数理解析研究所講究録
第 1648 巻 2009 年 1-16

WKB analysis of higher order Painlevé equations with a large parameter — Local reduction of 0-parameter solutions for Painlevé hierarchies $(P_J)(J = \mathrm{I}, \mathrm{II}\text{-}1, \mathrm{II}\text{-}2 \text{ or } \mathrm{IV})$

—小松彦三郎先生の古稀を祝して—

京都大学数理解析研究所　河合 隆裕　(KAWAI, Takahiro)
京都大学数理解析研究所　竹井 義次　(TAKEI, Yoshitsugu)

本報文では或る種の高階パンルヴェ方程式の解の構造を論じる。議論は超関数とは余り関係が無く、又、対象とするものも直接的には「線型微分方程式」ではない。従って何故このようなテーマを「超関数と線型微分方程式 2006」と題する研究集会での講演材料として取り上げたのか、と云う釈明から本稿を始めねばなるまい。その為に、「超函数と線型微分方程式 1967」とでも謂うべき、筆者の一人（河合）の思い出話をまず記したい。

「私が自分の研究方向を摸索していた4年生の春、小松（彦三郎）先生の“佐藤超函数と定数係数線型偏微分方程式”（だったと思う）と題する講演（日本数学会年会特別講演；昭和 42 年 5 月 13 日 於 東京都立大学）に巡り合ったのは本当に幸運だった。その講演は気魄のこもった素晴らしい物で、私等 enchanted を通り越して stupefied とでも謂うべき状態に 30 分間程陥ってしまった程であった。この研究集会（平成 18 年 3 月 7 日 於 数理解析研究所）で青木貴史さんが触れられたように、或いはそれを邪宗門へと若者を誘う悪魔の奏でる竪琴の音と聞く向きもあったかも知れぬ。さもあらばあれ、私はこの講演に巡り合せたことを自分の一生の内で最も大きな幸運の一つと今に感謝している。」（平成 18 年 3 月 9 日の“小松先生の古稀をお祝いする会”での河合の発言由り。）

その講演がどんなものだったかを示す為に次頁以降に河合のノートのコピーを載せておく。Hyperfunctions の定義に始まり、微分方程式の過剰決定系の理論がどのように数学の他分野に影響を与えるか迄論じた極めて高度な、しかも完成度の高い講演であることを読み取って頂けることと思う。

Distribution の拡張.

1
2 — Sobolev ×
3
4. soft sheaf. } Mikusinski ×.

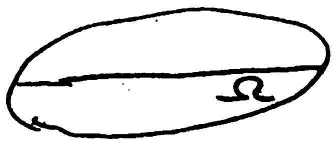
Schwartz : 1〜4 をもつ最小の拡

Gelfand-Silov ~~⋯~~ $\mathcal{S}'$ の拡張,
Ehrenpreis. Holomorphic の dual.
Martineau 3. 4 out.

$$\mathcal{E}_M(\Omega) = \{ f \in C^\infty(\Omega) ; \| \nabla^p f \|_K \leq C^{p+1} M_p \}$$

e.g. $M_p = 1/p!$: real analytic
$p!$
Roumieu ('61) }
Björck ('66) } Carleman-Denjoy

Sato : funct. sp. の dual. というところ考えでは
~~analt~~ $\mathcal{D}'$ の拡張はできぬ



V $\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{O}(V - \Omega) / \mathcal{O}(V)$

holomorphic f. の sheaf.

