

## 野海・山田系に付随する代数方程式系の解について

青木 貴史 (Takashi AOKI)

近畿大学理工学部

本多 尚文 (Naofumi HONDA)

北海道大学大学院理学研究科

### 序

野海・山田系はアフィン・ワイル群の対称性を持つ非線型微分方程式系として [NY1], [NY2] により与えられた. 本稿ではこれらの方程式を完全 WKB 解析の枠組みで考察するため [T] に従って大きなパラメータ  $\eta$  を導入して若干の書き換えを行った非線型微分方程式系を対象とする. これらの方程式系は次数の偶奇により形が異なる. 偶数次系は次で与えられる (ただし  $m \in \mathbb{N}$  である):

$$(NY)_2 \quad \eta^{-1} \frac{du_j}{dt} = u_j(u_{j+1} - u_{j+2} + \cdots - u_{j+2m}) + \alpha_j$$

( $j = 0, 1, 2, \dots, 2m$ ), ここで  $\alpha_j$  は定数で

$$(1) \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{2m} = \eta^{-1}$$

を満たし, 独立変数  $t$  と未知関数  $u_j$  とは関係式

$$(2) \quad u_0 + u_1 + \cdots + u_{2m} = t$$

を満足すると仮定する. これを正規化条件と呼ぶ. 添字  $j$  は  $2m+1$  を法として考える. すなわち  $u_{j+2m+1} = u_j$  である. 未知関数の個数は  $2m+1$  であるが正規化条件により実質の個数は  $2m$  となる. また, 奇数次系は次で与えられる:

$$(NY)_{2m+1} \quad \eta^{-1} \frac{t}{2} \frac{du_j}{dt} = u_j \sum_{1 \leq r \leq s \leq m} (u_{j-1+2r} u_{j+2s} - u_{j+2r} u_{j+1+2s}) + \frac{t\alpha_j}{2}$$

( $j = 0, 1, 2, \dots, 2m+1$ ), ここで  $\alpha_j$  は定数で

$$(3) \quad \alpha_0 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2m} = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{2m+1} = \frac{\eta^{-1}}{2}$$

を満たし, 独立変数  $t$  と未知関数  $u_j$  とは正規化条件

$$(4) \quad u_0 + u_2 + \cdots + u_{2m} = u_1 + u_3 + \cdots + u_{2m+1} = \frac{t}{2}$$

を満足しているとする。添字  $j$  は  $2m+2$  を法として考える。

$(NY)_l$  の完全 WKB 解析を行う際に出発点となるのは

$$(5) \quad \widehat{u}_j = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{-k} u_{j,k}(t)$$

という展開をもつ形式解である。これらを方程式に代入して  $\eta^0$  の項を見ると主部  $u_{j,0}$  が満たすべき代数方程式系が得られる。偶数次系の場合は

$$(NY)_{2m}^0 \quad \begin{cases} u_j(u_{j+1} - u_{j+2} + \cdots - u_{j+2m}) + \alpha_j = 0 & (0 \leq j \leq 2m), \\ u_0 + u_1 + \cdots + u_{2m} = t \end{cases}$$

となる。ただし、 $u_{j,0}$  を  $u_j$  と、また、 $\alpha_j$  の ( $\eta^{-1}$  についての展開における) 主部を  $\alpha_j$  と略記した (これらの方程式は独立ではない)。同様の略記を行って奇数次系の場合は次の形となる:

$$(NY)_{2m+1}^0 \quad \begin{cases} u_j \sum_{1 \leq r \leq s \leq m} (u_{j-1+2r} u_{j+2s} - u_{j+2r} u_{j+1+2s}) + \frac{t\alpha_j}{2} = 0 & (0 \leq j \leq 2m+1) \\ u_0 + u_2 + \cdots + u_{2m} = u_1 + u_3 + \cdots + u_{2m+1} = \frac{t}{2}. \end{cases}$$

形式解 (5) を構成するためには、まずこれらの代数方程式系を解かなければならない。次数が低い場合に消去法によりこれらの代数方程式系が有限個の解を有する事は容易に確かめられる ([T]). 一般の偶数次数の場合の有限性は [AH] で論じられた。本稿では一歩踏み込んで、奇数次の場合を込めて一般の次数に対する解の個数について得られた結果を報告する。この為に本稿で用いられる幾つかの概念について、以下説明する。

