数理解析研究所講究録
第 1647 巻 2009 年 81-96

ダイナミカル・ヤン・バクスター写像

北海道大学・理学部数学 澁川 陽一 (Youichi Shibukawa)
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Hokkaido University, Sapporo 060-0810, Japan

Abstract

ダイナミカル・ヤン・バクスター写像とヤン・バクスター写像 (set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation) を比較しながら，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像の構成を紹介する．

Introduction

量子ヤン・バクスター方程式 [2, 3, 4, 24, 25] は，可積分系において，中心的な研究対象の一つである．V を有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間とする．線型写像 (行列) $R : V \otimes V \to V \otimes V$ に関する次の方程式を，量子ヤン・バクスター方程式という．

$$R^{23}R^{13}R^{12} = R^{12}R^{13}R^{23}. \tag{0.1}$$

ここで，R^{ij} は，テンソル積 $V \otimes V \otimes V$ からそれ自身への次のような写像である．

$$R^{12} = R \otimes \mathrm{id}_V, \quad R^{23} = \mathrm{id}_V \otimes R.$$

また，(行列) 解 R のことを R-matrix という．

このベクトル空間 V の基底を X とし，

$$X \otimes X := \{u \otimes v \mid u, v \in X\} \tag{0.2}$$

とおく．量子ヤン・バクスター方程式 (0.1) の解 R が，基底 X に関し，特に，次の条件を満たしているとする．

$$R(X \otimes X) \subset X \otimes X.$$

$(R(u\otimes v)_1, R(u\otimes v)_2) := R(u\otimes v)$ $(u, v \in X)$ として，記号 $R(u\otimes v)_1, R(u\otimes v)_2 \in X$ を導入する．これを利用して次のように定義される $X \times X$ からそれ自身への写像を，同じ記号 R で表す．

$$R(u, v) = (R(u \otimes v)_1, R(u \otimes v)_2) \quad (u, v \in X).$$

元の行列 R が量子ヤン・バクスター方程式 (0.1) を満たすことから，写像 $R : X \times X \to X \times X$ も，外見はまったく同じ方程式 (0.3) を満たす．

$$R^{23}R^{13}R^{12} = R^{12}R^{13}R^{23}. \tag{0.3}$$

ただし，上の式において，R^{ij} は $X \times X \times X$ からそれ自身への写像である．例えば，

$$R^{12}(u,v,w) := (R(u,v),w), \quad R^{23}(u,v,w) := (u,R(v,w)) \quad (u,v,w \in X).$$

式 (0.3) も量子ヤン・バクスター方程式と呼ばれる．

この逆も成り立つ．すなわち，量子ヤン・バクスター方程式 (0.3) の (写像) 解 $R : X \times X \to X \times X$ に対し，$V := \mathbb{C}X = \oplus_{x \in X} \mathbb{C}x$ として，写像 R を $V \otimes V$ 上の線型写像に拡張すると，R は式 (0.1) を満たし，R-matrix となる．

Drinfeld [6] は，(有限とは限らない) 単なる集合 X の直積上定義された量子ヤン・バクスター方程式 (0.3) の (写像) 解 $R : X \times X \to X \times X$ の研究を提唱した．量子ヤン・バクスター方程式 (0.1) の行列解 (matrix solution) に対比させて，式 (0.3) の解を set-theoretical solution と呼ぶことが多いが，本稿では，後に Veselov [22] によって提唱されたヤン・バクスター写像 (Yang-Baxter map) という名前を使用する．

上で示したように，ヤン・バクスター写像は基底の置換行列として表される R-matrix のことである．このような解は Drinfeld の提唱以前にいくつか知られていたが，Weinstein-Xu [23] の研究を皮切りに，Gateva-Ivanova [11]，Etingof-Schedler-Soloviev [8]，Lu-Yan-Zhu [15] などが，ヤン・バクスター写像の組織的な構成に成功した．その後，ヤン・バクスター写像と離散可積分系の密接な関連が，Adler-Bobenko-Suris [1]，Veselov [22] などによって明らかにされている．

一方，量子ヤン・バクスター方程式に一つパラメータを加えて一般化した量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式の (楕円関数) 解が楕円量子群の定式化に決定的な役割を果たすことが Felder [10] によって明らかにされ，量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式の行列解である dynamical R-matrix の研究が始まった [7]．

h を有限次元可換 Lie 代数 (/$\mathbb{C}$)，h^* を h の双対空間，V を diagonalizable h-加群とする．線型写像 $R(\lambda) : V \otimes V \to V \otimes V$ $(\lambda \in h^*)$ が次の量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式 [12] を満たすとき，$R(\lambda)$ を dynamical R-matrix という．

$$R^{23}(\lambda)R^{13}(\lambda + h^{(2)})R^{12}(\lambda) = R^{12}(\lambda + h^{(3)})R^{13}(\lambda)R^{23}(\lambda + h^{(1)}) \quad (\forall \lambda \in h^*).$$

