数理解析研究所講究録
第1648巻 2009年 153-172

拡散現象の数理

筑波大学数理物質科学研究科・数学専攻 平良和昭
KAZUAKI TAIRA, INST. OF MATH., UNIV. OF TSUKUBA

はじめに

本講演は，拡散現象の数理に関する一連の研究を基にして構成したものである．より詳しくは，次の3つのテーマについて考察する：

(I) 確率論における『多次元拡散過程の境界値問題』
(II) 数理生態学における『人口動態論』
(III) 燃焼学における『熱着火理論』あるいは化学における『反応速度論』

筆者の最近の研究テーマは，非線型偏微分方程式の境界値問題を，確率論のブラウン運動という直観的イメージを指導原理にして，多角的に研究を行うことである．その際，非線型偏微分方程式に対する境界値問題の各種の定量的な十分条件を，確率論のブラウン運動という具体的なイメージを通じて直観的に解釈し，このような方向から各種の十分条件の必要性を定性的に探ることによって，解析学本来の研究を深めることも目指している．

特に，実際の応用上からも重要であるパラメータに関する非自明解の分岐の様子，非自明解の個数変化，定常解の安定性の問題について詳しく研究することを目指している．さらに，入力情報と出力情報から欠落情報を同定する，いわゆる逆問題の視点からの研究も視野に入れている．しかしながら，数学的な取り扱いが極めて複雑になり，その解析のために，大型計算機による数値計算やシミュレーションに頼らねばならないことも予想される．

紙数の関係で，研究テーマ (I) について詳しく解説し，残りの研究テーマ (II), (III) については簡潔に述べる．

(I) 確率論における『多次元拡散過程の境界値問題』

一般的に，自然現象の不連続性は，偏微分方程式の係数の不連続性として反映される．従って，本質的にフーリエ変換に立脚する擬微分作用素の理論よりも，1950年代にカルデロンとジグムントによって創始された特異積分作用素論の方が，最近では，非線型問題の研究には有力視されている (文献 [CZ1], [CZ2] を参照)．そのような背景を視野に入れて，この節では、特異積分作用素の理論を広汎に援用して，(I) の研究テーマを，不連続係数を持つ場合について考察する．既に，論文 [Ta9] を出版し，著書 [Ta10] は，現在，出版準備中である．

I.1. 序論. 以下では，確率論のヴェンツェル境界条件に付随したマルコフ過程の構成問題を関数解析の半群の立場から考察する．より正確には，**不連続な係数**を持つ2階の楕円型微分作用素に対して，ディリクレ境界条件，斜交微分境界条件及び1階のヴェンツェル境界条件に付随したフェラー半群の生成定理を証明する．言い換えれば，微分作用素の係数が不連続な場合に，一つの試みとして，特異積分作用素の理論

を広汎に援用して,『マルコフ過程を構成せよ』という確率論の問題への実解析的アプローチについての最新の成果を紹介する. 詳細は, 文献 [Ta10] に発表される予定である. 勿論, 今後の問題として, 係数の微分可能性を弱めた擬微分作用素の理論を援用したアプローチによる研究も可能と思われる.

本研究の詳しい歴史, 背景等については, 文献 [Ta1]–[Ta8] を参照されたい.

I.2. 問題の定式化及び主結果. D は N 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^N$ の有界領域であって, その境界を ∂D, 閉包を $\overline{D} = D \cup \partial D$ と表す. $C(\overline{D})$ を $\overline{D}$ 上の実数値連続関数の空間とする. 空間 $C(\overline{D})$ には一様位相をいれる. よって, $C(\overline{D})$ は最大値ノルム

$$\|f\| = \max_{x \in \overline{D}} |f(x)|$$

をノルムとしてバナッハ空間である.

空間 $C(\overline{D})$ 上の強連続な半群 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ が非負且つ縮小的であるとき, すなわち, 条件

$$f \in C(\overline{D}),\ 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \text{on } \overline{D} \implies 0 \leq T_t f(x) \leq 1 \quad \text{on } \overline{D}$$

をみたすとき, 半群 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ を $\overline{D}$ 上の**フェラー半群**という.

本講演では,『$\overline{D}$ 上のフェラー半群を構成せよ』という問題について考察する. T_t が $\overline{D}$ 上のフェラー半群であるとき, リースの表現定理によって, 一意的に $\overline{D}$ 上のマルコフ推移関数 $p_t(x, \cdot)$ が存在して, 関係式

$$T_t f(x) = \int_{\overline{D}} p_t(x, dy) f(y), \quad f \in C(\overline{D})$$

が成り立つことが知られている. さらに, 関数 $p_t(x, \cdot)$ は, 実際に, ある**マルコフ過程**の推移関数であることが示されるので, 値 $p_t(x, E)$ は, 点 x を出発した拡散粒子が時刻 t に集合 E に見いだされる推移確率を表わしている. 従って, フェラー半群の構成問題は,『$\overline{D}$ 上の強マルコフ過程を構成せよ』という確率論の問題の "関数解析版" である.

フェラー半群構成の問題は, 以下述べるように (適当な条件の下で) 偏微分方程式論の**楕円型境界値問題**に帰着される.

I.2.1. 擬微分作用素論によるアプローチ.

まず, 擬微分作用素の理論の枠内での定式化について述べる. そのために, 有界領域 D の境界 ∂D は**なめらか**とする. 従って, その閉包 $\overline{D} = D \cup \partial D$ は N 次元のコンパクトな, 境界付きのなめらかな多様体である.

まず, W は次のような実係数の 2 階楕円型積分微分作用素とする:

$$\begin{aligned} Wu(x) &= Au(x) + S_r u(x) \\ &:= \left(\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x) u(x) \right) \\ &\quad + \left(\int_D s(x,y) \left[u(y) - \sigma(x,y) \left(u(x) + \sum_{j=1}^{N} (y_j - x_j) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right) \right] dy \right). \end{aligned}$$

ここで:

(1) $a^{ij}(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$, $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ であって，微分作用素 A は $\mathbf{R}^N$ において**楕円型**，すなわち，定数 $a_0 > 0$ が存在して

$$\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2 \quad \text{for all } x \in \mathbf{R}^N \text{ and all } \xi \in \mathbf{R}^N.$$

(2) $b^i(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$.

(3) $c(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ 且つ $c(x) \leq 0$ in D.

(4) 積分核 $s(x,y)$ は，境界 ∂D に関して transmission property（文献 [Bu], [RS], [Ho] を参照）を持つ，properly supported な擬微分作用素 $S \in L^{2-\kappa}_{1,0}(\mathbf{R}^N)$, $\kappa > 0$, の超関数核である．さらに，$s(x,y)$ は，対角線集合 $\{(x,x) : x \in \mathbf{R}^N\}$ を除いて非負である．測度 dy は $\mathbf{R}^N$ 上の Lebesgue 測度である．

(5) 関数 $\sigma(x,y)$ は $\overline{D} \times \overline{D}$ 上の C^∞ 関数であって，対角線集合 $\{(x,x) : x \in \overline{D}\}$ の近傍で $\sigma(x,y) = 1$. 関数 $\sigma(x,y)$ は領域 D の形状による．例えば，D が凸ならば $\sigma(x,y) \equiv 1$ に取れる．

(6) $W1(x) = c(x) + \int_D s(x,y)[1 - \sigma(x,y)]\, dy \leq 0$ in D.

積分微分作用素 W は 2 階の**ワルデンフェルス作用素**と呼ばれる (文献 [Ws] を参照)．微分作用素 A は**拡散作用素**と呼ばれ，内部 D における連続な軌道を持つ強マルコフ過程（拡散過程）を解析的に記述している．作用素 S_r は，2 階の**レヴィ作用素**と呼ばれ，内部における跳躍現象を記述している．拡散粒子は，積分核 $s(x,y)$ と関数 $\sigma(x,y)$ に従って内部の点に跳躍する．

条件 (6) の直観的意味は，内部の点 x から x のある近傍の外部への跳躍現象よりも点 x における吸収現象の方が "強い" ことを意味している．$\sigma(x,y) \equiv 1$ の場合は，条件 (6) は次のように簡単になることに注意:

(6′) $W1(x) = c(x) \leq 0$ in D.

