tag{2}$$

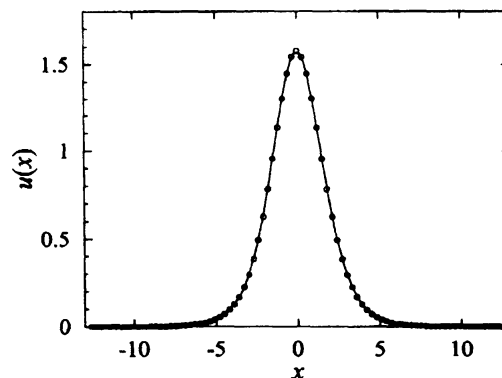


図 1.  $f = 0.04$ ,  $\delta = 1$ ,  $\kappa = 0$  のときの式 (3) のホモクリニック解 (式 (2) のパルス定常解) と、 $\epsilon = 0.09$  ( $\Delta x = 0.3$ ) として式 (7) によって定められる写像のホモクリニック軌道

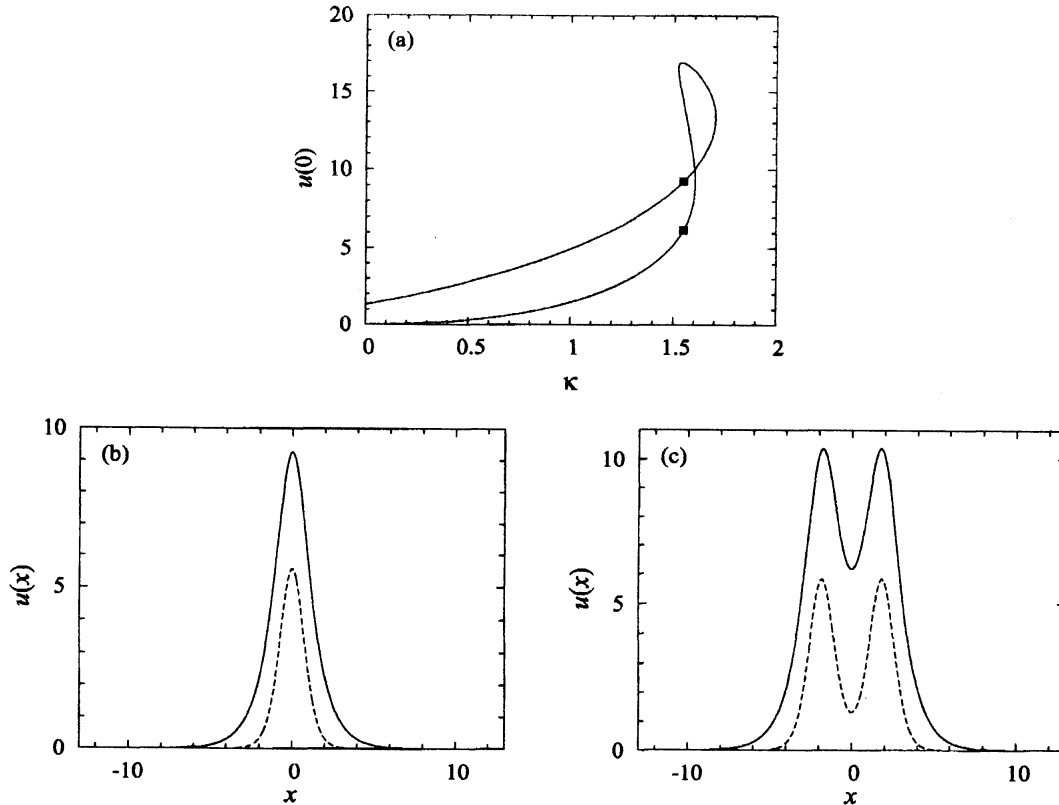


図 2.  $f = 0.04$ ,  $\delta = 0.5$  の場合における式 (3) のホモクリニック解 ((式 (2) のパルス定常解)) : (a) 軌道の分枝; (b)  $\kappa = 1.55$  のときの上枝の軌道形状 (実線は  $u$ , 破線は  $v$ ); (c) 下枝の軌道形状

を考える. ここで, ドットとダッシュは, それぞれ, 時間  $t$  と位置  $x$  に関する微分を表し,  $D_u, D_v, f, k > 0$  は定数,  $\delta = D_v/D_u$ ,  $\kappa = k/f$  である.  $(\dot{u}, \dot{v}) = (0, 0)$  となる, 式 (2) の定常解は次式を満足する.