偶数次系、奇数次系どちらの場合も、最初に方程式系  $(NY)_l^0$  ( $l = 2m$  もしくは  $l = 2m+1$ ) の定義する代数多様体  $V_l \subset \mathbb{C}_u^{l+1} \times \mathbb{C}_t$  を問題に応じて適切にコンパクト化する必要がある。WKB 解析の立場から  $\mathbb{C}_u^{l+1} \times \mathbb{C}_t$  を 2つの射影多様体の直積空間  $\mathbb{P}_u^{l+1} \times \mathbb{P}_t$  に埋め込み、 $V_l$  のコンパクト化として  $V_l$  の  $\mathbb{P}_u^{l+1} \times \mathbb{P}_t$  に於ける閉包  $\widehat{V}_l$  を考える。但し、奇数次系の場合は、 $V_l$  の既約成分で  $\{t=0\}$  に含まれその次元が 1 以上であるものが存在するので、 $V_l \setminus \{t=0\}$  の  $\mathbb{P}_u^{l+1} \times \mathbb{P}_t$  に於ける閉包  $\widehat{V}_l$  を考えるものとする。

$t$  変数に関する標準射影を  $p: \mathbb{P}_u^{l+1} \times \mathbb{P}_t \rightarrow \mathbb{P}_t$  とおく。本稿における解の個数とは、 $t \in \mathbb{P}_t$  に対して  $\widehat{V}_l \cap p^{-1}(t)$  の (重複度も考慮した) 点の個数とする。解  $\widehat{u}$  の重複度とは、 $\widehat{V}_l$  と  $p^{-1}(t)$  との  $\widehat{u}$  での局所交差点数とする。特に、 $\widehat{V}_l$  と  $p^{-1}(t)$  とが  $\widehat{u} \in \widehat{V}_l \cap p^{-1}(t)$  で正規横断的交差する場合、解  $\widehat{u}$  の重複度は 1 である。局所交差点数の詳細な定義は [G, p. 62] を参照して欲しい。なお、 $\widehat{V}_l$  の  $\mathbb{P}_u^{l+1} \times \mathbb{P}_t$  におけるホモロジー的性質について詳しい事が判っているが、多少の準備が必要な為、本稿では省略する。

$(NY)_l$  の形式解 (5) の主部が求まったとき、 $k > 0$  に対し  $\{u_{j,k}\}$  を続けて求める為には、ある種の行列式 ( $u$  変数に関するヤコビアン) が消えていない事が必要となる。その行列式  $J_l(u)$

を導入しておこう. 関数  $f_0, \dots, f_l$  を, 偶数次系  $(NY)_{2m}$  の場合は,

$$\begin{aligned} f_j &= u_j(u_{j+1} - u_{j+2} + \dots - u_{j+2m}) + \alpha_j \quad (0 \leq j \leq 2m-1), \\ f_{2m} &= u_0 + u_1 + \dots + u_{2m} - t, \end{aligned}$$

奇数次系  $(NY)_{2m+1}$  の場合は,

$$\begin{aligned} f_j &= u_j \sum_{1 \leq r \leq s \leq m} (u_{j-1+2r} u_{j+2s} - u_{j+2r} u_{j+1+2s}) + \frac{t\alpha_j}{2} \quad (0 \leq j \leq 2m-1), \\ f_{2m} &= u_0 + u_2 + \dots + u_{2m} - \frac{t}{2}, \\ f_{2m+1} &= u_1 + u_3 + \dots + u_{2m+1} - \frac{t}{2} \end{aligned}$$

で定義する.  $f_0, \dots, f_l$  の  $u$  変数に関するヤコビアン  $J_l(u)$  は,

$$J_l(u) = \det \left( \frac{\partial(f_0, f_1, \dots, f_l)}{\partial(u_0, u_1, \dots, u_l)} \right)$$

で定義される. ヤコビアン  $J_l(u)$  は変数  $u$  のみの斉次関数となるので, そのままの形で  $\mathbb{P}_u^{l+1} \times \mathbb{P}_t$  上の divisor と考える事が出来る.  $\mathbb{P}_u^{l+1} \times \mathbb{P}_t$  上の divisor であるから, その値を考える事は無意味であるが,  $J_l(u) = 0$  もしくは  $J_l(u) \neq 0$  は意味をもつ事に注意しておく.  $(u, t) \in \widehat{V}_l \cap (\mathbb{C}_u^{l+1} \times \mathbb{C}_t)$  に対し

$$J_l(u) \neq 0 \iff \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_u^{l+1}}}{(f_0, f_1, \dots, f_l)|_{p^{-1}(t)_u}} \right) = 1$$

である. 以上で準備は終わった.