ここで，$R^{ij}(\lambda), R^{ij}(\lambda + h^{(k)})$ などは次のような $V \otimes V \otimes V$ からそれ自身への線型写像を意味する．

$$\begin{aligned} &R^{12}(\lambda)(u \otimes v \otimes w) = R(\lambda)(u \otimes v) \otimes w, \\ &R^{12}(\lambda + h^{(3)})(u \otimes v \otimes w) = R^{12}(\lambda + \mathrm{wt}(w))(u \otimes v \otimes w). \end{aligned}$$

ただし，$u, v, w \in V$ は V の weight basis の元，$\mathrm{wt}(w)$ は元 w のウェイトを表す．

現在では，dynamical R-matrix から定義される楕円量子群 [9, 10, 14]，およびその一般化である双亜代数 (bialgebroid) と tensor category の関係 [5, 21]，dynamical R-matrix と R-matrix の関係 (quasi Hopf twister・vertex-IRF 対応) [7, 13]，可換な差分作用素族の構成 [7] との関係など，その研究の裾野は広い．

この量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式 (に類する方程式) の set-theoretical solution にあたるものが，本稿の題にあるダイナミカル・ヤン・バクスター写像 (dynamical Yang-Baxter map) である [17, 18, 19].

Definition 0.1. H，X を空でない集合，$(\cdot) : H \times X \to H$ を写像とする．$X \times X$ からそれ自身への写像 $R(\lambda)$ $(\lambda \in H)$ が次のような量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式に類似の方程式を満たすとき，$R(\lambda)$ を H，X，$(\cdot)$ に付随したダイナミカル・ヤン・バクスター写像という．

$$R^{23}(\lambda)R^{13}(\lambda \cdot X^{(2)})R^{12}(\lambda) = R^{12}(\lambda \cdot X^{(3)})R^{13}(\lambda)R^{23}(\lambda \cdot X^{(1)}) \quad (\forall \lambda \in H).$$

ここで，$R^{12}(\lambda)$，$R^{12}(\lambda \cdot X^{(3)})$ は，$X \times X \times X$ 上定義された次のような写像である．$u, v, w \in X$ に対し，

$$\begin{aligned} &R^{12}(\lambda)(u, v, w) = (R(\lambda)(u, v), w), \\ &R^{12}(\lambda \cdot X^{(3)})(u, v, w) = R^{12}(\lambda \cdot w)(u, v, w) = (R(\lambda \cdot w)(u, v), w). \end{aligned}$$

他の写像も同様に定義する．例えば，

$$R^{23}(\lambda \cdot X^{(1)})(u, v, w) = (u, R(\lambda \cdot u)(v, w)).$$

本稿では，Weinstein-Xu [23] によるヤン・バクスター写像の構造を明らかにしながら，この構造に関連付けて，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像の一つの構成方法を紹介する．

まず，セクション 1 から 3 までで，Weinstein-Xu により構成されたヤン・バクスター写像の構造を明らかにしながら，この写像が量子ヤン・バクスター方程式を満たすことを証明する．

この構造を一般化することでダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成するのがセクション 4 から 8 である．

その後，Lu-Yan-Zhu [15] によるヤン・バクスター写像の構成方法 (セクション 9)，unitary condition，vertex-IRF 対応 (セクション 10)，invariance condition (8.3) (セクション 11) の説明が続く．

1 ヤン・バクスター写像

このセクションでは，Weinstein-Xu [23] により構成されたヤン・バクスター写像を紹介する ([15, Section 3] も参照のこと).

$G=(G,*)$ を，次に掲げる unique factorization property を満たす部分群 G_+，G_- を伴った群とする．

(unique factorization property) すべての $g\in G$ に対し，$g=g_+*g_-$ となる G_+ の元 g_+ と G_- の元 g_- が唯一つ存在する．

群の半直積は，この unique factorization property を満たす．

$g_+\in G_+$ と $g_-\in G_-$ の逆元を，それぞれ，g_+^{-1}，g_-^{-1} と書くことにする．一般に，g_+^{-1} と $(g^{-1})_+$ は異なることに注意する (g_-^{-1} と $(g^{-1})_-$ も同様)．

この記号を用いて，写像 $R:G\times G\to G\times G$ を

$$R(g,h)=((g_-^{-1}*h*g_-)_+^{-1}*g*(g_-^{-1}*h*g_-)_+,\ g_-^{-1}*h*g_-)\quad(g,h\in G)\quad(1.1)$$

と定める．

Proposition 1.1. この写像 R はヤン・バクスター写像である．すなわち，写像 R は量子ヤン・バクスター方程式 (0.3) を満たす．

次からのセクションでは，この (ヤン・バクスター) 写像 R の構造を明らかにしながら，上の Proposition の証明を与える．

2 群 G のもう一つの群構造

このセクションでは，群 G が，自然に別の群構造を持つことを示す．この群構造が，Proposition 1.1 の証明に重要な役割を果たす．

群 G 上に，次のように 2 項演算 $\cdot:G\times G\to G$ を定める．

$$g\cdot h:=g_+*h*g_-\quad(g,h\in G).$$

Proposition 2.1. $(G,\cdot)$ は群である．

Proof. $(G,*)$ と $(G,\cdot)$ の単位元が同じであること，また，$(G,\cdot)$ における $g\in G$ の逆元が $g_+^{-1}*g_-^{-1}$ となることは容易に証明できる．