この equiv. class hyper f.

$$[\varphi] = \lim_{\varepsilon \to 0} [\varphi(x+i\varepsilon) - \varphi(x-i\varepsilon)]$$

i.e. 1) $\mathcal{B} \supset C_0^\infty$ ~~の top. ×~~ 2) $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ module
4) soft sheaf

実は flabby sheaf. (i.e. open set の上で def. されたものを接続可)
in def. では

2次元以上では、もちろん

$\mathcal{B} = \{0\}$ となってしまう

そこで Im. part. をとってやるのは？
(Coordinate free としたい)

その証明に relative cohomology

$\mathcal{B}(\Omega) = H^1(V, V-\Omega, \mathcal{O})$ が一番の性質 成立
$\qquad\qquad\quad \| \quad H^1_\Omega(V, \mathcal{O})$

そこで

$\mathcal{B}(\Omega) = H^n_\Omega(V, \mathcal{O})$

$\mathcal{F}$: sheaf of (x, D) module

$P = P(x, D)$ $r_1 \times r_0$ matrix

$0 \to \mathcal{F}^P \to \mathcal{F}^{r_0} \xrightarrow{P} \mathcal{F}^{r_1}$

solution のつくる sheaf

$\mathcal{F}^P(\Omega) \longrightarrow \mathcal{F}^P(\Omega - K)$
(restriction)

その ker $= 0 \Leftrightarrow$ 一意接続

cok $= 0 \Leftrightarrow$ 接続可

$\mathcal{G}$ sheaf.

$$0 \to H^0_K(\Omega, \mathcal{G}) \to \mathcal{G}(\Omega) \to \mathcal{G}(\Omega - K)$$

$$\to H^1_K(\Omega, \mathcal{G}) \to H^1(\Omega, \mathcal{G}) \text{ exact.}$$

$$\to H^1(\Omega - K, \mathcal{G}) \to$$

ゼロになっている なる

$= 0 \iff$ 接続可

Const. coeff.

Th. 1. $\exists P_1(D), \cdots, P_m(D)$ $m < n$

Ω: connex open. $\subset \mathbb{R}^n$

$$0 \to \mathcal{F}^P(\Omega) \to \mathcal{F}(\Omega)^{r_0} \xrightarrow{P} \mathcal{F}(\Omega)^{r_1} \xrightarrow{P_1} \cdots \xrightarrow{P_{m-1}} \mathcal{F}(\Omega)^{r_m} \to 0$$

$\mathcal{F} = \mathcal{B}, \mathcal{D}', \mathcal{E}, \mathcal{O}, (\mathcal{O}\mathcal{Z})$

Th. 2. $P(D)$ elliptic $\Leftarrow \mathcal{E}^P = \mathcal{O}\mathcal{Z}^P$ (Hör.)

難しい dual form $\to \mathcal{B}^P = \mathcal{O}\mathcal{Z}^P$

(local に finite なら or $\mathcal{B}^P = \mathcal{D}'^P$

(order でない事)

Extension の可能性による。

Cor $0 \to \mathcal{F}^P \to \mathcal{F}^{r_0} \to \cdots \to \mathcal{F}^{r_m} \to 0$ exact

Cor P elliptic

$$0 \to \mathcal{O}\mathcal{Z}^P \to \mathcal{B}^{r_0} \to \cdots \to \mathcal{B}^{r_m} \to 0$$

($\mathcal{B}^0 = \mathcal{O}\mathcal{Z}^P$)

flabby resolution!

[従って $\forall\Omega$ は P が elliptic なら
$P(D)$-convex ($\forall\mathcal{F}$.) w.r.t analytic 汎関数
特に Cauchy–Riemann の場合
$r_m = n$.

$H^{n+1}_{\Phi}(V, \mathcal{O}) = 0$ (Malgrange)

P(D) single elliptic.
$P'(D) = P(-D)$ $K \subset\subset \Omega$ compact.

$H^1_K(\Omega, \mathcal{F}^P)$ $\mathbb{R}^n$ とにとれ

$0 \to \mathcal{O}^P \to \mathcal{B} \xrightarrow{P(D)} \mathcal{B} \to 0$

$0 \to \Gamma_K(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}) \xrightarrow{P(D)} \Gamma_K(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}) \to 0$

i.e. $\mathbb{R}^n$ 上の hyper f. かつ supp compact

実は analytic の dual.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \leftarrow & \mathcal{O} & \leftarrow & \mathcal{O} & \leftarrow & \mathcal{O}^{P} \leftarrow 0 \\ 0 \to & & \Gamma_K(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}) & \to & \Gamma_K(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}) & \to & 0 \\ & & \updownarrow \text{dual} & & \updownarrow & & \\ 0 & \leftarrow & \mathcal{O}(K) & \xleftarrow{P(D)} & \mathcal{O}(K) & \leftarrow & 0 \end{array}$$