次に，L は 2 階の境界条件であって，境界 ∂D 上の局所座標 $(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$ を使って，次のように表わされるものとする:

$$\begin{aligned}
Lu(x') &= Qu(x') + \mu(x')\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x') - \delta(x')Wu(x') + \Gamma u(x') \\
&:= \left(\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x')\frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x')u(x')\right) \\
&\quad + \mu(x')\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x') - \delta(x')Wu(x') + \left(\eta(x')u(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \zeta^i(x')\frac{\partial u}{\partial x_i}(x')\right. \\
&\quad + \int_{\partial D} r(x',y')\left[u(y') - \tau(x',y')\left(u(x') + \sum_{j=1}^{N-1}(y_j - x_j)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x')\right)\right] dy' \\
&\quad \left. + \int_D t(x',y)\left[u(y) - \tau(x',y)\left(u(x') + \sum_{j=1}^{N-1}(y_j - x_j)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x')\right)\right] dy\right).
\end{aligned}$$

ここで:

(1) 微分作用素 Q は，非正シンボルをもつ境界 ∂D 上の 2 階退化楕円型微分作用素．より詳しく，$\alpha^{ij}(x')$ は境界 ∂D 上の $\binom{2}{0}$ 型の対称テンソルであって，次の条件

をみたす:

$$\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j \geq 0, \quad x' \in \partial D,\ \xi' = \sum_{j=1}^{N-1} \xi_j\, dx_j \in T^*_{x'}(\partial D).$$

ただし，$T^*_{x'}(\partial D)$ は x' における ∂D の余接ベクトル空間.

(2) $Q1(x') = \gamma(x') \in C^\infty(\partial D)$ 且つ $\gamma(x') \leq 0$ on ∂D.

(3) $\mu(x') \in C^\infty(\partial D)$ 且つ $\mu(x') \geq 0$ on ∂D.

(4) $\delta(x') \in C^\infty(\partial D)$ 且つ $\delta(x') \geq 0$ on ∂D.

(5) $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$ は境界 ∂D における内向き単位法線ベクトル場.

(6) 積分核 $r(x', y')$ は，擬微分作用素 $R \in L^{2-\kappa_1}_{1,0}(\partial D)$, $\kappa_1 > 0$, の超関数核である．さらに，$r(x', y')$ は対角線集合 $\{(x', x') : x' \in \partial D\}$ を除いて非負である．密度 dy' は ∂D 上の正の密度である.

(7) 積分核 $t(x, y)$ は，境界 ∂D に関して transmission property を持つ，properly supported な擬微分作用素 $T \in L^{2-\kappa_2}_{1,0}(\mathbf{R}^N)$, $\kappa_2 > 0$, の超関数核である．さらに，$t(x, y)$ は，対角線集合 $\{(x, x) : x \in \mathbf{R}^N\}$ を除いて非負である.

(8) 関数 $\tau(x, y)$ は $\overline{D} \times \overline{D}$ 上の C^∞ 関数であって，対角線集合 $\{(x', x') : x' \in \partial D\}$ の近傍で $\tau(x', y') = 1$.　関数 $\tau(x', y')$ は境界 ∂D の形による.

(9) 作用素 Γ は次数 $2 - \min(\kappa_1, \kappa_2)$ の境界条件であって，次の条件をみたす:

$$\begin{aligned}\Gamma 1(x') = \eta(x') &+ \int_{\partial D} r(x', y')[1 - \tau(x', y')]dy' \\ &+ \int_D t(x', y)[1 - \tau(x', y)]dy \leq 0 \quad \text{on } \partial D.\end{aligned}$$

境界条件 L は，2 階の**ヴェンツェル境界条件**と呼ばれる．L の各項

$$Qu, \quad \mu\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}, \quad \delta Wu, \quad \Gamma u$$

は，それぞれ，境界での拡散現象と吸収現象，反射現象，滞留（粘性）現象，境界での跳躍現象と境界から内部への跳躍現象の合計 6 つの現象に対応している.

条件 (9) の直観的意味は，境界点 x' から x' の（$\overline{D}$ における）ある近傍の外部への跳躍現象よりも点 x' における吸収現象の方が “強い” ことを意味している.

フェラー半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ の生成作用素 $\mathfrak{A}$ は解析的にワルデンフェルス作用素 W とヴェンツェル境界条件 L によって記述されることが知られている（文献 [BCP], [SU], [Ta1], [We] を参照）．このことを，関数解析の言葉で言えば，次のようになる：閉包 $\overline{D} = D \cup \partial D$ 上のフェラー半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ は，よく知られたヒレ–吉田の定理（文献 [Yo] を参照）によって，生成作用素 $\mathfrak{A}$ の考察に帰着されるが，$\mathfrak{A}$（の定義域）は内部 D では 2 階の楕円型積分微分作用素 W によって，境界 ∂D では 2 階の境界条件 L によって記述される.

本講演では，ヴェンツェル境界条件付きのフェラー半群の構成問題を次の形で考察する:

問題. 逆に，与えられた解析的データ (W, L) に対して，実際に，その生成作用素 $\mathfrak{A}$ が (W, L) によって特徴付けられるフェラー半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を構成できるか？

この問題は，1 次元（$N = 1$）の場合，W. Feller, E.B. Dynkin, 伊藤清, H.P. McKean Jr., D. Ray 等によって確率論的にも解析的にも完全に解決されている（文

献 [Fe1], [Fe2], [Dy], [IM], [Ra] を参照）．従って，多次元（$N \geq 2$）の場合を考える．本講演では，フェラー半群構成の問題を偏微分方程式論の『積分微分作用素 W と境界条件 L に対する境界値問題』として捉えることにより，最近の偏微分方程式論の手法と結果を用いて，関数解析学の立場から研究する．

得られた結果を述べる．まず，境界条件 L が条件

$$\int_D t(x', y)dy = +\infty \quad \text{if} \quad \mu(x') = \delta(x') = 0$$

をみたすとき，境界 ∂D 上**横断的** (transversal) であるという．直観的には，横断条件は，拡散粒子が，反射現象も停留現象も起こらない境界の点から瞬間的に内部の点に跳躍することを意味する．確率論的には，このことは，境界 ∂D 上のマルコフ過程は，閉包 $\overline{D} = D \cup \partial D$ 上のマルコフ過程の軌道の "軌跡" であることを意味する．

次の定理 1 は，境界 ∂D の各点で，境界での拡散現象と吸収現象，反射現象，滞留（粘性）現象，境界上の跳躍現象と境界から内部への跳躍現象の合計 6 つの現象のうちのどれか一つが起こるような拡散現象に対応する $\overline{D}$ 上のフェラー半群が存在することを主張している:

定理 1. 空間 $C(\overline{D})$ からそれ自身への線型作用素 $\mathfrak{A}$ を次で定義する:

(a) 作用素 $\mathfrak{A}$ の定義域 $D(\mathfrak{A})$ は

$$D(\mathfrak{A}) = \left\{u \in C(\overline{D}) : Wu \in C(\overline{D}), Lu = 0 \ on \ \partial D\right\}.$$

(b) $\mathfrak{A}u = Wu$, $u \in D(\mathfrak{A})$.

ここで，Wu や Lu は超関数（*distributions*）の意味でとる．

このとき，境界条件 L が境界 ∂D 上横断的ならば，作用素 $\mathfrak{A}$ は $\overline{D}$ 上のフェラー半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を生成する．

定理 1 は，境界値問題が楕円型の場合は，Bony–Courrège–Priouret [BCP] によって，また，特別な場合は，Cancelier [Cn], Takanobu–Watanabe [TW] によって証明されている．

I.2.2. 特異積分作用素論によるアプローチ.

