

## 弱順序極小構造と definable 集合の完備化

阿南工業高等専門学校・一般教科 田中 広志 (Hiroshi Tanaka)  
Liberal Arts Division, Anan National College of Technology  
htanaka@anan-nct.ac.jp

### 概要

$\mathcal{M} = (M, <, \dots)$  を弱順序極小構造とし,  $X \subseteq M^n$  を definable 集合とする。R. Wencel は,  $X$  がセルのとき, その完備化を定義した。このノートでは,  $\mathcal{M}$  がセル分解を許すとき, 一般の definable 集合  $X$  に対してその完備化を考える。

$\mathcal{M} = (M, <, \dots)$  を端点を持たない全順序構造とする。 $M$  の部分集合  $A$  が, 任意の  $a, b \in A$  と  $c \in M$  に対して,  $a < c < b$  ならば  $c \in A$  をみたすとき,  $A$  は  $M$  の凸集合であるという。さらに  $\sup A, \inf A \in M \cup \{-\infty, +\infty\}$  のとき,  $A$  は  $M$  の区間であるという。構造  $\mathcal{M}$  の任意の definable 集合  $D \subseteq M$  が, 区間 (または凸集合) の有限和で表せるとき,  $\mathcal{M}$  は順序極小構造 (または弱順序極小構造) であるとよぶ。理論  $\text{Th}(\mathcal{M})$  の任意のモデルが順序極小 (または弱順序極小) になるとき,  $\text{Th}(\mathcal{M})$  は順序極小理論 (または弱順序極小理論) とよぶ。順序極小構造に関する参考文献として [1], [3], 弱順序極小構造に関する参考文献として [2], [5], [7] がある。

以後考える構造  $\mathcal{M}$  はすべて弱順序極小構造とする。

$C, D \subseteq M$  とする。任意の  $c \in C, d \in D$  に対して  $c < d$  のとき,  $C < D$  と書く。空でない集合の対  $\langle C, D \rangle$  が,  $C < D$  かつ  $C \cup D = M$  でさらに  $D$  が最小元を持たないとき,  $M$  の切断であるという。 $\mathcal{M}$  の definable 切断全体を  $\overline{M}$  によって表す。任意の  $a \in M$  に対して, definable 切断  $\langle (-\infty, a], (a, +\infty) \rangle$  を考えることにより,  $M \subseteq \overline{M}$  とみなす。さらに  $\langle C_1, D_1 \rangle < \langle C_2, D_2 \rangle$  を  $C_1 \subsetneq C_2$  と定義することにより,  $(M, <)$  を  $(\overline{M}, <)$  の部分構造とみなす。

$M$  (または  $\overline{M}$ ) 上に,  $M$  (または  $\overline{M}$ ) の开区間を基本開集合として位相を入れる。

$n$  を自然数とし,  $A \subseteq M^n$  を definable とする。写像  $f : A \rightarrow \overline{M}$  において, 集合

---

2000 Mathematics Subject Classification. 03C64.

Key words and phrases. Weakly o-minimal, definably connected.

$\{(x, y) \in A \times M : y < f(x)\}$  が definable になるとき,  $f$  は **definable** であるという。写像  $f : A \rightarrow \overline{M} \cup \{-\infty, \infty\}$  が **definable** とは,  $f$  が  $A$  から  $\overline{M}$  への definable 写像であるか, 任意の  $x \in A$  に対し  $f(x) = \infty$  であるか, または任意の  $x \in A$  に対し  $f(x) = -\infty$  になるときをいう。