よって Fréchet ⇒
exact.
よって range closed
closed range th. により Fréchet
(∵ Fréchet / Fréchet)

よって Γ_K の cohomologie と $\mathcal{O}(K)$ の cohomology 双対性（の dual）

$$H^1_K(\mathbb{R}^N, \mathcal{F}^p) \overset{=}{\Longleftrightarrow} (\mathcal{O}^p(K))'$$

$$\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^n - K) / \mathcal{O}^p(\mathbb{R}^n)$$

$\cdots$ Köthe - Grothendieck の duality

Th. (Martineau)

K: nice (range closed. となればよい。たとえば K convex)

$\overline{\partial}$. $H^p_K(\mathbb{C}^n, \Omega) \xleftrightarrow[\text{dual.}]{} H^{n-p}(K, \mathcal{O})$

Th. (Alexander Pontrjagin)

K: nice compact.

$$H^p_K(\Omega, \mathbb{C}) \longleftrightarrow H^{n-p}(K, \mathbb{C})$$

Cor. (Jordan-Brouwer)

$K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$ compact $\quad b^{n-1} = \dim H^{n-1}(K, \mathbb{C}) \leq \aleph_0$

$\Rightarrow$ # of conn. component of $\Omega - K = b^{n-1} + \#$ ___ of Ω

$H^{r}_{K}(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}^p) = 0$ となるのは?

たとえば K = convex の時

Th K rel. compact.

$H^0_K(\mathbb{R}^n, {}^{V}\mathcal{F}^p) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{E}xt^0(M, \mathbb{C}[x]) = 0$

$\mathbb{C}[x]^{r_1} \xrightarrow{{}^tP(x)} \mathbb{C}[x]^{r_0} \longrightarrow M \longrightarrow 0.$

Th. $p \geq 1$. K convex compact.

$H^p_K(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^p) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}xt^p(M, \mathbb{C}[x]) = 0$

C^∞ ではダメ

K convex, open relatively comp.

$\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$ の時 [illegible]

(証明は Fourier 変換

K ~~hypp~~ subcomp. の時 面白い。

K:

可[illegible]問題 の case. $\mathbb{C}^s \times \mathbb{R}^n$.

$H^p_{K \cap V}(V, \mathcal{O}) = 0$ $p < n-s$.

$p = 1$ なら. 接続可.

K: real analytic sub m.n.f of real ~~dim 2~~ codim2

$\mathbb{C}^{n-1}$, $\underbrace{\mathbb{C}^{n-2}\times\mathbb{R}^2}$

$\delta=2 \quad \downarrow$

ならこれをこえて拡~~張~~できる。

($\mathbb{C}^{n-2}$, classic)

さて、時代の制約からこの講演で具体的に取扱われているのは定数係数の場合のみであるが、当然 変数係数の過剰決定系も我々の考察対象である。そして、正に我々がこの報文で取扱う非線型微分方程式とはそのような線型過剰決定系の両立条件として現われるものなのである。従って、我々が、今回の報告の prototype とも謂うべき [KT1] を小松先生の還暦のお祝いとして献呈したのは自然であり、又、今回の報告が一見シンポジウムの表題とずれているかに見えても決してそうではないことを理解して頂けよう。