G の元 g^1，g^2，g^3 に対し，2 項演算 $(\cdot)$ の定義より，

$$(g^1\cdot g^2)\cdot g^3=(g_+^1*g^2*g_-^1)_+*g^3*(g_+^1*g^2*g_-^1)_-$$

となる．G，G_+，G_- における unique factorization property を用いると，

$$(g_+^1*g^2*g_-^1)_+=g_+^1*g_+^2,\quad(g_+^1*g^2*g_-^1)_-=g_-^2*g_-^1$$

である．したがって，

$$(g^1\cdot g^2)\cdot g^3=g_+^1*g_+^2*g^3*g_-^2*g_-^1=g^1\cdot(g^2\cdot g^3).$$

このようにして，$(G,\cdot)$ は群になる． □

Remark 2.2. 以下，混乱を避けるために，g^{-1} という記号は，常に，積 $*$ に関する元 $g \in G$ の逆元を表すことにする．

$R(g,h) \in G \times G$ $(g,h \in G)$ の第 1 成分，および，第 2 成分を，それぞれ，$\eta(h)(g), \xi(g)(h) \in G$ と書く．すなわち，

$$\begin{aligned}\xi(g)(h) &= g_-^{-1} * h * g_-,\\ \eta(h)(g) &= (g_-^{-1} * h * g_-)_+^{-1} * g * (g_-^{-1} * h * g_-)_+\end{aligned}$$

である．このとき，次が成り立つ．

Proposition 2.3. すべての $g,h \in G$ に対し，$\xi(g)(h) \cdot \eta(h)(g) = g \cdot h$.

証明は，$(\cdot)$ の定義に従って計算すればよい．

Proposition 2.3 は次のことを意味している．次で定義される $G \times G$ からそれ自身への写像を σ としよう．

$$\sigma(g,h) = (\xi(g)(h), \eta(h)(g)) \quad (g,h \in G). \tag{2.1}$$

Proposition 2.3 は，写像 σ が，積 $(\cdot)$ に関する第 1 成分と第 2 成分の積を不変に保つことを表している．

次のセクションでは，この視点から，写像 σ および R と，G の元 $u*v^{-1}*w$ $(u,v,w \in G)$ を結び付ける．写像 R が量子ヤン・バクスター方程式を満たすことを，$u*v^{-1}*w$ が導くのである．

3　座標の取り換え

本セクションでは,『座標を取り換えて』写像 σ を表示する．

λ を G の元とし，$G \times G$ からそれ自身への写像 F_λ を

$$F_\lambda(g,h) = (\lambda \cdot g,\ \lambda \cdot g \cdot h) \quad (g,h \in G) \tag{3.1}$$

と定める．

Proposition 3.1. 写像 F_λ は全単射である．実際，その逆写像は次で与えられる．$(F_\lambda)^{-1}(g,h) = (\lambda_+^{-1} * g * \lambda_-^{-1},\ g_+^{-1} * h * g_-^{-1})$.

Proposition 2.3 を用いると，$G \times G$ 上の写像 $F_\lambda \sigma (F_\lambda)^{-1}$ の第 2 成分は変わらないはずである．

Remark 3.2. 『座標変換』という観点からすると，上の λ として G の単位元 e をとれば十分である．すなわち，写像 F_λ は一般化され過ぎている．しかし，この一般化は後の議論において決定的な役割を果たす．

この写像 F_λ を用いて写像 σ を変換する (これが『座標の取り換え』) と，直接的な計算により，

$$F_\lambda \sigma (F_\lambda)^{-1}(g,h) = (\lambda * g^{-1} * h,\ h) \quad (g,h \in G) \tag{3.2}$$

となる．

そこで，

$$S(\lambda) := F_\lambda \sigma (F_\lambda)^{-1}, \tag{3.3}$$
$$S : G\times G\times G \ni (u,v,w) \mapsto (u, u*v^{-1}*w, w) \in G\times G\times G \tag{3.4}$$

とおく．

Proposition 3.3. 次の 3 条件は同値である．

(1) $S(\lambda)^{12} S S(\lambda)^{12} = S S(\lambda)^{12} S \quad (\forall\lambda \in G)$.

(2) $\sigma^{12}\sigma^{23}\sigma^{12} = \sigma^{23}\sigma^{12}\sigma^{23}$.