## 1 偶数次系

偶数次系の形式解主部が満たす代数方程式系  $(NY)_{2m}^0$  を考察する. 条件 (1) よりパラメータ (の主部)  $\alpha_j$  ( $0 \leq j \leq 2m$ ) は総和が消えなければならない. そこでパラメータのなす空間を考え

$$\mathcal{P} = \{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m}) \in \mathbb{C}^{2m+1} \mid \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{2m} = 0\}$$

とおく.

**定理 1.** 任意の  $t \in \mathbb{P}_t$  に対し, 代数方程式系  $(NY)_{2m}^0$  の解の個数は重複度もこめて  $2^{2m}$  である. 特に,  $t \in \mathbb{P}_t \setminus \{\infty\}$  に対して各解  $u$  は  $\mathbb{C}_u^{2m+1}$  に存在する. また, パラメータ空間  $\mathcal{P}$  の一般的な点  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m}) \in \mathcal{P}$  に対し有限集合  $E_\alpha = \{t_0, t_1, \dots, t_l\} \subset \mathbb{C}_t$  が存在し,  $t \in \mathbb{P}_t \setminus E_\alpha$  ならば各解  $u \in \mathbb{P}_u^{2m+1}$  で  $J_{2m}(u) \neq 0$  である.

定理 1 のパラメータ空間の一般的な点とは, ある余次元 1 以上の複素解析的集合  $\mathcal{P}_e \subset \mathcal{P}$  が存在して, 集合  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_e$  の点を意味する事とする. また, 定理の  $E_\alpha$  は WKB 解析に於いて第 1 種変わり点と呼ばれ重要な役割をはたす事が知られている.

**証明の方針.** まず,  $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$  の場合に解の個数を数える. 次に任意の  $\alpha \in \mathcal{P}$  に対し解が有限個である事を示し, 最後に解の個数がパラメータに依存しない事を証明する. 後半部分は [S] の結果を利用する. ここでは初等的に見る事ができる第 1 段階の解説を行う.

以下,  $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$  とする.  $t = 1$  として次の連立方程式系を考える:

$$(6) \quad \begin{cases} u_j(u_{j+1} - u_{j+2} + \dots - u_{j+2m}) = 0 & (0 \leq j \leq 2m-1), \\ u_0 + u_1 + \dots + u_{2m} = 1. \end{cases}$$

ただし,  $(NY)_{2m}^0$  において  $j = 2m$  にあたる式は, 独立ではないので省いた. この特別なパラメータと  $t$  で定まる代数方程式系に対して, 定理の前半の主張及び各解  $u$  で  $J_{2m}(u) \neq 0$  である事を示す. 方程式系の形を見ると解の個数を数える事は容易である. すなわち, (6) の第 1 式より各  $j$  について

$$(7) \quad u_j = 0$$

または

$$(8) \quad u_{j+1} - u_{j+2} + \dots - u_{j+2m} = 0$$

である事は明らかゆえ, これらの選択の場合の数として  $2^{2m}$  が得られる. あとは, どのように選択しても

- (6) の第 2 式と併せて  $\mathbb{C}_u^{2m+1}$  内に (0次元の) 解がある
- (7), (8) が同時には満たされない

の 2 点を確認すればよい. まず, すべての  $j$  について (8) を選択したと仮定すると, (6) の第 2 式と併せて  $u_j$  ( $0 \leq j \leq 2m$ ) に対する連立 1 次方程式系が得られる.  $(-1)^{j+1}u_j$  に関する連立方程式と見て行列で書くと