[7] に弱順序極小構造上でのセルの定義がある。

**定義 1.** 弱順序極小構造  $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$  に対して, セルとその完備化を帰納的に定義する:

1.  $M$  の 1 点集合は  $\langle 0 \rangle$ -セルとする。  $C \subseteq M$  が  $\langle 0 \rangle$ -セルのとき, その完備化を  $\overline{C} := C$  と定める。
2.  $M$  の空でない definable 開集合は  $\langle 1 \rangle$ -セルとする。  $C \subseteq M$  が  $\langle 1 \rangle$ -セルのとき, その完備化を  $\overline{C} := \{x \in \overline{M} : \exists a, b \in C, a < x < b\}$  と定める。
3.  $C \subseteq M^m$  が  $\langle i_1, \dots, i_m \rangle$ -セルで  $f : C \rightarrow M$  が definable で連続, さらに連続な拡張  $\overline{f} : \overline{C} \rightarrow \overline{M}$  をもつとき, グラフ  $\Gamma(f)$  は  $\langle i_1, \dots, i_m, 0 \rangle$ -セルとし, その完備化を  $\overline{\Gamma(f)} := \Gamma(\overline{f})$  と定める。
4.  $C \subseteq M^m$  が  $\langle i_1, \dots, i_m \rangle$ -セルで  $g, h : C \rightarrow \overline{M} \cup \{-\infty, \infty\}$  が definable で連続, さらに連続な拡張  $\overline{g}, \overline{h} : \overline{C} \rightarrow \overline{M}$  をもち, 任意の  $x \in \overline{C}$  に対して  $\overline{g}(x) < \overline{h}(x)$  のとき,

$$(g, h)_C := \{\langle a, b \rangle \in C \times M : g(a) < b < h(a)\}$$

は  $\langle i_1, \dots, i_m, 1 \rangle$ -セルとし, その完備化を

$$\overline{(g, h)_C} := \{\langle a, b \rangle \in \overline{C} \times \overline{M} : \overline{g}(a) < b < \overline{h}(a)\}$$

と定める。

5. ある  $i_1, \dots, i_m \in \{0, 1\}$  が存在して,  $C \subseteq M^m$  が  $\langle i_1, \dots, i_m \rangle$ -セルとなるとき,  $C$  はセルとよぶ。

**定義 2.**  $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$  を弱順序極小構造,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $X \subseteq M^m$  を空でない definable 集合とする。以下で,  $X$  のセル分解を  $m$  に関して帰納的に定義する。

1.  $X$  を  $M$  の空でない definable 部分集合で,  $\mathcal{D} = \{C_0, \dots, C_k\}$  をセルによる  $X$  の分割とする。このとき,  $\mathcal{D}$  は  $X$  のセル分解であるという。
2.  $X$  を  $M^{m+1}$  の空でない definable 部分集合で,  $\mathcal{D} = \{C_0, \dots, C_k\}$  をセルによる  $X$  の分割とし,  $\pi : M^{m+1} \rightarrow M^m$  を最後の座標を除く射影とする。このとき,

$\{\pi(C_0), \dots, \pi(C_k)\}$  が  $\pi(X)$  のセル分解になるとき,  $\mathcal{D}$  は  $X$  のセル分解であるという。

**定義 3.**  $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$  を弱順序極小構造,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $X, Y \subseteq M^m$  を definable 集合,  $X \neq \emptyset$  とする. また  $\mathcal{D}$  を  $X$  のセル分解とする. このとき, 任意の  $C \in \mathcal{D}$  に対して,  $C \subseteq Y$  または  $C \cap Y = \emptyset$  となるとき,  $\mathcal{D}$  は  $Y$  を分割するという。

**定義 4.**  $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$  を弱順序極小構造とする. 任意の  $m, k \in \mathbb{N}$  と definable 集合  $X_1, \dots, X_k \subseteq M^m$  に対して,  $X_1, \dots, X_k$  のすべてを分割するような  $M^m$  のセル分解が存在するとき,  $\mathcal{M}$  はセル分解をみたすという。

以後考える弱順序極小構造  $\mathcal{M}$  はセル分解を許すと仮定する。

**定義 5.** 弱順序極小構造  $\mathcal{M}$  はセル分解を許すとし,  $X \subseteq M^n$  を definable とする. このとき, definable 集合  $X$  の完備化を

$\{a \in (\overline{M})^n : X \text{ のセルによる分割 } X_1, \dots, X_k \text{ と } 1 \leq i \leq k \text{ となる } i \text{ が取れて, } a \in \overline{X_i}\}$