(3) R はヤン・バクスター写像である．

Proof. 写像 σ の定義 (2.1) より，条件 (2) と (3) が同値になるのはよい．

条件 (1) と (2) が同値になることを示す．$G\times G\times G$ からそれ自身への写像

$$\widetilde{F}_\lambda(u,v,w) = (\lambda\cdot u,\ \lambda\cdot u\cdot v, \lambda\cdot u\cdot v\cdot w) \quad (\lambda,u,v,w \in G)$$

を考える．この写像は全単射で，

$$\widetilde{F}_\lambda \sigma^{12} (\widetilde{F}_\lambda)^{-1} = S(\lambda)^{12}, \quad \widetilde{F}_\lambda \sigma^{23} (\widetilde{F}_\lambda)^{-1} = S$$

を満たす．この性質を用いると，条件 (1) と (2) は同値になる． □

式 (3.2)，(3.4) により，Proposition 3.3 の条件 (1) が成り立つことが簡単にわかる (直接的に計算すればよい)．したがって，上の Proposition より写像 R (1.1) はヤン・バクスター写像である．これが，Proposition 1.1 で示したいことであった．

4　一般化．その方針

Proposition 1.1 の証明を見てみると，群 G の演算 $*$ を用いて定義される元 $u*v^{-1}*w$ が，写像 S，$S(\lambda)$ を通じて，量子ヤン・バクスター方程式 (0.3) を生み出している．

重要なことは，写像 S，$S(\lambda)$ が Proposition 3.3 の条件 (1) を満たせば，それを『座標変換する』ことにより，量子ヤン・バクスター方程式 (0.3) の解が得られることである．そこで，条件 (1) を崩すことなく，群 G の演算 $*$ を

用いて定義される $u*v^{-1}*w$ を一般化することができれば，セクション 2，3 の議論をそのまま用いることで，新たなヤン・バクスター写像を得ることができるのではないか，という考えに行き着く．

以下のセクションでは，この方針に基づき，Weinstein-Xu によるヤン・バクスター写像の一般化を試みる．

あらかじめ結果を申し上げると,『幸運なことに』この企ては失敗する．失敗の原因は，Remark 3.2 で指摘した写像 F_λ の一般化などにある．しかし，この失敗がダイナミカル・ヤン・バクスター写像という新たな概念を生み出すのである．

5　元 $u*v^{-1}*w$ の 3 項演算への一般化

本セクションでは，Proposition 3.3 の条件 (1) を壊すことなく，G の元 $u*v^{-1}*w$ $(u,v,w\in G)$ を 3 項演算に一般化する．また，そのための必要十分条件を求める [18, Section 3]．

$M=(M,\mu)$ を ternary system とする．すなわち，M を 3 項演算 (ternary operation) $\mu: M\times M\times M\to M$ を伴った, 空でない集合とする．集合 M の元 a に対して，写像 $s(a): M\times M\to M\times M$，および $s: M\times M\times M\to M\times M\times M$ を，

$$
\begin{aligned}
&s(a)(x,y)=(\mu(a,x,y),y), && (5.1)\\
&s(x,y,z)=(x,\mu(x,y,z),z) \quad (x,y,z\in M).
\end{aligned}
$$

と定義する．この $s(a)$，s は，写像 $S(\lambda)$ (3.3)，S (3.4) の一般化である．

Proposition 5.1. 次は同値である．

(1) $s(a)^{12}ss(a)^{12}=ss(a)^{12}s \quad (\forall a\in M)$.

(2) $\mu(a,\mu(a,b,c),\mu(\mu(a,b,c),c,d))=\mu(a,b,\mu(b,c,d))$,
$\mu(\mu(a,b,c),c,d)=\mu(\mu(a,b,\mu(b,c,d)),\mu(b,c,d),d) \quad (\forall a,b,c,d\in M)$.

Proof. (1) 式の第 1，第 2 成分が等しいという式が (2) である．(1) 式の第 3 成分が等しくなるのは自明であるので，この Proposition の主張が成り立つ． □

M が群である場合，その積を $*: M\times M\to M$ と書くことにして，$\mu(a,b,c)=a*b^{-1}*c$ $(a,b,c\in M)$ で M 上の 3 項演算 μ を定める．すると，この μ は上の条件 (2) を満たす (Proposition 3.3 参照).

6　写像 F_λ の一般化

続いて写像 F_λ (3.1) も一般化してしまおう．このために left quasigroup という概念を導入する (cf. [16, 20]).

Definition 6.1. 2項演算 $(\cdot) : L \times L \to L$ を伴った空でない集合 L が次を満たすとき，$L = (L, \cdot)$ を left quasigroup という．

> すべての $u \in L$ に対して，写像 (左移動)$u\cdot : L \in v \mapsto u \cdot v \in L$ は全単射である．

$L = (L, \cdot)$ を left quasigroup とする．すると定義より，左移動 $u\cdot : L \to L$ の逆写像が存在する．これを $u\backslash$ と書く．

$$u\backslash : L \ni v \mapsto u\backslash v \in L.$$

これは，$u \cdot (u\backslash v) = u\backslash(u \cdot v) = v$ $(\forall u, v \in L)$ を満たす．