この節では，考える領域 D は, N 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^N$ の有界領域であって，その境界 ∂D のなめらかさは $C^{1,1}$ 級とする．ただし，$N \geq 3$. まず，A は次のような**不連続**な係数を持つ 2 階の楕円型微分作用素とする:

$$Au := \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u.$$

主部の係数 $a^{ij}(x)$ が連続関数の場合，一様に楕円型な 2 階の微分作用素に対するシャウダー理論の L^p 版は良く知られている (文献 [GT] を参照)．しかしながら，係数 $a^{ij}(x)$ が不連続な場合は，非常に複雑になる．実際，2 次元の場合を除いては，シャウダー理論の L^p 版が成立しないことが知られている．例えば，文献 [Me], [Ti] を参照．従って，3 次元以上の場合，主部の係数 $a^{ij}(x)$ に何らかの条件を課すことが必要になる．本講演では，一つの条件として，実解析でよく知られている VMO (vanishing mean oscillation) 条件を採用する (文献 [Sa] を参照)．VMO 条件は，ジョン・ニレンバーグ [JN] によって導入された BMO (bounded mean oscillation) 条件において，球上の積分平均が半径と共にゼロに収束する，という条件を付加したものであるこ

とに注意．この条件こそが，微分作用素 A の基本解を評価する際に，カルデロン・ジグムントの特異積分作用素の理論の本質的なアイデアを捉えたものである．

以下では，係数 $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$, $c(x)$ は次の 3 条件 (1), (2), (3) を満たすとする:

(1) $a^{ij}(x) \in \mathrm{VMO} \cap L^\infty(D)$ であって，D のほとんどいたるところで $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ とする．さらに，微分作用素 A は D において**一様に楕円型**．すなわち，定数 $\lambda > 0$ が存在して，

$$\frac{1}{\lambda}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \lambda|\xi|^2 \quad \text{for almost all } x \in D \text{ and all } \xi \in \mathbf{R}^N.$$

(2) $b^i(x) \in L^\infty(D)$.

(3) $c(x) \in L^\infty(D)$ であって，D のほとんどいたるところで $c(x) \leq 0$ とする．

さらに，L を次の形をした 1 階の境界作用素とする:

$$Lu := \mu(x')\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \beta(x') \cdot u + \gamma(x')u - \delta(x')(Au|_{\partial D}) \quad \text{on } \partial D.$$

以下では，係数 $\mu(x')$, $\beta(x')$, $\gamma(x')$, $\delta(x')$ は次の 4 条件 (4), (5), (6), (7) を満たすとする:

(4) $\mu(x')$ は ∂D 上のリプシッツ連続関数で，$\mu(x') \geq 0$ とする．

(5) $\beta(x')$ は ∂D 上のリプシッツ連続なベクトル場．

(6) $\gamma(x')$ は ∂D 上のリプシッツ連続関数で，$\gamma(x') \leq 0$ とする．

(7) $\delta(x')$ は ∂D 上のリプシッツ連続関数で，$\delta(x') \geq 0$ とする．

(8) $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$ は ∂D 上の単位内向き法線ベクトルとする．

次の定理は，境界に沿ってのズレ現象，吸収現象，滞留（粘性）現象と反射現象に対応するフェラー半群の生成定理である:

定理 2. $N < p < \infty$ に対して，$C(\overline{D})$ 上の線形作用素 $\mathfrak{A}$ を次のように定義する:

(a) 定義域 $D(\mathfrak{A})$ は，

$$D(\mathfrak{A}) = \left\{u \in W^{2,p}(D) : Au \in C(\overline{D}),\ Lu = 0 \ on\ \partial D\right\}.$$

(b) $\mathfrak{A}u = Au,\ u \in D(\mathfrak{A})$.

ここで，Au, Lu は超関数の意味でとる．

関数 $\mu(x')$, $\gamma(x')$ は，次の *2* 条件 *(H.1), (H.2)* を満たすとする:

(H.1) $$\mu(x') > 0 \quad on\ \partial D,$$

(H.2) $$\gamma(x') < 0 \quad on\ \partial D.$$

このとき，作用素 $\mathfrak{A}$ は $C(\overline{D})$ 上のフェラー半群の生成作用素である．

注意 1. 定義域 $D(\mathfrak{A})$ は，$p \in (N, \infty)$ に依存しない．

定理 2 の証明の本質的なアイデアは，境界条件

$$Lu = \mu(x')\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \beta(x') \cdot u + \gamma(x')u - \delta(x')(Au|_{\partial D})$$

における粘性現象に対応する項 $\delta(x')(Au|_{\partial D})$ を，斜交微分境界条件

$$L_0 u := \mu(x')\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \beta(x') \cdot u + \gamma(x')u$$

の**摂動項**と捉える点にある．その際，次の斜交微分境界条件に対応するフェラー半群の生成定理が重要な役割を果たす (文献 [DP], [MPS] を参照):

定理 3. $N < p < \infty$ に対して，$C(\overline{D})$ 上の線形作用素 $\mathfrak{A}_N$ を次のように定義する:

(a) 定義域 $D(\mathfrak{A}_N)$ は，

$$D(\mathfrak{A}_N) = \left\{u \in W^{2,p}(D) : Au \in C(\overline{D}),\ L_0 u = 0 \ \textit{on}\ \partial D\right\}.$$

ただし，

$$L_0 u := \mu(x')\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \beta(x') \cdot u + \gamma(x')u \quad \textit{on}\ \partial D.$$

(b) $\mathfrak{A}_N u = Au$, $u \in D(\mathfrak{A}_N)$.

ここで，Au, Lu は超関数の意味でとる．

関数 $\mu(x')$, $\gamma(x')$ が *2* 条件 *(H.1)*, *(H.2)* を満たせば，作用素 $\mathfrak{A}_N$ は $C(\overline{D})$ 上のフェラー半群の生成作用素である．

注意 2. 定義域 $D(\mathfrak{A}_N)$ は，$p \in (N, \infty)$ に依存しない．

言い換えれば，定理 3 は，境界に沿ってのズレ現象，吸収現象と反射現象に対応するフェラー半群の存在を主張している．

吸収現象（ディリクレ境界条件）に対応するフェラー半群の生成定理を証明するには，領域 D の**一点コンパクト化**と関連して，基礎となる関数空間を変更する必要がある．そこで，ディリクレ条件に付随した $C(\overline{D})$ の部分空間を次のように定義する:

$$C_0(\overline{D}) = \{u \in C(\overline{D}) : u = 0 \text{ on } \partial D\}.$$

バナッハ空間 $C_0(\overline{D})$ 上の強連続な半群 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ が非負且つ縮小的であるとき，すなわち，条件

$$f \in C_0(\overline{D}), 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \text{on } \overline{D} \implies 0 \leq T_t f(x) \leq 1 \quad \text{on } \overline{D}$$

をみたすとき，半群 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ を $C_0(\overline{D})$ 上の**フェラー半群**という．T_t が $C_0(\overline{D})$ 上のフェラー半群であるとき，リースの表現定理によって，一意的にマルコフ推移関数 $p_t(x, \cdot)$ が存在して，関係式

$$T_t f(x) = \int_{\overline{D}} p_t(x, dy) f(y), \quad f \in C_0(\overline{D})$$

が成り立つことが知られている．さらに，関数 $p_t(x, \cdot)$ は，実際に，ある**マルコフ過程**の推移関数であることが示されるので，値 $p_t(x, E)$ は，点 x を出発した拡散粒子が時刻 t に集合 E に見いだされる推移確率を表わしている．

次の定理は，吸収現象に対応するフェラー半群の生成定理である:

定理 4. $N < p < \infty$ に対して，$C_0(\overline{D})$ 上の線形作用素 $\mathfrak{A}_D$ を次のように定義する:

(1) 定義域 $D(\mathfrak{A}_D)$ は，

$$D(\mathfrak{A}_D) = \{u \in W^{2,p}(D) \cap C_0(\overline{D}) : Au \in C_0(\overline{D})\}.$$

(2) $\mathfrak{A}_D u = Au$, $u \in D(\mathfrak{A}_D)$.

ここで，Au, Lu は超関数の意味でとる．

このとき，作用素 $\mathfrak{A}_D$ は $C_0(\overline{D})$ 上のフェラー半群の生成作用素である．

注意 3. 定義域 $D(\mathfrak{A}_D)$ は，$p \in (N, \infty)$ に依存しない．

定理 2 から定理 4 の詳しい証明については，講演の中で述べる．本原稿では，その準備段階として，次節において，定理 1 の証明の基本的な方針を述べる．

I.3. 定理 1 の証明のスケッチ. 本節では，定理 1 の証明のスケッチを，文献 [Ta1], [Ta8] に従って，詳しく述べる．

I.3.1 マルコフ推移関数とフェラー半群.