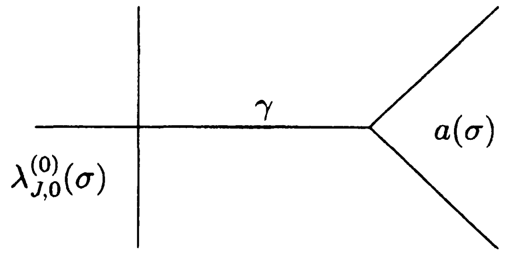
さて、このような文脈に於て言えば我々としては [KT1] は掛け値なしに自信作であった：非線型微分方程式の構造論をその背後にある線型微分方程式の変換論を用いて行う、と云うその方法論の新しさと、そこで得られた結果の意外さ（任意の Painlevé 方程式の 0-パラメタ解は変わり点の近くでは I 型 Painlevé 方程式の 0-パラメタ解に変換される）の故にである。ただ [KT1] の発表時から、我々自身かすかな引け目を感じていたことも事実である：我々は [KT1] の議論が極めて強力かつ汎用性のあるものと確信していた。しかし、Painlevé 方程式はたった 6 種類しか無いではないか、と云う一種の髀肉の嘆である。その「引け目」を一掃することが出来たのが [KT2]、即ち本稿の詳細を与えた論文である。そこでは、対象となる方程式が一気に無限個となって、[KT1] の議論の汎用性を明確に示し得たのである。では、[KT1] の議論とはどのような物であったか、それを簡単に振り返ってみよう。

我々は 2 階 Schrödinger 型方程式 (SL_J) $(J = \mathrm{I}, \mathrm{II} \cdots \mathrm{VI})$ とその変形方程式 (D_J) の対（pair）から出発する。この 2 つの方程式の両立条件として Painlevé 方程式 (P_J) が得られ、(P_J) の 0-パラメタ解と呼ばれる特別な解 $\lambda_J^{(0)}$ （及び $\nu_J^{(0)}$）を (SL_J) に代入すると、$\lambda_J^{(0)}$ の最高次（$= 0$ 次）部分 $\lambda_{J,0}^{(0)}$ は (SL_J) の 2 重変わり点を与え、しかもそこで (SL_J) の係数が極を持つにも拘らず、(SL_J) と (D_J) との interplay に拠り、(SL_J) の WKB 解 $\exp(\int^x S dx)$ は

$$\text{(A)} \qquad S_{\mathrm{odd}} = \sum_{j \geq 0} S_{2j-1}\eta^{1-2j} \text{ に於て各 } S_{2j-1}(x,t) \text{ は } x = \lambda_{J,0}^{(0)}(t) \text{ で正則になる}$$

と云う際立った性質を持つ。（[KT1, §1]）さらに (P_J) の（単純）変わり点 τ から出る (P_J) の Stokes 曲線上の点 $\sigma(0 < |\sigma - \tau| \ll 1)$ に対し (SL_J) の或る単純変わり点 $x = a(\sigma)$ と $x = \lambda_{J,0}^{(0)}(\sigma)$ は (SL_J) の Stokes 曲線 γ で結ばれる。（下図参照）

図 1.



この時線分γの近傍Uと点$t=\sigma$の近傍Vに於て(SL_J)を(SL_{I})にWKB的に変換することが出来る。この変換は$x=\lambda_{J,0}^{(0)}(\sigma)$の近傍で、或いは$x=a(\sigma)$の近傍では各々容易に構成できるが$\gamma$の近傍全体で構成するには所謂matching conditionが必要となる。その条件が実はt変数の変換を与え、(SL_J)と(SL_{I})の間の変換と両々相俟って、(P_J)の0-パラメタ解と(P_{I})の0-パラメタ解が互いに移り変わるのである。([KT1, §2])