Example 6.2. 群は left quasigroup である．

Example 6.3. 集合 Q_5 を $Q_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ とし，Q_5 上の2項演算 $(\cdot)$ を Table 1 のように定める．ここで，$0 \cdot 2 = 2$ である．Q_5 の各元が，Table 1 の

Table 1: Q_5

	0	1	2	3	4
0	4	3	2	1	0
1	3	1	0	2	4
2	0	2	3	4	1
3	1	0	4	3	2
4	2	4	1	0	3

各行に1回現れ，かつ1回のみしか現れないので，この $Q_5 = (Q_5, \cdot)$ は left quasigroup である．

Remark 6.4. left quasigroup の2項演算は，群とは異なり，結合的であるとは限らない．例えば，上の Q_5 の2項演算は結合的ではない．実際，$(1 \cdot 2) \cdot 3 = 1 \neq 4 = 1 \cdot (2 \cdot 3)$．したがって，left quasigroup は群よりも (かなり) 多く存在する．

$L = (L, \cdot)$ を left quasigroup とする．$\lambda \in L$ に対し，写像 $f_\lambda : L \times L \to L \times L$ を

$$f_\lambda(u, v) = (\lambda \cdot u,\ (\lambda \cdot u) \cdot v) \quad (u, v \in L)$$

と定める [18, Section 3]．次は Proposition 3.1 の一般化にあたる．

Proposition 6.5. 写像 f_λ は全単射である．逆写像は，

$$(f_\lambda)^{-1}(u, v) = (\lambda\backslash u, u\backslash v) \quad (u, v \in L).$$

7 ダイナミカル・ヤン・バクスター写像

本セクションでは，セクション 4 での方針に従い，写像 $s(a)$ と f_λ からヤン・バクスター写像を構成しようと試みる．すでに予告したようにこの試みは失敗し，ヤン・バクスター写像ではなく，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像が得られる．

以下，L と M は集合として同型であると仮定する．この同型を与える全単射を $\pi : L \to M$ と書く．また，M 上の 3 項演算 μ が Proposition 5.1 の条件 (2) を満たすことも仮定する．

$\lambda, u, v \in L$ を用いて元 $\xi_\lambda(u)(v)$，$\eta_\lambda(v)(u) \in L$ を

$$(\xi_\lambda(u)(v),\ \eta_\lambda(v)(u)) = (f_\lambda)^{-1}(\pi^{-1} \times \pi^{-1})s(\pi(\lambda))(\pi \times \pi)f_\lambda(u, v)$$

と定める．さらに，$L \times L$ から自分自身への写像 $R(\lambda)$ を

$$R(\lambda)(u, v) = (\eta_\lambda(v)(u),\ \xi_\lambda(u)(v))$$

と定義する．

本来，この写像 $R(\lambda)$ がヤン・バクスター写像になるはずであるが，今の場合，パラメータ λ が一般には残ってしまい，量子ヤン・バクスター方程式の解にはならない．

そこで解くべき問題を変える．

> $s(\pi(\lambda))$ は Proposition 5.1 の条件 (1) を満たすのだから，それを全単射 f_λ で変換した写像から構成される写像 $R(\lambda)$ も，何らかの方程式を満たすはずである．この量子ヤン・バクスター方程式に類する方程式を求めよ．

この方程式は次のようになる．

Proposition 7.1. 写像 $R(\lambda)$ は次の方程式を満たす．

$$R^{23}(\lambda)R^{13}(\lambda \cdot L^{(2)})R^{12}(\lambda) = R^{12}(\lambda \cdot L^{(3)})R^{13}(\lambda)R^{23}(\lambda \cdot L^{(1)}) \quad (\forall \lambda \in L).$$

$R^{12}(\lambda)$ ，$R^{12}(\lambda \cdot L^{(3)})$ などの定義については *Definition* 0.1 を参照のこと．

Definition 0.1 より，我々は，L，L，$(\cdot)$ に付随したダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成したことになる．

この Proposition は，Proposition 3.3 と同様にして証明される [18, Section 3]．

Remark 7.2. ダイナミカル・ヤン・バクスター写像 $R(\lambda)$ がパラメータ λ に依存しない場合，$R := R(\lambda)$ は量子ヤン・バクスター方程式 (0.3) を満たす．したがって，R はヤン・バクスター写像である．すなわち，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像はヤン・バクスター写像を含む概念である．

8　セクション5から7までのまとめ

セクション5から7までは，通常の論文とは異なる書き方をした．これから生じるであろう混乱を避けるため，本セクションでは，セクション5から7までで扱ったダイナミカル・ヤン・バクスター写像の構成をまとめる．これに関連して，この構成の逆，すなわち，ある性質を満たすダイナミカル・ヤン・バクスター写像が，必ずこのように構成されることも述べる [18, Theorem 4.7].