(K,ρ) をコンパクトな距離空間，$\mathcal{B}$ を K のボレル集合から成る完全加法族とする．

すべての $t \geq 0$, $x \in K$, $E \in \mathcal{B}$ に対して定義された関数 $p_t(x,E)$ が，次の 4 条件を満たすとき，K 上の**マルコフ推移関数**とよばれる:

(a) $p_t(x,\cdot)$ は，$\mathcal{B}$ 上の非負測度であって，各 $t \geq 0$, $x \in K$ に対して $p_t(x,K) \leq 1$.
(b) $p_t(\cdot,E)$ は，各 $t \geq 0$, $E \in \mathcal{B}$ に対して，ボレル可測関数.
(c) 各 $x \in K$ に対して，$p_0(x,\{x\}) = 1$.
(d) （チャップマン・コルモゴロフ方程式）各 t, $s \geq 0$, $x \in K$, $E \in \mathcal{B}$ に対して，

$$p_{t+s}(x,E) = \int_K p_t(x,dy)p_s(y,E). \tag{3.1}$$

直観的には，値 $p_t(x,E)$ は，点 x を出発した拡散粒子が時刻 t に集合 E に見いだされる推移確率を表わしている．従って，方程式 (3.1) は，拡散粒子が "starts afresh" するというマルコフ性を関数解析的に表わしている．

さて，$C(K)$ を K 上の実数値連続関数の空間とする．空間 $C(K)$ には一様位相をいれる．よって，空間 $C(K)$ は最大値ノルム

$$\|f\| = \max_{x\in K} |f(x)|$$

をノルムとしてバナッハ空間である．

マルコフ推移関数 p_t は，条件

$$f \in C(K) \implies T_t f \in C(K)$$

を満たすとき，**フェラー関数**という．

マルコフ推移関数 p_t に付随する半群

$$T_t f(x) = \int_K p_t(x,dy)f(y), \quad f \in C(K)$$

が，空間 $C(K)$ 上強連続

$$\lim_{s\downarrow 0} \|T_{t+s}f - T_t f\| = 0, \quad f \in C(K)$$

であるための必要十分条件を与えよう．

マルコフ推移関数 p_t は，次の条件を満たすとき，K 上**一様に確率連続**であるという:

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\lim_{t\downarrow 0} \sup_{x\in K} [1 - p_t(x,U_\varepsilon(x))] = 0.$$

ただし，$U_\varepsilon(x) = \{y \in K : \rho(x,y) < \varepsilon\}$ は x の ε 近傍.

このとき，次の結果が成り立つ:

定理 3.1. マルコフ推移関数 p_t は K 上のフェラー関数とする．このとき，付随する半群

$$T_t f(x) = \int_K p_t(x, dy) f(y), \quad f \in C(K) \tag{3.2}$$

が，空間 $C(K)$ 上強連続であるための必要十分条件は，推移関数 p_t が K 上一様に確率連続であることである．

空間 $C(K)$ 上の有界線型作用素の族 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ が，次の3条件を満たすとき，K 上の**フェラー半群**という:

(i) $T_{t+s} = T_t \cdot T_s$, t, $s \geq 0$; $T_0 = I =$ 恒等写像.

(ii) $\{T_t\}$ は，$t \geq 0$ について強連続である．

$$\lim_{s \downarrow 0} \|T_{t+s} f - T_t f\| = 0, \quad f \in C(K).$$

(iii) $\{T_t\}$ は，非負且つ縮小的である．

$$f \in C(K),\, 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \text{on } K \implies 0 \leq T_t f(x) \leq 1 \quad \text{on } K.$$

次の定理は，フェラー半群のマルコフ推移関数による特徴付けを与えている:

定理 3.2. p_t が K 上の一様に確率連続なマルコフ推移関数であれば，付随する作用素族 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ は K 上のフェラー半群を生成する．

逆に，$\{T_t\}_{t \geq 0}$ が K 上のフェラー半群であれば，K 上の一様に確率連続なマルコフ推移関数 p_t が存在して，公式 *(3.2)* が成り立つ．

I.3.2. フェラー半群の生成定理.

コンパクトな距離空間 K 上のフェラー半群 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ に対して，その**生成作用素** $\mathfrak{A}$ を次式で定義する:

$$\mathfrak{A} u = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t u - u}{t}. \tag{3.3}$$

より正確には，作用素 A は，次のように定義される:

(1) 定義域 $D(\mathfrak{A})$ は

$$D(\mathfrak{A}) = \{u \in C(K) : \text{極限値 (3.3) が存在する}\}.$$

(2) $\mathfrak{A} u = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t u - u}{t}$, $u \in D(\mathfrak{A})$.

次の定理は，ヒレ–吉田の定理（文献 [Yo] を参照）の “フェラー半群版” である:

定理 3.3. *(i)* $\{T_t\}_{t \geq 0}$ を K 上のフェラー半群，$\mathfrak{A}$ を生成作用素とする．このとき，次の主張が成り立つ*:*

(a) 定義域 $D(\mathfrak{A})$ は，空間 $C(K)$ において稠密．

(b) 各 $\alpha > 0$ に対して，方程式

$$(\alpha I - \mathfrak{A}) u = f$$

は，任意の $f \in C(K)$ に対して一意的な解 $u \in D(\mathfrak{A})$ をもつ．従って，各 $\alpha > 0$ に対して，**グリーン作用素**

$$(\alpha I - \mathfrak{A})^{-1} : C(K) \longrightarrow C(K)$$

を次式で定義することができる:

$$u = (\alpha I - \mathfrak{A})^{-1} f, \quad f \in C(K).$$

(c) 各 $\alpha > 0$ に対して，グリーン作用素 $(\alpha I - \mathfrak{A})^{-1}$ は，空間 $C(K)$ 上非負である:

$$f \in C(K),\, f \geq 0 \quad on\ K \implies (\alpha I - \mathfrak{A})^{-1} f \geq 0 \quad on\ K.$$

(d) 各 $\alpha > 0$ に対して，作用素 $(\alpha I - A)^{-1}$ は，空間 $C(K)$ 上有界であって，ノルムは

$$\|(\alpha I - \mathfrak{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

(ii) 逆に，空間 $C(K)$ 上の線型作用素 $\mathfrak{A}$ が条件 *(a)* を満たし，さらに，定数 $\alpha_0 \geq 0$ が存在して，すべての $\alpha > \alpha_0$ に対して条件 *(b)* から条件 *(d)* が成立すれば，作用素 $\mathfrak{A}$ は K 上のフェラー半群 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ を生成する．

応用上は，定理 3.3 よりも，最大値の原理の言葉で述べられた次の定理の方が使いやすい:

定理 3.4. 次の主張 *(i)*, *(ii)* が成り立つ:

(i) B は，空間 $C(K)$ 上の線型作用素であって，次の条件を満たすとする:

(α) 定義域 $D(B)$ は，空間 $C(K)$ において稠密．

(β) K の稠密な開集合 K_0 が存在して，関数 $u \in D(B)$ が正の最大値を点 $x_0 \in K_0$ でとれば，

$$Bu(x_0) \leq 0.$$

このとき，作用素 B は空間 $C(K)$ において閉拡張 $\overline{B}$ をもつ．

(ii) B を *(i)* と同じとし，さらに，次の条件を仮定する:

(β') 関数 $u \in D(B)$ が正の最大値を点 $x' \in K$ でとれば，

$$Bu(x') \leq 0.$$

(γ) ある定数 $\alpha_0 \geq 0$ に対して，値域 $R(\alpha_0 I - B)$ は，空間 $C(K)$ において稠密である．

このとき，B の最小閉拡張 $\overline{B}$ は，K 上のフェラー半群を生成する．

I.3.3. 境界への帰着.