この議論の構造は、(SL_J)の具体的な形は（表面的には）殆んど使ってないから、然るべき"高階Painlevé方程式"さえ見付かれば[KT1]の対象は大きく拡がると期待して、まず出会したのがLin-Sibuya ([LS])と野海・山田両氏のお仕事([NY])であった。前者は面白そうな非線型方程式が得られているのだが、WKB解析に適した大きなパラメタの入れ方がどうも見つかりそうになく、その意味でまず野海・山田系の解析を試みた所、これは中々手強い。お蔭で高階線型微分方程式の完全WKB解析に対する良いmotivationが与えられ佐々木・本多両氏のお仕事([Sa1],[Sa2],[H])が生まれ、我々の仮想的変わり点に関する知見は随分深まった([AKSST])けれど[KT1]の拡張、と云う方向では未だ解析が十分には進んでいない。後知恵で言えばLiu, 川向両氏のお仕事([L],[Ka])にもっと注意を払うべきだったと考えるけれど、多分[LS]を[KT1]の枠組にうまく取込めなかったと云うことが心理的障害になっていたように思う。我々にとってのprovidential windはJoshi教授のRIMS長期滞在（2000年秋）であった。そこでJoshi教授がその頃丁度Gordoa, Pickering両氏と行ってみえた共同研究([GJP])を紹介して下さったのだが、これが正にピッタリと[KT1]の枠組に収まったのである。丁度同じ頃下村氏のお仕事([S])にも接して、([KT1]の拡張と云う以上に高階特有の幾何学的状況を論じた仕事([KKNT])と並行して）[KT1]の続編[KT2]が完成したと云う次第である。その表題の(P_J)の内$J=\mathrm{I}$は[S]に於て、$J=\mathrm{II}-2$は[GJP]に於て、それぞれ導入された物である。以下では[KT2]で触れなかった$J=\mathrm{IV}$の場合の議論の概略を紹介する。

一般に(P_J)-階層 $(J=\mathrm{I},\ \mathrm{II}-1,\ \mathrm{II}-2,\ \mathrm{IV})$ の各方程式$(P_J)_m$ $(m=$

$1, 2, \ldots$) は次の形の線型微分方程式系 (Lax pair)

$$(1)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \eta A\right)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = 0 & (1.a)\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \eta B\right)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = 0 & (1.b)\end{cases}$$

の両立条件として与えられる。特に $J = \mathrm{IV}$ の場合、小池 ([K1], [K2]) の記号を用いて、行列 A, B は次の形に表される。

$$(2)\qquad A = \frac{1}{2gx}\begin{pmatrix} -(2x-u)I - \eta^{-1}\partial_t I & 2I \\ -2vI - 2\eta^{-1}\partial_t J & (2x-u)I + \eta^{-1}\partial_t I \end{pmatrix},$$

$$(3)\qquad B = \begin{pmatrix} -x + \dfrac{1}{2}u & 1 \\ -v & x - \dfrac{1}{2}u \end{pmatrix}.$$

ここで、η は通常通り大きなパラメタ、g は (x, t) に依らない定数、$u = u(t, \eta)$ と $v = v(t, \eta)$ は、その具体形は後述 (9) に拠って与えられる非線型方程式 $(P_{\mathrm{IV}})_m$ の未知函数であり、(I, J) は以下に与える (u, v) の微分多項式 $(K_l, L_l)_{0 \le l \le m}$ に依り定まる (u, v) の微分多項式 $(I_j, J_j)_{0 \le j \le m}$ を係数とする x の m 次多項式、即ち

$$(4)\qquad I = \sum_{j=0}^{m} x^{m-j} I_j + gt,$$

$$(5)\qquad J = \sum_{j=0}^{m} x^{m-j} J_j,$$

とする。

(K_l, L_l) の決定式

$$(6)\qquad \begin{cases} K_{l+1} = & \dfrac{1}{2}(uK_l + 2L_l - \eta^{-1}\partial_t K_l) \\ L_{l+1} = & \dfrac{1}{4}(\displaystyle\sum_{j=0}^{l} vK_{l-j}K_j - L_{l-j}L_j + \eta^{-1}K_{l-j}\partial_t L_j),\ (l \ge 0) \end{cases}$$

但し

$$(7)\qquad \begin{cases} K_0 = & 2 \\ L_0 = & 0 \end{cases}$$

(I_l, J_l) の定義.

$$(8)\qquad \begin{pmatrix} I_l \\ J_l \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{l} c_j \begin{pmatrix} K_{l-j} \\ L_{l-j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_l \\ L_l \end{pmatrix}, \quad (l \geq 0)$$