$$u'' - u + v^2 - fuv^2 = 0, \quad \delta v'' - (1 + \kappa)v + v^2 - fuv^2 = 0 \quad (3)$$

原点  $(u, v) = (0, 0)$  は式 (3) の定数解で, 適当なパラメータ  $\delta, \kappa, f$  の値に対して,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\hat{u}(x), \hat{v}(x)) = (0, 0)$$

を満たし, 式 (2) のパルス定常解に対応した, ホモクリニック解  $(\hat{u}(x), \hat{v}(x))$  を有する. 系 (3) は可逆なので, ホモクリニック解の存在するパラメータ集合の余次元は 0 である. 特に,  $\delta = 1$ ,  $\kappa = 0$ ,  $f < 2/9 = 0.22\dots$  の場合, ホモクリニック解

$$\hat{u}(x) = \hat{v}(x) = \frac{6}{2 + \sqrt{4 - 18f} \cosh x} \quad (4)$$

が存在する (その解の形状に対しては図 1 を参照せよ). 無限次元力学系 (2) において, パルス定常解は不安定なとき不安定多様体を有する.

式 (3) に対して, 計算ツール AUTO97 (HomCont) [3] を用いて, ホモクリニック解 (4) を初期解として  $(\delta, k) \neq (1, 0)$  の場合において解の追跡を行った. 得られたホモクリニック解の分枝とそ

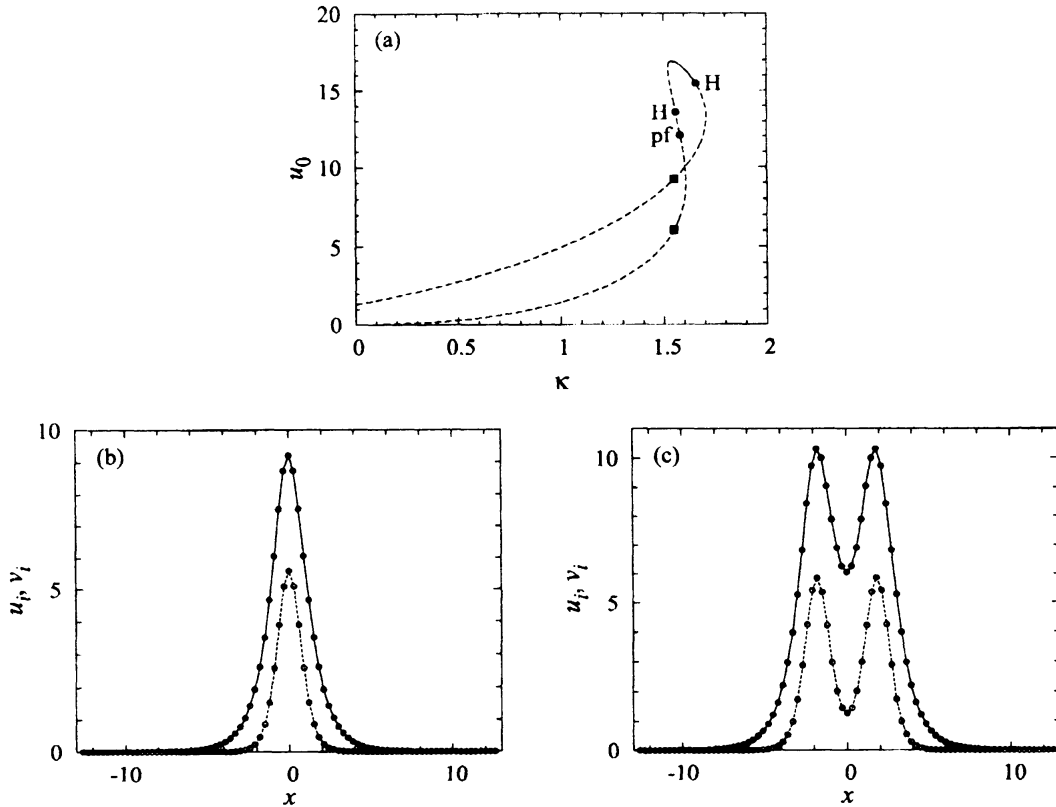


図 3.  $f = 0.04$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\epsilon = 0.09$  の場合において, 式 (6) によって定められる写像のホモクリニック軌道 (式 (5) に対するパルス定常解): (a) 軌道の安定分枝 (実線) と不安定分枝 (破線); (b)  $\kappa = 1.55$  のときの upper 枝の軌道形状 (実線は  $u$ , 破線は  $v$ ); (c) 下枝の軌道形状

の形状を図 2 に与える.