$L = (L, \cdot)$ を left quasigroup，$M = (M, \mu)$ を Proposition 5.1 (2) を満たす ternary system とする．そして，これらが集合として同型であると仮定し，この同型を与える全単射 $\pi : L \to M$ を一つ固定する．

$L \times L$ からそれ自身への写像 $R(\lambda)$ $(\lambda \in L)$ を

$$
\begin{aligned}
&R(\lambda)(u, v) = (\eta_\lambda(v)(u),\ \xi_\lambda(u)(v)),\\
&\xi_\lambda(u)(v) = \lambda \backslash \pi^{-1}(\mu(\pi(\lambda),\ \pi(\lambda \cdot u),\ \pi((\lambda \cdot u) \cdot v))), \qquad (8.1)\\
&\eta_\lambda(v)(u) = (\lambda \cdot \xi_\lambda(u)(v)) \backslash ((\lambda \cdot u) \cdot v). \qquad (8.2)
\end{aligned}
$$

と定める．

このとき次が成り立つ．

Theorem 8.1 (Proposition 7.1)**.** $R(\lambda)$ は L，L，$(\cdot)$ に付随したダイナミカル・ヤン・バクスター写像である．

このダイナミカル・ヤン・バクスター写像は次の invariance condition を満たす．

$$(\lambda \cdot \xi_\lambda(u)(v)) \cdot \eta_\lambda(v)(u) = (\lambda \cdot u) \cdot v \quad (\forall \lambda, u, v \in L) \qquad (8.3)$$

この invariance condition は，Proposition 2.3 の一般化にあたる．

Theorem 8.1 の逆もまた成り立つ．$L = (L, \cdot)$ を left quasigroup，$R(\lambda)$ $(\lambda \in L)$ を，invariance condition (8.3) を満たす L，L，$(\cdot)$ に付随したダイナミカル・ヤン・バクスター写像とする．$\eta_\lambda(v)(u)$，$\xi_\lambda(u)(v)$ $(\lambda, u, v \in L)$ を次で定める．

$$(\eta_\lambda(v)(u), \xi_\lambda(u)(v)) = R(\lambda)(u, v).$$

Theorem 8.2. *Theorem* 8.1 の構成方法で $R(\lambda)$ を生み出すような *ternary system* $M = (M, \mu)$，および全単射 $\pi : L \to M$ が存在する．

実際，この定理を証明するためには，

$$
\begin{aligned}
&M = (L, \mu_L),\\
&\mu_L(a, b, c) = a \cdot \xi_a(a \backslash b)(b \backslash c) \quad (a, b, c \in M),\\
&\pi = \mathrm{id}_L
\end{aligned}
$$

ととればよい．

9 Lu-Yan-Zhu によるヤン・バクスター写像の構成

$L=(L,\cdot)$，$G=(G,*)$ を群とし，θ を L から $\mathrm{Aut}(G)$ への群準同型であるとする．L から G への (集合としての) 全単射 π が次を満たすとき，写像 π を bijective 1-cocycle という．

$$\pi(u\cdot v)=\pi(u)*\theta(u)(\pi(v))\quad (u,v\in L). \tag{9.1}$$

Lu-Yan-Zhu [15] は，この bijective 1-cocycle からヤン・バクスター写像が構成できることを示した．本セクションでは，Theorem 8.1 の構成方法から bijective 1-cocycle を導き出す [18, Section 2]．結果として，bijective 1-cocycle からヤン・バクスター写像が得られる理由も明らかにする．

セクション 5 ですでに示したように，

Proposition 9.1. G 上の 3 項演算 $\mu_G : G\times G\times G\ni(x,y,z)\mapsto x*y^{-1}*z\in G$ は，*Proposition* 5.1 の条件 (2) を満たす．

Theorem 8.1 より，群 $L=(L,\cdot)$ と全単射 $\pi:L\to G$，および ternary system (G,μ_G) は，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像 $R(\lambda):L\times L\to L\times L$ を生み出す．

L の元 u を用いて，写像 $\theta(u):G\to G$ を

$$\theta(u)(x)=\pi(u)^{-1}*\pi(u\cdot\pi^{-1}(x))\quad (x\in G)$$

と定義する．

Remark 9.2. 上の $\theta(u)$ の定義を書きなおすと，$\pi(u\cdot\pi^{-1}(x)))=\pi(u)*\theta(u)(x)$ となる．π が全単射であることを考え合わせれば，この定義式は，(9.1) と一致する．

Proposition 9.3. この写像 $\theta(u)$ は全単射である．その逆写像は，$\theta(u)^{-1}(x)=\pi(u\backslash_L\pi^{-1}(\pi(u)*x))$．

式 (8.1) により，

Proposition 9.4. $\xi_\lambda(u)(v)=\pi^{-1}\theta(\lambda)^{-1}\theta(\lambda\cdot u)\pi(v)$ $(\lambda,v\in L)$.