(i) まず，ヒレ–吉田の半群の理論をバナッハ空間 $C(\overline{D})$ に適用し，定理 3.4 より，フェラー半群の構成問題を次の楕円型境界値問題 (*) に対する**一意可解性**の問題に帰着する:

$$(*) \qquad \begin{cases} (\alpha - W)u = f & \text{in } D, \\ Lu = 0 & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

ここで，α は正のパラメーターである．

(ii) 境界値問題 (*) を，擬微分作用素のヘルダー空間理論を使って，次のようにして解く．

(ii-1) まず，2 階の楕円型積分微分作用素 W に対する次のディリクレ問題を考える：それぞれ D 上および ∂D 上で定義された関数 f と φ に対して，

$$(D) \qquad \begin{cases} (\alpha - W)u = f & \text{in } D, \\ u = \varphi & \text{on } \partial D \end{cases}$$

を満たす関数 u を求めよ．

次のディリクレ問題に対するヘルダー空間の枠組における一意可解性の定理は，古典的な楕円型微分作用素の場合の一意可解性の定理から従う ([BCP, Théorème XV] を参照):

定理 3.5. k を非負整数，$0 < \theta < 1$ とする．任意の関数 $f \in C^{k+\theta}(\overline{D})$ と $\varphi \in C^{k+2+\theta}(\partial D)$ に対して，問題 (D) は一意的な解 $u \in C^{k+2+\theta}(\overline{D})$ を持つ．

定理 3.5 より，次のように 2 つの線型作用素 G_α^0, H_α を定義することができる:

$$\begin{aligned} G_\alpha^0 &: C^\theta(\overline{D}) \longrightarrow C^{2+\theta}(\overline{D}), \\ H_\alpha &: C^{2+\theta}(\partial D) \longrightarrow C^{2+\theta}(\overline{D}). \end{aligned}$$

(a) 任意の $f \in C^\theta(\overline{D})$ に対して，関数 $G_\alpha^0 f \in C^{2+\theta}(\overline{D})$ は，境界値問題

$$\begin{cases} (\alpha - W)G_\alpha^0 f = f & \text{in } D, \\ G_\alpha^0 f = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

の一意的な解である．

(b) 任意の $\varphi \in C^{2+\theta}(\partial D)$ に対して，関数 $H_\alpha \varphi \in C^{2+\theta}(\overline{D})$ は，境界値問題

$$\begin{cases} (\alpha - W)H_\alpha \varphi = 0 & \text{in } D, \\ H_\alpha \varphi = \varphi & \text{on } \partial D \end{cases}$$

の一意的な解である．

作用素 G_α^0, H_α は，それぞれ，ディリクレ問題に対する**グリーン作用素**，**調和（ポアッソン）作用素**である．

このとき，容易に分かるように，関数 u が境界値問題

$$\begin{cases} (\alpha - W)u = f & \text{in } D, \\ Lu = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

の解であることと，関数 $w := u - v$ が境界値問題

$$\begin{cases} (\alpha - W)w = 0 & \text{in } D, \\ Lw = -Lv = -LG_\alpha^0 f & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

の解であることとは同値である．

一方，斉次方程式

$$(\alpha - W)w = 0 \quad \text{in } D$$

の任意の解 w は，一重層ポテンシャルを使って，次のように表わすことができる:

$$w = H_\alpha \psi \quad \text{in } D.$$

従って，グリーン作用素 G_α^0 と調和作用素 H_α を使って，境界値問題 $(*)$ を境界上の方程式

$$(**) \qquad LH_\alpha \psi = -LG_\alpha^0 f \quad \text{on } \partial D$$

に帰着することができる．方程式 $(**)$ は，古典的な**フレドホルム積分方程式**の一般化に他ならない．

(ii-2) 次に，作用素 LH_α は，境界 ∂D 上の 2 階の擬微分作用素であることが知られている (文献 [Ho], [Ku], [Se], [Tr] を参照).

そこで，次のヘルダー空間における擬微分作用素に対する一意可解性定理を使って，境界条件 L が**横断的**ならば，作用素 LH_α はヘルダー空間の枠内で**一意可解的**であることを示すことができる．

定理 3.6. M を n 次元のコンパクトで，なめらかな多様体，T を M 上の 2 階の擬微分作用素であって，次の形をしているとする:

$$T = P + S.$$

ただし，

(a) 作用素 P は非正シンボルを持つ 2 階退化楕円型微分作用素であって，$P1 \leq 0$ *on* M.

(b) 作用素 S は，M 上の $(2-\kappa)$ 次 $(\kappa > 0)$ の擬微分作用素であって，超関数核 $s(x, y)$ は対角線集合 $\Delta_M = \{(x, x) : x \in M\}$ を除いて非負とする.

(c) $T1 = P1 + S1 \leq 0$ *on* M.

このとき，各整数 $k \geq 1$ に対して定数 $\lambda = \lambda(k) > 0$ が存在し，任意の関数 $f \in C^{k+\theta}(M)$ に対し，方程式

$$(T - \lambda I)\varphi = f \quad on\ M$$

は解 $\varphi \in C^{k+\theta}(M)$ を持つ．さらに，不等式

$$\|\varphi\|_{C^{k+\theta}(M)} \leq C_{k+\theta}(\lambda)\|f\|_{C^{k+\theta}(M)}$$

が成り立つ．ここで，$C_{k+\theta}(\lambda) > 0$ は f に依存しない定数である.

この定理は，Cancelier [Cn, Théorème 4.5] の証明のように “elliptic regularization” の方法と実補間空間論（文献 [Tl] を参照）を組み合わせて証明することができる (文献 [OR] も参照).

よって，問題 $(*)$ の一意的な解 u を次式で表わすことができる:

$$u = G_\alpha^0 f - H_\alpha \left(L H_\alpha^{-1} L G_\alpha^0 f \right).$$

この式を使って，(定理 1 のなかで述べた）空間 $C(\overline{D})$ からそれ自身への線型作用素 $\mathfrak{A}$ に対して，公式

$$(\alpha I - \mathfrak{A})^{-1} f = G_\alpha^0 f - H_\alpha \left(L H_\alpha^{-1} L G_\alpha^0 f \right)$$

が成り立ち，$\mathfrak{A}$ がフェラー半群の（ヒレ–吉田型の）生成定理（定理 3.4）の諸条件をみたすことを確かめることができる．従って，作用素 $\mathfrak{A}$ が $\overline{D}$ 上のフェラー半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を生成することがわかる.

I.3.4. フェラー半群の存在定理（一般論）.

前節の最後で述べたことを，文献 [Ta1], [Ta8] に従って，関数解析的に正確に定式化しよう (文献 [BCP], [SU] も参照).

まず，グリーン作用素 G_α^0 と調和作用素 H_α に対して，次の結果が成り立つ ([BCP, Proposition III.1.6] を参照):

定理 3.7. *(i) (a)* グリーン作用素 G_α^0 $(\alpha > 0)$ は，空間 $C(\overline{D})$ 上の非負且つ有界な線型作用素 G_α^0 に拡張される．ノルムは

$$\|G_\alpha^0\| = \|G_\alpha^0 1\| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

(b) 任意の関数 $f \in C(\overline{D})$ に対して，

$$G_\alpha^0 f|_{\partial D} = 0.$$

(c) 任意の $\alpha, \beta > 0$ に対して，次の関係式（リゾルベント方程式）が成り立つ:

$$G_\alpha^0 f - G_\beta^0 f + (\alpha - \beta) G_\alpha^0 G_\beta^0 f = 0, \quad f \in C(\overline{D}).$$

(d) 任意の関数 $f \in C(\overline{D})$ に対して，

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \alpha G_\alpha^0 f(x) = f(x), \quad x \in D.$$

さらに，$f|_{\partial D} = 0$ ならば，この収束は $x \in \overline{D}$ について一様である．すなわち，

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \alpha G_\alpha^0 f = f \quad in\ C(\overline{D}).$$

(e) 作用素 G_α^0 は，各整数 k に対して，空間 $C^{k+\theta}(\overline{D})$ を空間 $C^{k+2+\theta}(\overline{D})$ に写す．

(ii) (a') 調和作用素 H_α $(\alpha > 0)$ は，空間 $C(\partial D)$ から空間 $C(\overline{D})$ への非負且つ有界な作用素 H_α に拡張される．ノルムは

$$\|H_\alpha\| = \|H_\alpha 1\| = 1.$$

(b′) 任意の関数 $\varphi \in C(\partial D)$ に対して，

$$H_\alpha \varphi|_{\partial D} = \varphi.$$

(c′) 任意の $\alpha, \beta > 0$ に対して，

$$H_\alpha \varphi - H_\beta \varphi + (\alpha - \beta) G_\alpha^0 H_\beta \varphi = 0, \quad \varphi \in C(\partial D).$$

(d′) 任意の関数 $\varphi \in C(\partial D)$ に対して，

$$\lim_{\alpha \to +\infty} H_\alpha \varphi(x) = 0, \quad x \in D.$$

(e′) 調和作用素 H_α は，各整数 k に対して，$C^{k+2+\theta}(\partial D)$ を $C^{k+2+\theta}(\overline{D})$ に写す．

さて，境界値問題 $(*)$ を連続関数の空間の枠組み内で考えよう:

$$(*) \qquad \begin{cases} (\alpha - W)u = f & \text{in } D, \\ Lu = 0 & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

そのために，3 つの作用素を導入する．

(I) まず，線型作用素

$$W : C(\overline{D}) \longrightarrow C(\overline{D})$$

を次のように定義する:

(a) 定義域 $D(W)$ は空間 $C^{2+\theta}(\overline{D})$.