### 3. 離散化

さて, 式 (2) に対して, きざみ幅  $\Delta x$  で  $x (= i \Delta x)$  に関する差分近似を行うと, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= \epsilon^{-1}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) - u_i + v_i^2 - fu_i v_i^2, \\ \dot{v}_i &= \delta \epsilon^{-1}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) - (1 + \kappa)v_i + v_i^2 - fu_i v_i^2 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで,  $\epsilon = \Delta x^2$  である. 式 (5) の平衡点 (定数解) は次式を満たす.

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= 2u_i - u_{i-1} + \epsilon(u_i - v_i^2 + fu_i v_i^2), \\ v_{i+1} &= 2v_i - v_{i-1} + \frac{\epsilon}{\delta}((1 + \kappa)v_i - v_i^2 + fu_i v_i^2) \end{aligned} \quad (6)$$

式 (6) は 4 次元写像  $(u_{i-1}, u_i, v_{i-1}, v_i) \mapsto (u_i, u_{i+1}, v_i, v_{i+1})$  を定め, その不動点  $(u_{i-1}, u_i, v_{i-1}, v_i) = (0, 0, 0, 0)$  に対するホモクリニック軌道  $(\hat{u}_{i-1}, \hat{u}_i, \hat{v}_{i-1}, \hat{v}_i)$  は式 (2) のパルス定常解  $(\hat{u}(x), \hat{v}(x))$  に対応する. 式 (5) における, この平衡点  $(\hat{u}_{i-1}, \hat{u}_i, \hat{v}_{i-1}, \hat{v}_i)$  の不安定多様体により, パルス定常解  $(\hat{u}(x), \hat{v}(x))$  の不安定多様体を近似する.

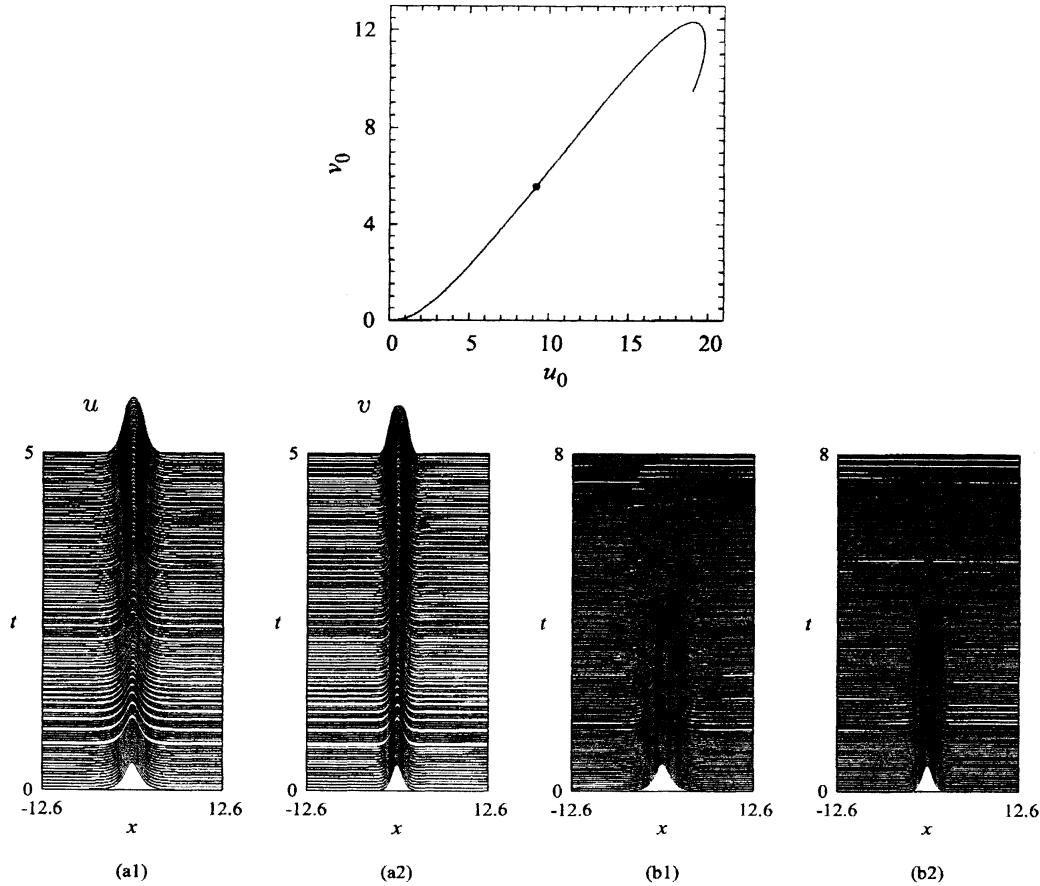


図 4. 図 3(b) で与えられた式 (5) の平衡点の不安定多様体: 上図は不安定多様体の  $(u_0, v_0)$ -平面への射影, (a) と (b) は, それぞれ, 不安定多様体の右枝と左枝上の軌道