と定義し,  $\overline{X}$  と書く。

**補題 6.**  $X, Y \subseteq M^n$  を definable,  $x \in M^n$  とする. このとき, 次が成り立つ。

1.  $X = Y \iff \overline{X} = \overline{Y}$  である。
2.  $X \subseteq Y \iff \overline{X} \subseteq \overline{Y}$  である。
3.  $x \in X \iff x \in \overline{X}$  である。
4.  $\overline{X}$  が開集合ならば,  $X$  も開集合である。
5.  $\overline{X}$  が閉集合ならば,  $X$  も閉集合である。

$C \subseteq M^n$  をセルとする. このとき, セルの定義による  $C$  の完備化と上記の definable 集合としての  $C$  の完備化は一致する (上記の補題より)。

次に, boundary point ([4, 定義 1.1]) および weakly boundary point を定義する。

**定義 7.**  $X, Y \subseteq M^n$  を definable 集合とし,  $\emptyset \subsetneq Y \subsetneq X$  とする。

1.  $a \in M^n$  が  $X$  での  $Y$  の boundary point であるとは,  $a \in X$ , かつ任意の open box  $U \subseteq M^n$  に対して,  $a \in U$  ならば  $U \cap Y \neq \emptyset$  かつ  $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$  となることをいう。
2.  $a \in (\overline{M})^n$  が  $X$  での  $Y$  の weakly boundary point であるとは,  $a \in \overline{X}$ , かつ任

意の open box  $U \subseteq M^n$  に対して,  $a \in \bar{U}$  ならば  $U \cap Y \neq \emptyset$  かつ  $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$  となるときをいう。

次に, definably connected ([4, 定義 2.2]) および weakly definably connected を定義する。

**定義 8.**  $X \subseteq M^n$  を definable とする。

1.  $X$  が **definably connected** であるとは, 任意の definable 集合  $Y \subseteq M^n$  に対して  $\emptyset \subsetneq Y \subsetneq X$  ならば,  $X$  は  $X$  での  $Y$  の boundary point を少なくとも一つは含むこととする。
2.  $X$  が **weakly definably connected** (または **WDC**) であるとは, 任意の definable 集合  $Y \subseteq M^n$  に対して  $\emptyset \subsetneq Y \subsetneq X$  ならば,  $\bar{X}$  は  $X$  での  $Y$  の weakly boundary point を少なくとも一つは含むこととする。

**定義 9.**  $X, Y \subseteq M^n$  を definable かつ  $Y \subseteq X$  とする。このとき,  $Y$  が  $X$  の **weakly definably connected component** (または **WDC component**) であるとは,  $Y$  が  $X$  の極大な weakly definably connected 部分集合になることとする。

このノートでの主定理は次のものである。

**定理 10.**  $\mathcal{M}$  をセル分解を許す弱順序極小構造とし,  $X \subseteq M^n$  を definable とする。このとき,  $X$  は WDC component が有限個ある。さらに, それらの WDC component は,  $X$  で開かつ閉であり,  $X$  の有限分割になっている。

上記の定理において,  $\mathcal{M}$  が順序極小な場合は, [3] で示されている。

## 参考文献

- [1] M. Coste, An introduction to o-minimal geometry, Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali (2000).
- [2] M. A. Dickmann, Elimination of quantifiers for ordered valuation rings, J. Symbolic Logic 52 (1987) 116–128.
- [3] L. van den Dries, Tame topology and o-minimal structures, Lecture notes series 248, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

- [4] J. F. Knight, A. Pillay and C. Steinhorn, Definable sets in ordered structures. II, *Trans. Amer. Math. Soc.* 295 (1986) 593–605.
- [5] D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields, *Trans. Amer. Math. Soc.* 352 (2000) 5435–5483.
- [6] A. Marcja and C. Toffalori, A guide to classical and modern model theory, *Trends in Logic* 19, Kluwer Academic Publishers (2003).
- [7] R. Wencel, Weakly o-minimal non-valuational structures, *Ann. Pure Appl. Logic* 154, no. 3, (2008) 139–162.