$$(9) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & & \dots & & \vdots & & \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \dots & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_0 \\ u_1 \\ -u_2 \\ \vdots \\ -u_{2m-2} \\ u_{2m-1} \\ -u_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる. ここで, いくつかの  $j$  ( $0 \leq j \leq 2m-1$ ) に対して (8) ではなく (7) を選ぶと仮定する. (7) を選ぶ添字  $j$  の集合を  $I$  とする. 選ばれた  $j \in I$  については  $u_j = 0$  となり, もはや  $u_j$  は既知である. したがって (9) からすべての  $j \in I$  について第  $j$  行と係数行列の第  $j$  列を除いたものが残りの  $(-1)^{k+1}u_k$  ( $k \notin I$ ) に対する方程式となる. ただし,  $2m \notin I$  に注意する. こ

のようにして得られた方程式の係数行列は次の形である:

$$(10) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & & & \dots & & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ * & * & * & \dots & * & * & -1 \end{pmatrix}.$$

ここで  $* = \pm 1$  である. この行列の行列式は消えない. 実際, 最終列をそれ以外の列すべてに加えると

$$(11) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ \vdots & & & \dots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ * & * & * & \dots & * & * & -1 \end{pmatrix}$$

の形となる. ただし,  $* = 0$  または  $2$  である. この行列の行列式は最終列で展開すると明らかに奇数となり消える事はない. したがって  $u_k$  ( $k \notin I$ ) が一意的に決まる. さらに (7), (8) が同時には満たされ得ない事を見る. たとえば  $j = 0$  について (7), (8) がともに成り立つと仮定する. (6) の第 2 式 (正規化条件) を除いて上の議論と同様の考察をすると,  $(-1)^{k+1}u_k$  ( $k \notin I - \{0\}$ ) に対する方程式の係数行列は

$$(12) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & & \dots & & & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. やはり最終列をそれ以外の列すべてに加えると

$$(13) \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ \vdots & & \dots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

という行列が得られるが、この行列式も最終列で展開すれば奇数である事が判り、結局  $u_0 = u_1 = \dots = u_{2m} = 0$  となる。これは (6) の第 2 式と矛盾する。  $j > 0$  について (7), (8) がともに成り立つ場合も、同じ変形で (11) の最終列、最終行を除いた形のブロックと (13) の形のブロックが対角ブロックとなるブロック上三角行列となるので同様である。

以上から、(6) で定義される  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_u^{2m+1}}$  上のイデアルを  $\mathcal{I}$  とすると、各解  $u$  に対して

$$\dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_u^{2m+1}}}{\mathcal{I}} \right)_u = 1$$

は明らかであろう。よって、 $J_{2m}(u) \neq 0$  である (もちろん、解  $u$  の重複度は 1 である)。  $\square$

**注意.** この節で考えている特別なパラメータ  $t$  とに対しての解の個数の結果を完全なものにするには、 $\widehat{V}_{2m} \cap p^{-1}(t)$  が無限遠に解を持たない事を示さないといけない。この事はこの節の論法を用いる事で容易に示す事が出来るので詳細は省略する。

## 2 奇数次系

奇数次系に対してパラメータ空間は次のように定める:

$$\mathcal{P} = \{ \alpha \in \mathbb{C}^{2m+2} \mid \alpha_0 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m} = 0, \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2m+1} = 0 \}.$$

ただし、 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1})$  である。

**定理 2.** パラメータ空間  $\mathcal{P}$  の一般的な点  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1})$  および任意の  $t \in \mathbb{P}_t$  に対し、代数方程式系  $(NY)_{2m+1}^0$  の解の個数は  $2^{2m+1} - {}_{2m+1}C_{m+1}$  である。特に、 $t \in \mathbb{P}_t - \{0, \infty\}$  に対し、各解  $u$  は  $\mathbb{C}_u^{2m+2}$  に存在する。また、 $\mathcal{P}$  の一般的な点  $\alpha$  に対し有限集合  $E_\alpha = \{0, t_0, t_1, \dots, t_l\} \subset \mathbb{C}_t$  が存在し、 $t \in \mathbb{P}_t \setminus E_\alpha$  ならば各解  $u \in \mathbb{P}_u^{2m+2}$  で  $J_{2m+1}(u) \neq 0$  である。