(b) $Wu = Au + S_r u$, $u \in D(W)$.

このとき，次の結果が成り立つ:

補題 3.8. 作用素 W は，空間 $C(\overline{D})$ において最小閉拡張 $\overline{W}$ を持つ．

注意 3.9. 包含写像: $C(\overline{D}) \to \mathcal{D}'(D)$ は連続だから，公式

$$\overline{W}u(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x)$$
$$+ \int_D s(x,y)\left[u(y) - \sigma(x,y)\left(u(x) + \sum_{j=1}^{N}(y_j - x_j)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right)\right] dy$$

が成り立つ．ただし，右辺は超関数の意味でとる．

拡張されたグリーン作用素 $G_\alpha^0 : C(\overline{D}) \to C(\overline{D})$ と調和作用素 $H_\alpha : C(\partial D) \to C(\overline{D})$, $\alpha > 0$, に対して，次の結果が成り立つ:

補題 3.10. *(i)* 任意の関数 $f \in C(\overline{D})$ に対して，

$$\begin{cases} G_\alpha^0 f \in D(\overline{W}), \\ (\alpha I - \overline{W})G_\alpha^0 f = f \quad in\ D. \end{cases}$$

(ii) 任意の関数 $\varphi \in C(\partial D)$ に対して，

$$\begin{cases} H_\alpha \varphi \in D(\overline{W}), \\ (\alpha I - \overline{W})H_\alpha \varphi = 0 \quad in\ D. \end{cases}$$

系 3.11. 任意の $u \in D(\overline{W})$ は，次の形に表現される:

$$u = G_\alpha^0\left((\alpha I - \overline{W})u\right) + H_\alpha(u|_{\partial D}), \quad \alpha > 0. \tag{3.4}$$

(II) 次に，線型作用素

$$LG_\alpha^0 : C(\overline{D}) \longrightarrow C(\partial D)$$

を次のように定義する:

(a) 定義域 $D\left(LG_\alpha^0\right)$ は空間 $C^\theta(\overline{D})$.

(b) $LG_\alpha^0 f = L\left(G_\alpha^0 f\right)$, $f \in D\left(LG_\alpha^0\right)$.

このとき，次の結果が成り立つ:

補題 3.12. 作用素 LG_α^0 $(\alpha > 0)$ は，一意的に，非負且つ有界な線型作用素 $\overline{LG_\alpha^0} : C(\overline{D}) \to C(\partial D)$ に拡張される．

2つの作用素 $\overline{LG_\alpha^0}$ と $\overline{LG_\beta^0}$ との基本的な関係式については，次の結果が成り立つ:

補題 3.13. 任意の関数 $f \in C(\overline{D})$ に対して，

$$\overline{LG_\alpha^0}f - \overline{LG_\beta^0}f + (\alpha - \beta)\overline{LG_\alpha^0}\,G_\beta^0 f = 0, \quad \alpha, \beta > 0.$$

(III) 最後に，線型作用素

$$LH_\alpha : C(\partial D) \longrightarrow C(\partial D)$$

を次のように定義する:

(a) 定義域 $D(LH_\alpha)$ は空間 $C^{2+\theta}(\partial D)$.

(b) $LH_\alpha \psi = L(H_\alpha \psi)$, $\psi \in D(LH_\alpha)$.

このとき，次の結果が成り立つ:

補題 3.14. 作用素 LH_α $(\alpha > 0)$ は，空間 $C(\partial D)$ において最小閉拡張 $\overline{LH_\alpha}$ を持つ．

2 つの作用素 $\overline{LH_\alpha}$ と $\overline{LH_\beta}$ との基本的な関係式については，次の結果が成り立つ:

補題 3.15. 定義域 $D\left(\overline{LH_\alpha}\right)$ は $\alpha > 0$ に依存しない．その共通の定義域を $\mathcal{D}$ で表わす．このとき，次の関係式が成り立つ:

$$\overline{LH_\alpha}\psi - \overline{LH_\beta}\psi + (\alpha-\beta)\overline{LG_\alpha^0}\, H_\beta\psi = 0\,, \quad \alpha, \beta > 0,\ \psi \in \mathcal{D}.$$

さて，境界 ∂D 上のフェラー半群が存在するための一般的な定理を述べよう:

定理 3.16. 次の主張 *(i), (ii)* が成り立つ:

(i) 作用素 $\overline{LH_\alpha}$ $(\alpha > 0)$ が，境界 ∂D 上のフェラー半群 $\{S_t^\alpha\}_{t\geq 0}$ の生成作用素ならば，各定数 $\lambda > 0$ に対して，境界値問題

$$(*') \qquad \begin{cases} (\alpha - W)u = 0 & \textit{in } D, \\ (\lambda - L)u = \varphi & \textit{on } \partial D \end{cases}$$

は，空間 $C(\partial D)$ の**稠密な**部分集合に属するすべての関数 φ に対して，解 $u \in C^{2+\theta}(\overline{D})$ を持つ．

(ii) 逆に，ある定数 $\lambda \geq 0$ に対して，問題 $(*')$ が，空間 $C(\partial D)$ の稠密な部分集合に属するすべての関数 φ に対して，解 $u \in C^{2+\theta}(\overline{D})$ を持つならば，作用素 $\overline{LH_\alpha}$ は境界 ∂D 上のフェラー半群 $\{S_t^\alpha\}_{t\geq 0}$ の生成作用素である．

最後に，関数 u が定義域 $D(\overline{W})$ に属していれば，境界条件 Lu が（超関数として）意味を持つことを述べよう．

境界条件 L の定義域として，次の集合を導入する:

$$D(L) = \left\{u \in D(\overline{W}) : u|_{\partial D} \in \mathcal{D}\right\},$$

ただし，$\mathcal{D}$ は作用素 $\overline{LH_\alpha}$ の共通の定義域である．定義域 $D(L)$ は空間 $C^{2+\theta}(\overline{D})$ を含んでいることに注意．

系 3.11 より，任意の関数 $u \in D(L) \subset D(\overline{W})$ は，次の形に表現することができる:

$$(3.4) \qquad u = G_\alpha^0\left((\alpha I - \overline{W})u\right) + H_\alpha\left(u|_{\partial D}\right)\,, \quad \alpha > 0.$$

そこで,

$$(3.5) \qquad Lu = \overline{LG_\alpha^0}\left((\alpha I - \overline{W})u\right) + \overline{LH_\alpha}\left(u|_{\partial D}\right)$$

と定義する．

次の補題は，境界条件 Lu, $u \in D(L)$ の定義の正当化を与える:

補題 3.17. 公式 *(3.5)* の右辺は，u のみに依存し，表現式 *(3.4)*（従って $\alpha > 0$）には依らない．

次の定理は，定理 1 の精密化である:

定理 3.18. 線型作用素

$$\mathfrak{A} : C(\overline{D}) \longrightarrow C(\overline{D})$$

を次のように定義する:

(a) 定義域 $D(\mathfrak{A})$ は

$$D(\mathfrak{A}) = \{u \in D(L) : Lu = 0\} = \left\{u \in D(\overline{W}) : u|_{\partial D} \in \mathcal{D},\ Lu = 0\right\}.$$

ただし，$\mathcal{D}$ は作用素 $\overline{LH_\alpha}$, $\alpha > 0$ の共通の定義域である.

(b) $\mathfrak{A}u = \overline{W}u$, $u \in D(\mathfrak{A})$.