まず, 式 (6) で定められる写像のホモクリニック軌道を求める.  $(\delta, k) = (1, 0)$  のとき, 式 (3) の場合と同様に, 式 (6) は  $u_i = v_i$  となる軌道を有し, また, その軌道は

$$v_{i+1} = 2v_i - v_{i-1} + \epsilon(v_i - v_i^2 + f v_i^3) \quad (7)$$

を満たす. 式 (7) は 2 次元写像  $(v_{i-1}, v_i) \mapsto (v_i, v_{i+1})$  を定め, 不動点  $(v_{i-1}, v_i) = (0, 0)$  に対するホモクリニック軌道  $(\hat{v}_{i-1}, \hat{v}_i)$  は, 式 (6) の 4 次元写像のホモクリニック軌道  $(u_{i-1}, u_i, v_{i-1}, v_i) = (\hat{v}_{i-1}, \hat{v}_i, \hat{v}_{i-1}, \hat{v}_i)$  を与える. 式 (7) に対して, AUTO97 とドライバー HomMap [4, 5] を用いて求められた, ホモクリニック軌道を図 1 に示す. さらに, 式 (6) に対して,  $(\delta, k) \neq (1, 0)$  の場合にこのホモクリニック軌道を初期解として AUTO97 により解の追跡を行って, 式 (6) で与えられる写像のホモクリニック軌道, すなわち, 式 (5) のパルス状平衡解を求めた. 得られた平衡解の分枝とそのいくつかの形状を図 2 に与える. 図では, 式 (5) の右辺のヤコビ行列の固有値から計算される, 平衡解の安定性も示されている.