証明の方針は偶数次系の場合と基本的に同じである。やはり、特別なパラメータ  $t$  の値について解の個数を数える部分について解説する。この場合、方程式系が奇数次系の方が若干複雑である分、込み入った議論が必要となる。

以下、 $\alpha = 0, t = 2$  とする。考察する代数方程式系は

$$(14) \quad \begin{cases} u_j \sum_{1 \leq r \leq s \leq m} (u_{j-1+2r} u_{j+2s} - u_{j+2r} u_{j+1+2s}) = 0 & (0 \leq j \leq 2m+1), \\ u_0 + u_2 + \dots + u_{2m} = 1, \\ u_1 + u_3 + \dots + u_{2m+1} = 1 \end{cases}$$

である。ただし、これらの方程式は独立ではない。しばらくの間、正規化条件 (下 2 つの式) は忘れる。各  $j$  について

$$(15) \quad u_j = 0$$

または

$$(16) \quad \sum_{1 \leq r \leq s \leq m} (u_{j-1+2r} u_{j+2s} - u_{j+2r} u_{j+1+2s}) = 0$$

である。まず、 $j = 0, 2, \dots, 2m$  に対応する (16) の  $m+1$  本の式で定義された代数方程式系を考え、これを  $u_0, u_2, \dots, u_{2m}$  を係数とする  $u_1, u_3, \dots, u_{2m+1}$  に対する方程式と見なす。この方程式は変数変換

$$u_1 = \frac{x_0 + x_m}{2}, u_3 = \frac{x_1 - x_0}{2}, u_5 = \frac{x_2 - x_1}{2}, \dots, u_{2m+1} = \frac{x_m - x_{m-1}}{2}$$

によって次の形に書きかえられる:

$$(17) \quad \begin{pmatrix} u_2 & u_4 & u_6 & u_8 & \dots & u_{2m} & 0 \\ v_1 & -u_4 & -u_6 & -u_8 & \dots & -u_{2m} & w_1 \\ -u_2 & v_2 & -u_6 & -u_8 & \dots & -u_{2m} & w_2 \\ -u_2 & -u_4 & v_3 & -u_8 & \dots & -u_{2m} & w_3 \\ & \vdots & & \dots & & \ddots & \vdots \\ -u_2 & -u_4 & -u_6 & -u_8 & \dots & v_m & w_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0.$$

ただし

$$v_j = \sum_{k \neq j} u_{2k}, \quad w_j = - \sum_{0 < k < j} u_{2k} + \sum_{j < k} u_{2k}$$

とおいた。第 1 行を他の各行に加えると  $v = \sum_{k=0}^m u_{2k}$  とおくと

$$(18) \quad \begin{pmatrix} u_2 & u_4 & u_6 & u_8 & \dots & u_{2m} & 0 \\ v & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & w_1 \\ 0 & v & 0 & 0 & \dots & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & v & 0 & \dots & 0 & w_3 \\ & \vdots & & \dots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & v & w_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0$$

を得る。この左辺の行列のランクは  $v \neq 0$  であるから明らかに  $m$  以上であり、自明な恒等式

$$\sum_{k=1}^m u_{2k} w_k = 0$$

が成立するのでランクは  $m$  である。(14) の第 2 式, 第 3 式 (正規化条件) を考え併せると元の未知数  $u_{2j+1}$  に戻って

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{x_0 + x_m}{2} = \frac{u_0 + u_2}{2}, \\ u_3 &= \frac{x_1 - x_0}{2} = \frac{u_2 + u_4}{2}, \\ u_5 &= \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{u_4 + u_6}{2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$u_{2m+1} = \frac{x_m - x_{m-1}}{2} = \frac{u_{2m} + u_0}{2}$$

を得る。以上の考察から、いくつかの偶数  $j$  について (16) のかわりに (15) を選んだ場合を含むすべての解を表示するには

$$u_0 \xi_0 = u_2 \xi_2 = \cdots = u_{2m} \xi_{2m} = 0$$

を満たすパラメータ  $\xi_0, \xi_2, \dots, \xi_{2m}$  を導入すると良い。このときすべての解は、導入したパラメータを用いて

$$(19) \quad u_{2k+1} = \frac{1}{2} (u_{2k} + u_{2k+2} + \xi_{2k+2} - \xi_{2k}) \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