境界条件 L が横断的ならば，作用素 $\mathfrak{A}$ は $\overline{D}$ 上のフェラー半群を生成し，グリーン作用素 $G_\alpha = (\alpha I - \mathfrak{A})^{-1}$, $\alpha > 0$, は次式で与えられる:

$$G_\alpha f = G_\alpha^0 f - H_\alpha\left(\overline{LH_\alpha}^{-1}\left(\overline{LG_\alpha^0 f}\right)\right), \quad f \in C(\overline{D}).$$

I.4. まとめ. 以上のことを “直観的” に言い換えると，次のようになる:

(a) 先ず，境界値問題 $(*')$ が連続関数の空間において一意可解的であるということは，**境界** ∂D 上にフェラー半群 $\{S_t^\alpha\}_{t\geq 0}$ が存在することを意味する（定理 3.16）. この半群の生成作用素は，境界 ∂D 上の擬微分作用素 LH_α であって，対応する境界 ∂D 上の強マルコフ過程の軌道は，一般には，連続ではないことに注意.

(b) 次に，**横断条件**によって，境界上の強マルコフ過程の拡散粒子は，必ず，境界 ∂D から内部 D へ出ていく．ところが，作用素 W に対する楕円性条件によって，内部では，拡散粒子は自由に動き回ることができ，しかも，境界の任意の点に到達可能である．従って，境界 ∂D 上の強マルコフ過程と内部の強マルコフ過程とを**繋合わせて**，閉包 $\overline{D} = D \cup \partial D$ 上の強マルコフ過程を構成することができる．この強マルコフ過程に対応するフェラー半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ が，定理 3.18 で構成したものである.

関数解析的に言い換えれば，境界 ∂D 上のフェラー半群 $\{S_t^\alpha\}_{t\geq 0}$ から閉包 $\overline{D} = D \cup \partial D$ 上のフェラー半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を構成することを意味する．これはまた，確率論における “Excursion” の考え方に対応しているものと思われる (文献 [Wa] を参照).

I.5. 終わりに.

文献 [Ta1] では主として擬微分作用素の L^2 理論を使ったアプローチによって，文献 [Ta3] では擬微分作用素のヘルダー空間理論によって，フェラー半群の構成問題を研究した．また，文献 [Ta8] では擬微分作用素の L^p 理論を使ったアプローチによって，フェラー半群の構成問題を研究した．最後に，本講演で述べるように，文献 [Ta9], [Ta10] では特異積分作用素の理論を使った実解析的なアプローチによって，フェラー半群の構成問題を研究した.

(II) 数理生態学における『人口動態論』

この研究の目的は，非線型偏微分方程式の境界値問題を，確率論のブラウン運動という直観的イメージを指導原理にして，研究することである．特に，数学的に未開拓な分野である数理生態学の人口動態論について解析学の立場から考察する．空間的に不均一な生息環境において，生物がブラウン運動のようにランダムに振る舞うと仮定して，時間とともに個体が分散して分布が空間的に広がる生物拡散について，拡散過程の境界値問題の研究に有効であった手法及びアイデアを用いて研究を行う．下記の 2 論文 [1], [2] は，古典的なマルサス及びフェアフルストの人口動態論の適用可能な範囲を，ディリクレ問題の第一固有値の言葉で，数学的に定式化することを試みた研究である：

[1] Introduction to diffusive logistic equations in population dynamics, Korean Journal of Computational and Applied Mathematics, 9 巻, 2 号, 2002 年, 289 頁–347 頁
[2] Diffusive logistic equations with degenerate boundary conditions, Mediterranean Journal of Mathematics, 1 巻, 3 号, 2004 年, 315 頁–365 頁

論文 [1], [2] では，ディリクレ境界条件（危険壁）とノイマン境界条件（防護壁）を特別な場合として含む非線型楕円型混合型境界値問題に対する基本的な解の分岐定理を証明し，1980 年代の楕円型境界値問題の研究を退化型境界条件の場合に一般化した．混合型境界条件は，偏微分方程式論の観点から言えば，退化楕円型である．これは，良く知られたシャピロ・ロパチンスキーの条件が成り立たないという事実に基づく．線型化された楕円型ディリクレ境界値問題の第一固有値を使って，古典的なマルサス及びフェアフルストの人口動態論のそれぞれの適用範囲を数学的に特徴付けた．さらに，ディリクレ境界値問題の第一固有値に対する比較定理を援用して，生存競争が無く，食料も豊富な居住環境の形態は，分散型パッチよりも集中型パッチの方が生物の生存には適していることを数学的に証明した．

また，論文 [Ta7] では，特異積分作用素の理論及び非線形関数解析学の解の分岐理論を援用して，ディリクレ境界条件の下で，論文 [1] の結果を，自然現象の不連続性を反映する不連続拡散係数を持つ楕円型境界値問題の場合に拡張した．このような調和解析学からのアプローチは，今後益々重要になるものと思われる．

数理生態学における重要な逆問題の一つは，因果関係が分かっているとして，モデルを決める問題がある．例えば，空間移動を伴う生物個体の生態は，時間及び空間の両面から考察することにより，はじめて解明することができる．そこで，生物個体の動きを，熱の伝導や物質の拡散と同様に，密度の高い方から低い方への生物個体数の密度差に比例した大きさの流れである（フーリエの法則）と仮定して，生物個体数の変化を反応・拡散方程式として記述すると，いわゆる拡散ロジスティック方程式を得る．拡散ロジスティック方程式は，数理生態学における基礎方程式の一つであるが，これは物理法則に基づいて導出された基礎方程式とは異なるために，内在的必然性を見い出すことはできない．例えば，生物の行動には “意志” が働くので，生物の空間内での動きを単純化して，熱伝導や物質の拡散と同じように扱うには，多少無理がある．この点を補正・改良し，生物にとっての環境の項を付け加えたモデルとして，KISS モデル (Kierstead–Slobodkin–Skellam model) が知られている．

いずれにしても，モデルの妥当性は，現実のデータとの整合性にのみ求められるべきであるが，数理生態学におけるモデリングが作業仮説的色彩を持つ限り，観測データから非線形性を同定するという逆問題的発想で，数理生態学におけるモデルを構築すること，つまり，因果関係が分かっているとして，モデルを決める問題は，今後，極めて重要になるものと思われる．

さらに，生物個体群の変動を記述する決定論的方程式によって生物個体数の定常な平衡値の維持が保証されているような場合においても，生物個体あるいは個体群の内的要因及び外的要因に基づく「確率論的な攪乱」を考慮すると，決定論的な議論からは予測できない絶滅の可能性が多くの場合に存在する．例えば，環境変動が生物個体に特有の内的増殖率に直接影響を与えるような場合には，そのような可能性が特に大きいといえる．環境条件の変化が複雑な相互作用を通して生物種に及ぼす影響を予測する場合にも，研究テーマ (I) のような確率論的な考察が不可欠である．また，考察する問題によっては，数学的な取り扱いが極めて複雑になり，その解析には数値計算やシミュレーションを利用することが考えられる．

(III) 燃焼学における『熱着火理論』あるいは化学における『反応速度論』

燃焼（化学）反応におけるアレニウスの法則は，指数関数型の非線型項に対応している．一方，熱の交換は容器表面の内と外との温度差に比例するというニュートン

の冷却の法則は，退化型ロバン境界条件に対応している．退化型ロバン境界条件は，等温条件（ディリクレ境界条件）及び断熱条件（ノイマン境界条件）を特別な場合として含む一般的な境界条件であり，偏微分方程式論の観点から言えば，非線型の退化楕円型境界値問題になる．下記の３論文 [3], [4], [5] では，アレニウスの法則及びニュートンの冷却の法則に従う燃焼（化学）反応を，非線型楕円型境界値問題の枠組みにおいて捉え，研究テーマ (I) のマルコフ過程の境界値問題の研究に有効であった手法及びアイデアを用いて，数学的な研究を行った：

[3] A mathematical analysis of thermal explosions, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 28 巻, 10 号, 2001 年, 581 頁–607 頁

[4] Semilinear elliptic boundary value problems in combustion theory, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 132 巻, 6 号, 2002 年, 1453 頁–1476 頁