ここで，$\theta:L\to\mathrm{Aut}(G)$ が群準同型であると仮定する．このとき，全単射 $\pi:L\to G$ は bijective 1-cocycle となる．また，上の仮定と，Proposition 9.4，式 (8.2)，および L が群であることから，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像 $R(\lambda)$ はパラメータ λ に依存しない．したがって，$R(\lambda)$ はヤン・バクスター写像となる (Remark 7.2)．

実は，Weinstein-Xu が構成したヤン・バクスター写像のみならず，Lu-Yan-Zhu が構成したものも，すべて，ternary operation μ_G を用いて上のように構成されている．

10 ダイナミカル・ヤン・バクスター写像の諸性質

本稿では，left quasigroup $L=(L,\cdot)$，ternary system $M=(M,\mu)$．および全単射 $\pi:L\to M$ から，invariance condition (8.3) を満たすダイナミカル・ヤン・バクスター写像が構成できることを紹介した (Theorem 8.1)．この構成によるダイナミカル・ヤン・バクスター写像の性質は，多くの場合，ternary operation μ のみで決定される (ダイナミカル・ヤン・バクスター写像を単に『座標変換』したものが写像 $s(a)$ (5.1) で，これは ternary operation μ のみで定義されているから)．例えば ([18, Section 7])，

Proposition 10.1. 写像 $P:L\times L\to L\times L$ を $P(u,v)=(v,u)$ $(u,v\in L)$ とする．(L,M,π) より構成されるダイナミカル・ヤン・バクスター写像 $R(\lambda)$ が *unitary condition*

$$R(\lambda)PR(\lambda)=P \quad (\forall\lambda\in L)$$

を満たすための必要十分条件は，*ternary operation* μ が

$$\mu(a,\mu(a,b,c),c)=b \quad (\forall a,b,c\in M) \tag{10.1}$$

を満たすことである．

ternary system M が群であり，ternary operation μ が μ_M (Proposition 9.1) である場合，式 (10.1) は，群 M が可換であることと同値になる．したがって，セクション 9 で bijective 1-cocycle から構成したヤン・バクスター写像が unitary condition を満たすためには，群 G が可換であることが必要十分となる．これは，Lu-Yan-Zhu [15] の Proposition 4 の主張そのものである．

この他にも，本稿の構成方法によるヤン・バクスター写像とダイナミカル・ヤン・バクスター写像が同一の ternary system から構成されていれば，この二つの写像を結びつける全単射 $J(\lambda)$ が存在する ($J(\lambda)$ は『座標変換』を表す２つの写像の合成)．この式を書き下してみると，

$$R(\lambda)=J(\lambda)^{-1}R^{21}J^{21}(\lambda)$$

となっていて，ダイナミカル R-matrix と R-matrix が fusion matrix を介して結びつくという vertex-IRF 対応と全く同じ形をしている．

つまり，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像とヤン・バクスター写像の間にも，vertex-IRF 対応が存在するのである [18, Section 8].

11 最後に invariance condition について

本稿や [18] においては，invariance condition(8.3) を，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成するための単なる技術的な仮定として扱っている．し

かし，tensor category を用いてダイナミカル・ヤン・バクスター写像を記述する場合には，この invariance condition が必須の条件となる [19].

$R(\lambda)$ を dynamical R-matrix としよう (Introduction 参照)．通常，dynamical R-matrix には，次の weight-zero condition を課す [10].

$u, v \in V$ を weight basis の元とするとき，

$$R(\lambda)(u \otimes v) \in V_{\mathrm{wt}(u)+\mathrm{wt}(v)}.$$

ここで，V_α $(\alpha \in h^*)$ は，weight α のウェイト空間を表す.

Introduction で申し述べた R-matrix とヤン・バクスター写像の関係のように，dynamical R-matrix $R(\lambda)$ が $V \otimes V$ の weight basis $X \otimes X$ (0.2) の置換行列になっているとしよう．このとき，weight-zero condition は次のようになる.

$$\begin{aligned} &\mathrm{wt}(R(\lambda)(u \otimes v)_1) + \mathrm{wt}(R(\lambda)(u \otimes v)_2) = \mathrm{wt}(u) + \mathrm{wt}(v) \\ &(R(\lambda)(u \otimes v)_1 \otimes R(\lambda)(u \otimes v)_2 := R(\lambda)(u \otimes v)). \end{aligned}$$

この式は，当然，

$$\lambda + \mathrm{wt}(R(\lambda)(u \otimes v)_2) + \mathrm{wt}(R(\lambda)(u \otimes v)_1) = \lambda + \mathrm{wt}(u) + \mathrm{wt}(v) \qquad (11.1)$$

と同値である.

H を h^*，写像 $(\cdot) : H \times X \to H$ を $\lambda \cdot u := \lambda + \mathrm{wt}(u)$ と定める．次のような写像を，dynamical R-matrix と同じ記号 $R(\lambda)$ で表す.

$$R(\lambda) : X \times X \ni (u, v) \mapsto (R(\lambda)(u \otimes v)_1, R(\lambda)(u \otimes v)_2) \in X \times X.$$

この写像 $R(\lambda)$ はダイナミカル・ヤン・バクスター写像となり，式 (11.1) は，このダイナミカル・ヤン・バクスター写像に関する invariance condition

$$\begin{aligned} &(\lambda \cdot R(\lambda)(u, v)_2) \cdot R(\lambda)(u, v)_1 = (\lambda \cdot u) \cdot v \quad (\forall \lambda \in H, u, v \in X) \\ &((R(\lambda)(u, v)_1, R(\lambda)(u, v)_2) := R(\lambda)(u, v)) \end{aligned}$$

と一致する．このように，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像における invariance condition は，dynamical R-matrix における weight-zero condition に相当する.