と書ける。ただし、添字は  $2m+2$  を法として考える。正規化条件と関連した関係式

$$u_0 + u_2 + \cdots + u_{2m} = u_1 + u_3 + \cdots + u_{2m+1}$$

が成り立つように解いてる事を覚えておく。(19) を (14) の第 1 式の  $j = 1, 3, \dots, 2m+1$  に対応する式に代入する。ただし、一つは独立でない事に注意する。多少の式変形ののち、 $j = 0, 1, \dots, m$  に対して

$$(20) \quad ((u_{2j} - \xi_{2j}) + (u_{2j+2} + \xi_{2j+2})) ((u_{2j} - \xi_{2j}) - (u_{2j+2} + \xi_{2j+2})) = 0$$

という式が得られる。これは積の形であるから独立でないもの一つ、たとえば  $j = m$  を除いて  $j = 0, 1, \dots, m-1$  について

$$(u_{2j} - \xi_{2j}) + (u_{2j+2} + \xi_{2j+2}) = 0$$

または

$$(u_{2j} - \xi_{2j}) - (u_{2j+2} + \xi_{2j+2}) = 0$$

の可能性がある。この選択の場合の数は  $2^m$  である。それぞれの場合について  $j = 0, 1, \dots, m$  に対して  $u_{2j}$  か  $\xi_{2j}$  のどちらをパラメータとして残すかの選択が  $2^{m+1}$  通りある。あわせて場合の数は  $2^{2m+1}$  となる。各場合について、たとえば  $u_0 - \xi_0 = \pm\lambda$  とおき、正規化条件を考慮に入れて  $\lambda$  を決め解を得たいのであるが、正規化条件と矛盾する場合は除いておかなければならない。各  $u_{2j}, \xi_{2j}$  の一方だけが生き残り、他方は消えているので上の式を見れば明らかにそれぞれの  $j$  について

$$u_{2j} = \pm\lambda, \xi_{2j} = 0$$

または

$$u_{2j} = 0, \xi_{2j} = \pm\lambda$$

のいずれか一方が成り立っている。したがって、偶数個 ( $2k$  個とする) の  $u_{2j}$  を選択し ( ${}_{2m+1}C_{2k}$  通りの場合の数) そのうち  $k$  個の  $u_{2j}$  について  $u_{2j} = \lambda$ , 残りの  $k$  個について  $u_{2j} = -\lambda$  を選んだ場合 ( ${}_{2k}C_k$  通り) は  $\sum u_{2j} = 0$  となり、正規化条件に反する。このような場合それぞれについて  $\xi_j = \pm\lambda$  は  $2m+1-2k$  個選ばれているが、 $\lambda$  の符号の選び方はあわせて  $2^{2m+1-2k}$  通りある。これらの場合の数を掛けたものを  $k$  について加えたものが正規化条件に反する場合とな



る。ただし、以上の議論は  $\lambda$  の符号の入れ替えについて対称なので半分にしておく必要がある。  
したがって解の個数は

$$2^{2m+1} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} {}_{2m+1}C_{2k} {}_{2k}C_k 2^{2m+1-2k}$$

となる。ここで次の補題を用いると定理に現れる解の個数の式が出る。

**補題.** 各  $m = 0, 1, 2, \dots$  に対して次が成り立つ:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} {}_m C_{2k} {}_{2k} C_k 2^{m-2k} = {}_{2m} C_m.$$

この補題はよく知られた等式

$$(1 - 4x)^{-1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} {}_{2m} C_m x^m$$

を用いれば容易に証明できる。

最後に、 $\mathcal{J}$  を正則関数層  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_u^{2m+2}}$  上の (14) の全ての式で定義されたイデアルとしたとき、各解  $\hat{u} \in \mathbb{C}_u^{2m+2}$  に対して、

$$\dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_u^{2m+2}}}{\mathcal{J}} \right)_{\hat{u}} = 1$$