[5] Semilinear parabolic boundary value problems in combustion theory, Journal of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 10 巻, 3 号, 2003 年, 455 頁–494 頁

燃焼学における実験的事実として，フランク・カメネツキーのパラメータに関してＳ字状の変化パターンが現れるが，論文 [3] では，アレニウスの法則及びニュートンの冷却の法則に従う燃焼（化学）反応において，実際にＳ字状の変化パターンが現れることを数学的に証明した．その際，燃焼学で良く知られたセミョーノフ近似のアイデアにヒントを得て，正値解が現れる様子を退化型ロバン境界値問題の第一固有値に対応する正値固有関数を用いて形式的に導く，という発見的考察が本質的な役割を果たした．論文 [3] の内容を要約すると，燃焼（化学）反応が起こるためには，化学反応物がいわゆる活性化エネルギーを超えるエネルギーを持つことが必要である．活性化エネルギーが十分小さい場合には化学反応は連続的であって，熱着火現象が起こることはない．しかしながら，活性化エネルギーが十分大きい場合には，酸素と化学反応物の濃度比率に応じて，突然，熱着火が起きたり，起こらなかったりする．これらの実験的事実を，ルレイ・シャウダーの写像度の理論に立脚した非線型楕円型境界値問題の正値解の分岐理論を援用して，数学的に厳密に証明した．

さらに，論文 [4], [5] では，燃焼学で良く知られている実験データを数学的に解明するため，応用面で重要なフランク・カメネツキーのパラメーターの臨界値（例えば発火点，消化点）の数値解析を実際に行うための理論的な裏付けとして，臨界値と退化型ロバン境界条件との関連を明らかにした．特に，論文 [5] では，論文 [4] でその存在を示した正の最小定常解と最大定常解に対して，時間に関する大域的漸近安定性定理を証明した．その証明においては，確率論における多次元拡散過程の境界値問題を詳しく考察した研究成果が本質的な役割を果たした．

将来的には，燃焼学における『熱着火理論』あるいは化学における『反応速度論』に対して，応用面で重要なパラメーターの臨界値の数値解析を実際に行うことを目指している．領域が３次元空間内の球の場合には，九州大学の中尾充宏教授の精度保証付きの数値解析の研究が知られている．

参考文献

[BCP] J.-M. Bony, P. Courrège et P. Priouret, *Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégro-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **18** (1968), 369–521.

[Bu] L. Boutet de Monvel, *Boundary problems for pseudo-differential operators*, Acta Math. **126** (1971), 11–51.

[CZ1] A. P. Calderón and A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **88** (1952), 85–139.

[CZ2] A. P. Calderón and A. Zygmund, *Local properties of solutions of elliptic partial differential equations*, Studia Math. **20** (1961), 171–225.

[Cn] C. Cancelier, *Problèmes aux limites pseudo-différentiels donnant lieu au principe du maximum*, Comm. P. D. E. **11** (1986), 1677–1726.

[CFL1] F. Chiarenza, M. Frasca and P. Longo, *Interior $W^{2,p}$ estimates for nondivergence elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ricerche di Matematica **60** (1991), 149–168.

[CFL2] F. Chiarenza, M. Frasca and P. Longo, *$W^{2,p}$- solvability of the Dirichlet problem for nondivergence elliptic equations with VMO coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. **336** (1993), 841–853.

[DP] G. Di Fazio and D. K. Palagachev, *Oblique derivative problem for elliptic equations in nondivergence form with VMO coefficients*, Comment. Math. Univ. Carolinae **37** (1996), 537–556.

[Dy] E. B. Dynkin, *Markov processes I, II*, Springer–Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, 1965.

[DY] E. B. Dynkin and A. A. Yushkevich, *Markov processes, theorems and problems*, Plenum Press, New York, 1969.

[Fe1] W. Feller, *The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations*, Ann. of Math. **55** (1952), 468–519.

[Fe2] W. Feller, *On second order differential equations*, Ann. of Math. **61** (1955), 90–105.

[GT] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, 1998 edition, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1998.

[Ho] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators, Vol. III*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983.

[IW] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, second edition, North-Holland/Kodansha, Amsterdam/Tokyo, 1989.

[IM] K. Itô and H. P. McKean, Jr., *Diffusion processes and their sample paths*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1965.

[JN] F. John and L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure and Appl. Math. **14** (1961), 415–426.

[Ku] H. Kumano-go, *Pseudo-differential operators*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1981.

[MPS] A. Maugeri, D. K. Palagachev and L. G. Softova, *Elliptic and parabolic equations with discontinuous coefficients*, Mathematical Research, Vol. 109, Wiley-VCH, 2000.

[Me] N. Meyers, *An L^p-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **17** (1963), 189–206.

[OR] O. A. Oleĭnik and E. V. Radkevič, *Second order equations with nonnegative characteristic form*, (in Russian), Itogi Nauki, Moscow, 1971; English translation, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island and Plenum Press, New York, 1973.

[Ra] D. Ray, *Stationary Markov processes with continuous paths*, Trans. Amer. Math. Soc. **82** (1956), 452–493.

[RS] S. Rempel and B.-W. Schulze, *Index theory of elliptic boundary problems*, Akademie-Verlag, Berlin, 1982.

[Sa] D. Sarason, *Functions of vanishing mean oscillation*, Trans. Amer. Math. Soc. **207** (1975), 391–405.

[SU] K. Sato and T. Ueno, *Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary*, J. Math. Kyoto Univ. **14** (1965), 529–605.

[Se] R.T. Seeley, *Singular integrals and boundary value problems*, Amer. J. Math. **88** (1966), 781–809.

[St1] E. M. Stein, *The characterization of functions arising as potentials I*, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 102–104.

[St2] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[Ta1] K. Taira, *Diffusion processes and partial differential equations*, Academic Press, San Diego New York London Tokyo, 1988.

[Ta2] K. Taira, *Boundary value problems and Markov processes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1499, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1991.

[Ta3] K. Taira, *On the existence of Feller semigroups with boundary conditions*, the Memoirs of the American Mathematical Society, No. 475, American Mathematica Society, Rhode Island, 1992.

[Ta4] K. Taira, *Analytic semigroups and semilinear initial boundary value problems*, London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 223, Cambridge University Press, London New York, 1995.

[Ta5] K. Taira, *Boundary value problems for elliptic integro-differential operators*, Math. Z. **222** (1996), 305–327.

[Ta6] K. Taira, *Brownian motion and index formulas for the de Rham complex*, Mathematical Research series, No. 106, Wiley-VCH, Berlin, 1998.

[Ta7] K. Taira, *Logistic Dirichlet problems with discontinuous coefficients*, J. Math. Pures Appl. **82** (2003), 1137–1190.

[Ta8] K. Taira, *Semigroups, boundary value problems and Markov processes*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2004.

[Ta9] K. Taira, *On the existence of Feller semigroups with discontinuous coefficients*, Acta Mathematica Sinica (English Series) **22** (2006), 595–606.

[Ta10] K. Taira, *Singular integrals and Feller semigroups* (to appear).

[TW] S. Takanobu and S. Watanabe, *On the existence and uniqueness of diffusion processes with Wentzell's boundary conditions*, J. Math. Kyoto Univ. **28** (1988), 71–80.

[Ti] G. Talenti, *Equazioni lineari ellittiche in due variabili*, Matematiche (Catania) **21** (1966), 339–376.

[Tr] M. Taylor, *Pseudodifferential operators*, Princeton University Press, Princeton, 1981.

[Tl] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam New York Oxford, 1978.

[Ws] W. v. Waldenfels, *Positive Halbgruppen auf einem n-dimensionalen Torus*, Archiv der Math. **15** (1964), 191–203.

[Wa] S. Watanabe, *Construction of diffusion processes with Wentzell's boundary conditions by means of Poisson point processes of Brownian excursions*, Probability Theory, Banach Center Publications, Vol. 5, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1979, pp. 255–271.

[We] A.D. Wentzell (Ventcel'), *On boundary conditions for multidimensional diffusion processes* (in Russian), Teoriya Veroyat. i ee Primen. **4** (1959), 172–185; English translation in Theory Prob. and its Appl. **4** (1959), 164–177.

[Yo] K. Yosida, *Functional analysis*, sixth edition, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.