つまり，invariance condition (8.3) は，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像の構成のための人工的・技術的な仮定ではなく，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像が当然持つべき自然な条件である (と筆者は考えている).

謝辞

本稿は，研究集会「組み合わせ論的表現論の拡がり」を始め，大阪大学基礎工学部での Mini-workshop “Integrable Systems and Combinatorics” (2007 年 2 月)，筑波大学大学院物質科学研究科での特別セミナー (2008 年 12 月)，早稲田大学基幹理工学部での代数解析セミナー (2008 年 12 月) における講演内容をその基としている．これら講演の機会を筆者に与えていただいたことに対し，宮地兵衛，中島達洋，尾角正人，増岡彰，上野喜三雄各氏に感謝する．

References

[1] V. E. Adler, A. I. Bobenko, and Yu. B. Suris, Geometry of Yang-Baxter maps: pencils of conics and quadrirational mappings, *Comm. Anal. Geom.* **12** (2004), no. 5, 967–1007.

[2] R. J. Baxter, Partition function of the eight-vertex lattice model, *Ann. Phys.* **70** (1972), 193–228.

[3] R. J. Baxter, Solvable eight-vertex model on an arbitrary planar lattice, *Phil. Trans. Royal Soc. London* **289** (1978), 315–346.

[4] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic, London, 1982.

[5] G. Böhm, Hopf algebroids, preprint (arXiv:0805.3806) (2008).

[6] V. G. Drinfel'd, “On some unsolved problems in quantum group theory”, *Quantum groups.* Lecture Notes in Math. **1510**, Springer, Berlin, 1992.

[7] P, Etingof and F. Latour, *The dynamical Yang-Baxter equation, representation theory, and quantum integrable systems*, Oxford Univ. Press, New York, 2005.

[8] P. Etingof, T. Schedler, and A. Soloviev, Set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation, *Duke Math. J.* **100** (1999) no.2, 169–209.

[9] P. Etingof and A. Varchenko, Solutions of the quantum dynamical Yang-Baxter equation and dynamical quantum groups, *Comm. Math. Phys.* **196** (1998), 591–640.

[10] G. Felder, "Conformal field theory and integrable systems associated to elliptic curves", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians.* Birkhäuser, Basel, 1995.

[11] T. Gateva-Ivanova, A combinatorial approach to the set-theoretic solutions of the Yang-Baxter equation, *J. Math. Phys.* **45** (2004), no.10, 3828–3858.

[12] J.-L. Gervais and A. Neveu, Novel triangle relation and absence of tachyons in Liouville string field theory, *Nuclear Phys. B* **238** (1984), no. 1, 125–141.

[13] M. Jimbo, H. Konno, S. Odake, and J. Shiraishi, Quasi-Hopf twistors for elliptic quantum groups, *Transform. Groups* **4** (1999), no. 4, 303–327.

[14] H. Konno, Elliptic quantum group $U_{q,p}(\hat{sl}_2)$, Hopf algebroid structure and elliptic hypergeometric series, preprint (arXiv:0803.2292) (2008)

[15] J.-H. Lu, M. Yan, and Y.-C. Zhu, On the set-theoretical Yang-Baxter equation, *Duke Math. J.* **104** (2000) no.1, 1–18.

[16] H. O. Pflugfelder, *Quasigroups and loops*: *introduction*, Heldermann, Berlin, 1990.

[17] Y. Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps, *Int. Math. Res. Not.* **2005** (2005), 2199–2221.

[18] Y. Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps with an invariance condition, *Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ.* **43** (2007), 1157–1182.

[19] Y. Shibukawa, Survey on dynamical Yang-Baxter maps, preprint (2009).

[20] J. D. H. Smith and A. B. Romanowska, *Post-modern algebra*, John Wiley & Sons, New York, 1999.

[21] M. Takeuchi, Groups of algebras over $A \otimes \overline{A}$, *J. Math. Soc. Japan* **29** (1977), no. 3, 459–492.

[22] A. P. Veselov, Yang-Baxter maps and integrable dynamics, *Phys. Lett. A* **314** (2003), no.3, 214–221.

[23] A. Weinstein and P. Xu, Classical solutions of the quantum Yang-Baxter equation, *Comm. Math. Phys.* **148** (1992), no.2, 309–343.

[24] C. N. Yang, Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967), 1312–1314.

[25] C. N. Yang, S matrix for the one-dimensional N-body problem with repulsive or attractive δ-function interaction, *Phys. Rev.* **168** (1968), 1920–1923.