である事、特に解の重複度が 1 である事を示そう。まず、このようにして得られた解が全て相異なっている事は容易に判る。変数

$$(u_0, u_2, \dots, u_{2m}, \xi_0, \xi_2, \dots, \xi_{2m})$$

を持つ空間  $\mathbb{C}_{u', \xi}^{2m+2}$  から  $\mathbb{C}_u^{2m+2}$  への線形写像  $\Phi$  を (19) で定義する。  $\mathbb{C}_{u', \xi}^{2m+2}$  の解析的集合  $H$  を

$$\xi_0 u_0 = \xi_2 u_2 = \dots = \xi_{2m} u_{2m} = 0, \quad u_0 + u_2 + \dots + u_{2m} = 1$$

で定義し、これらの方程式で定義されるイデアルを  $\mathcal{J}_H$  とする。また、  $\mathbb{C}_u^{2m+2}$  の解析的集合  $W$  を (14) の第 1 式の  $j = 0, 2, \dots, 2m$  に対応する式と 2 つの正規化条件式で定義された集合とし、これらの方程式で定義されたイデアルを  $\mathcal{J}_W$  とする。この時、構成法から以下の事実が従う。

- $\Phi|_H: H \rightarrow W$  は  $\hat{p} = \Phi|_H^{-1}(\hat{u})$  の近傍で同型であり、  $W$  は  $\hat{u}$  の近傍で滑らかである。
- 次の環の同型が成立する。

$$\mathcal{O}_{W, \hat{u}} \cong \left( \frac{\mathcal{O}}{\mathcal{J}_W} \right)_{\hat{u}} \stackrel{\Phi^*}{\cong} \left( \frac{\mathcal{O}}{\mathcal{J}_H} \right)_{\hat{p}} \cong \mathcal{O}_{H, \hat{p}}$$

ここで、  $\mathcal{O}_H$  及び  $\mathcal{O}_W$  は  $H$  及び  $W$  上の (複素解析的集合としての) 構造層とする。

よって,

$$\left(\frac{\mathcal{O}}{\mathcal{I}}\right)_{\hat{u}} \cong \left(\frac{\mathcal{O}_W}{\mathcal{I}|_W}\right)_{\hat{u}} \stackrel{\Phi|_H^*}{\cong} \left(\frac{\mathcal{O}_H}{\Phi^*(\mathcal{I})|_H}\right)_{\hat{p}} \cong \left(\frac{\mathcal{O}}{\mathcal{I}}\right)_{\hat{p}}.$$

ここでイデアル  $\mathcal{I}$  は

$$\mathcal{I} = (\Phi^*(\mathcal{I}), \xi_0 u_0, \xi_2 u_2, \dots, \xi_{2m} u_{2m})$$

である. 明らかに  $\mathcal{I}$  は (20) で定義された式を含み, それらの式は  $\hat{p}$  の近傍で 1 次式と同値である. よって,  $\mathcal{I}_{\hat{p}}$  は  $\hat{p}$  を解とするような  $2m+2$  本の 1 次独立な 1 次式を含み  $\mathcal{O}_{\hat{p}}$  の極大イデアルとなる.

**注意.** この節で考えている特別なパラメータと  $t$  に対しての解の個数の結果を完全なものにするには,  $\widehat{V}_{2m+1} \cap p^{-1}(t)$  が無限遠に解を持たない事を示さなければならない. この事を示すには, この節の手法とは異なる新たな幾つかの工夫が必要となる. 詳細は別の機会に譲る.

## 参考文献

- [AH] T. Aoki and N. Honda, Regular sequences associated with the Noumi-Yamada equations with a large parameter, to appear.
- [G] P. Griffiths and J. Harris, Principles of algebraic geometry, Pure and applied mathematics, Wiley-interscience Publ., 1978.
- [NY1] M. Noumi and Y. Yamada, Higher order Painlevé equations of type  $A_t^{(1)}$ , *Funkcial Ekvac.* **41** (1998), 245-260.
- [NY2] ———, Symmetry in Painlevé equations, in: C. J. Howls, T. Kawai and Y. Takei eds., *Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear*, Kyoto Univ. Press, 2000, pp. 245-260.
- [S] T. Suwa, Dual class of a subvariety, *Tokyo J. Math.* **23** (2000), 51-68.
- [T] Y. Takei, Toward the exact WKB analysis for higher-order Painlevé equations — The case of Noumi-Yamada Systems —, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **40** (2004), 709-730.