#### 4. 不安定多様体の数値計算

次に, 十分大きな節点数  $2N + 1$  に対して, 式 (5) のパルス状不安定平衡解の不安定多様体を計

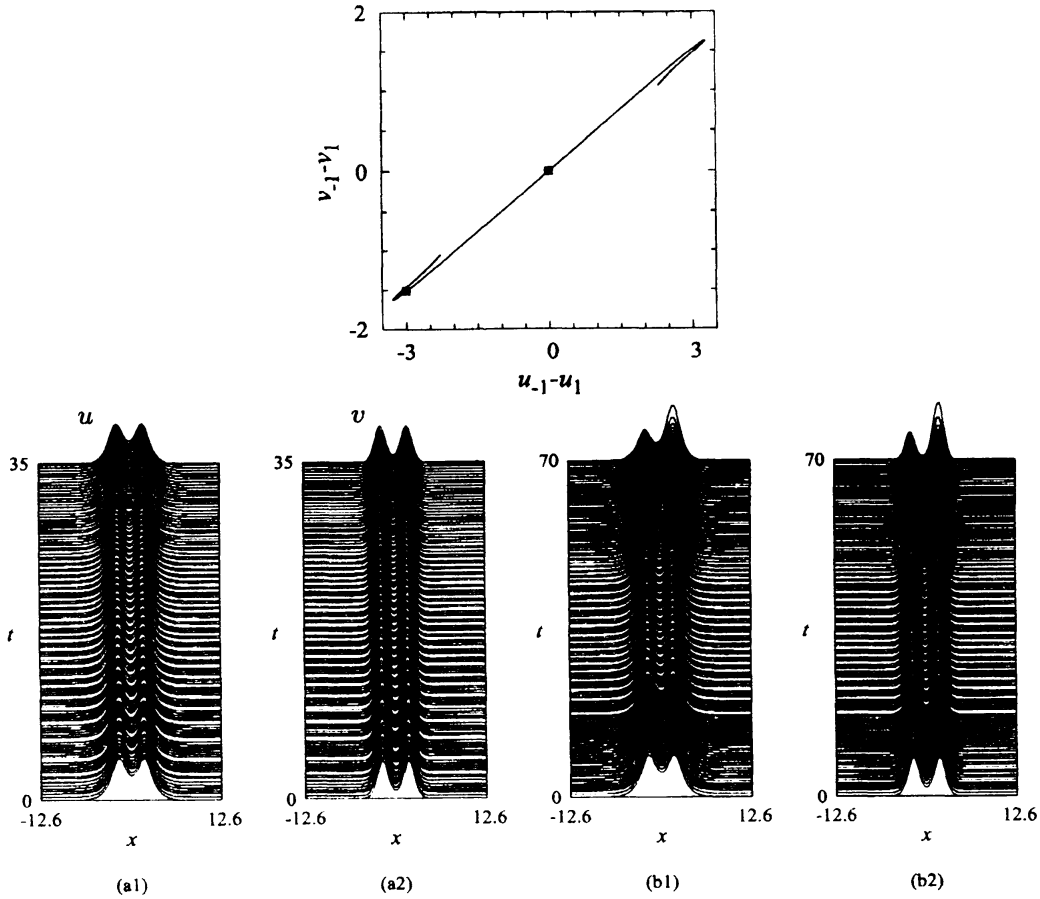


図 5. 図 3(c) で与えられた式 (5) の平衡点の不安定多様体: 上図は不安定多様体の  $(u_{-1} - u_1, v_{-1} - v_1)$ -平面への射影, (a) と (b) は, それぞれ, 上図の中心と左端付近の点 ■ を通過する不安定多様体上の軌道

算する. まず, 平衡点  $\hat{w} = (\hat{u}_{-N}, \dots, \hat{u}_N, \hat{v}_{-N}, \dots, \hat{v}_N)$  の近傍において, 線形化方程式

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \epsilon^{-1}(\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}) - (1 + f\hat{v}_i^2)\xi_i + 2(1 - f\hat{u}_i)\hat{v}_i\eta_i, \\ \dot{\eta}_i &= \delta\epsilon^{-1}(\eta_{i+1} - 2\eta_i + \eta_{i-1}) - f\hat{v}_i^2\xi_i + (2(1 - f\hat{u}_i)\hat{v}_i - (1 + \kappa))\eta_i \end{aligned} \quad (8)$$

の不安定部分空間により不安定多様体を近似する. この近似下において, 不安定多様体上の軌道  $w^u(t) = (u_{-N}^u(t), \dots, u_N^u(t), v_{-N}^u(t), \dots, v_N^u(t))$  を, 次の境界条件を満足する式 (5) の解として求める.

$$L_{s0}(w^u(0) - \hat{w}) = 0, \quad w^u(T) = w_0^u \quad (9)$$

ここで,  $n_s$  を安定多様体の次元として,  $L_{s0}$  は式 (5) の平衡点におけるヤコビ行列の安定固有値と零固有値に対する固有行ベクトルからなる  $(n_s + 1)$  行  $(2N + 1)$  列の行列を表し,  $T > 0$  はある定数,  $w_0^u$  は近似的な不安定多様体上の点である.  $T \ll 1$  のときの線形系 (8) の解  $\zeta^u(t) = (\xi_{-N}^u(t), \dots, \xi_N^u(t), \eta_{-N}^u(t), \dots, \eta_N^u(t))$  により  $w^u(t) = \hat{w} + \zeta(t)$  と与えられる近似解を初期解として, AUTO97 を用いて解の追跡を行い, 式 (5) と (9) からなる境界値問題を数値的に解くことにより, 不安定多様体が求められる. 図 4 と 5 に計算された, 1次元と 3次元不安定多様体とその上の軌道を示す.

## 参考文献

- [1] W.N. Reynolds, J.E. Pearson and S. Ponce-Dawson, Dynamics of self-replicating patterns in reaction diffusion systems, *Phys. Rev. Lett.*, **72** (1994), 2797–2800.
- [2] 上山大信, 西浦廉政, 自己触媒系に現れる自己複製パターンと時空カオス, 三村昌泰編, パターン形成とダイナミクス, 東京大学出版会, 2006.
- [3] E. Doedel, A.R. Champneys, T.F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B. Sandstede and X. Wang, *AUTO97: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations (with HomCont)*, 1997. Available by anonymous ftp from [ftp.cs.concordia.ca](ftp://ftp.cs.concordia.ca), directory `pub/doedel/auto`.
- [4] K. Yagasaki, Numerical detection and continuation of homoclinic points and their bifurcations for maps and periodically forced systems, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **8** (1998), 1617–1627.
- [5] K. Yagasaki. *HomMap: An Auto driver for homoclinic bifurcation analysis of maps and periodically forced systems*, 1998. Available from [http://www1.gifu-u.ac.jp/~chaos/yagasaki/software\\_e.html](http://www1.gifu-u.ac.jp/~chaos/yagasaki/software_e.html).
- [6] K. Yagasaki, *Numerical computation of stable and unstable manifolds of normally hyperbolic invariant manifolds*, in preparation.