但し、c_j $(1 \leq j \leq m)$ は (x, t) に依らない定数。

これ等の記号を用いて (1) の両立条件、即ち $(P_{\rm IV})_m$ は、適当な（(x, t) に依らない）定数 (κ, θ) を用いて

$$(9)\qquad \begin{cases} \eta^{-1}\partial_t I_m = & 2J_m + uI_m - 2\kappa + g\eta^{-1} \\ \eta^{-1}\partial_t J_m = & I_m^{-1}[-vI_m^2 + (J_m - \kappa + \frac{1}{2}\eta^{-1}g)^2 + \frac{1}{4}\theta^2]. \end{cases}$$

注意 1. ここで与えた $(P_{\rm IV})$-階層は [GJP] で与えられた $(P_{\rm IV})$ 階層に、WKB 解析に適した形で大きなパラメタ η を導入して得られたものである。([N], [K2])

さて、以下の計算のポイントを明らかにする為に

$$(10)\qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

と略記する。この時 (1.a) 由り ψ_1 の満たす方程式として

$$(11)\qquad \frac{d^2\psi_1}{dx^2} - \frac{b_x}{b}\frac{d\psi_1}{dx} - \{\eta^2(a^2 + bc) + \eta(a_x - \frac{ab_x}{b})\}\psi_1 = 0$$

を得る。同時に (1.b) から得られる

$$(12)\qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial t} = \eta(-x + \frac{1}{2}u)\psi_1 + \eta\,\psi_2$$

を (1.a) の第 1 行に代入すれば

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x} = \eta a\psi_1 + b(\frac{\partial\psi_1}{\partial t} - \eta(-x+\frac{1}{2}u)\psi_1) \tag{13}$$

が得られる。ここで (11) を Schrödinger 型にする為

$$\psi = \exp\left(\frac{1}{2}\int^x \left(\frac{-b_x}{b}\right)dx\right)\psi_1 = b^{-1/2}\psi_1 \tag{14}$$

と云う変換を考えれば (11) は次の形になる:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \eta^2 Q\psi, \tag{15}$$

但し

$$Q = a^2 + bc - \eta^{-1}\left(a_x - \frac{ab_x}{b}\right) + \eta^{-2}\left(\frac{3{b_x}^2}{4b^2} - \frac{b_{xx}}{2b}\right). \tag{16}$$

以下、これが [KT1] の (SL_J) の対応物であり、それが $(P_{\mathrm{IV}})_m$ の下で或る変形方程式 $(D_{\mathrm{IV}})_m$ と両立することを示す。そのような変形方程式を具体的に求める為、(14) を (13) に代入する:

$$\frac{\partial}{\partial x}(b^{1/2}\psi) = b\frac{\partial}{\partial t}(b^{1/2}\psi) + \eta\, b^{1/2}(a - b(-x+\frac{1}{2}u))\psi, \tag{17}$$

即ち

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{b}\,\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{1}{2}\,\frac{b_x}{b^2}\psi - b^{-1}(\frac{1}{2}b_t + \eta(a + b(x - \frac{1}{2}u)))\psi. \tag{18}$$

ここで

$$a = \frac{1}{2gx}((-2x+u)I - \eta^{-1}I_t) \tag{19}$$

$$b = \frac{2I}{2gx} \tag{20}$$

を代入すれば (18) の右辺第 3 項は $((P_{\mathrm{IV}})_m$ の下で)

$$\frac{1}{I}\;(\frac{1}{2}I_t + \frac{1}{2}\eta((-2x+u)I - \eta^{-1}I_t) + \eta I(x - \frac{1}{2}u))\psi = 0 \tag{21}$$

となるから (18) は

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{gx}{I}\,\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{gx}{I}\right)_x\psi \tag{22}$$

となり、従って [KT2] の記号を用いて

$$\mathfrak{a}_{(\mathrm{IV},m)} = \frac{gx}{I} \tag{23}$$

と選ぶことに拠り (15) と両立する変形方程式が得られる。

注意 2. [K1] では、始め A の定義として

(2′)

$$A = \frac{1}{2gx}\begin{pmatrix} -(2x-u)I - \eta^{-1}\partial_t I + \Delta_1 & 2I \\ -2vI - 2\eta^{-1}\partial_t J + 2\Delta_2/I_m & (2x-u)I + \eta^{-1}\partial_t I - \Delta_1 \end{pmatrix}$$

を採用して、両立条件から $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ を出し、その具体形が $(P_{\mathrm{IV}})_m$ になる、と云う計算を行っている。この流れに沿って議論を行うと (21) の両辺には

$$\frac{\eta}{2I}\Delta_1\psi \tag{24}$$

が加わり、「$(P_{\mathrm{IV}})_m$ の仮定の下で (15) と (23) が両立する」と云う論理構造がはっきりする。ここでは [KT2] にできるだけ近い形で議論を進める為に $(P_{\mathrm{IV}})_m$ を最初から取り込んだ形で計算を行った。

ここで (22) を変形方程式 $(D_{\mathrm{IV}})_m$ として選べば、$(P_{\mathrm{IV}})_m$ の 0-パラメタ解 $(\hat{u},\hat{v})$ を Q に代入すれば、Q の最高次 (即ち 0 次) 部分 Q_0 は

$$-((2x-\hat{u})I)^2 + 4\hat{v}I^2 = (4\hat{v} - (2x-\hat{u})^2)I^2 \tag{25}$$

の 0 次部分となり、$(D_{\mathrm{IV}})_m$ の係数の極は (15) の 2 重変わり点と一致することになり、[KT2, §2] の議論は (15) と $(D_{\mathrm{IV}})_m$ の対に対してそのままの形で成り立つ。即ち (15) の WKB 解 $\exp(\int^x S dx)$ に対し、S_{odd} は (15) の 2 重変わり点の近傍で (η に就ての各次数毎に) 正則となり、[KT1] の議論は (15) と $(D_{\mathrm{IV}})_m$ の対に対してそのまま適用できることが判る。即ち $(P_{\mathrm{IV}})_m$ の 0-パラメタ解 (u,v) から $I(x,u,v,t,\eta)\,|_{x=\lambda} = 0$ により定まる $\lambda = \lambda(t,\eta)$ は、$(P_{\mathrm{IV}})_m$ の第 1 種変わり点 (定義に就ては [KKNT] 参照) の近くで (P_{I}) の 0-パラメタ解に変換できる。しかも、上で方程式 $I(\lambda,u,v,t,\eta) = 0$ の解として ((u,v) の代りに) 導入した λ が、実は或る退化 Garnier 系の解になると云う極めて印象的な結果が小池 ([K2]) によって得られたのでこの「変換定理」は高階 Painlevé 方程式の解に対する接続公式の確立にとって重要な道具になることにもどうやら確信が持てたように思う。

参考文献

[AKSST] T. Aoki, T. Kawai, S. Sasaki, A. Shudo and Y. Takei: Virtual turning points and bifurcation of Stokes curves for higher order ordinary differential equations. J. Phys., **A38** (2005), 3317-3336.

[GJP] P. B. Gordoa, N. Joshi and A. Pickering: On a generalized 2+1 dispersive water wave hierarchy. Publ. RIMS, **37** (2001), 327-347.

[H] N. Honda: This proceedings.

[KKNT] T. Kawai, T. Koike, Y. Nishikawa and Y. Takei: On the Stokes geometry of higher order Painlevé equations. Astérisque, No. 297, pp. 79-116, 2004.

[KT1] T. Kawai and Y. Takei: WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. I. Adv. in Math., **118** (1996), 1-33.

[KT2] ———: WKB analysis of higher order Painlevé equations with a large parameter – Local reduction of 0-parameter solutions for Painlevé hierarchies (P_J) (J = I, II-1 or II-2). Adv. in Math., in press (online version is now available).

[Ka] H. Kawamuko: On the holonomic deformation of linear differential equations with a regular singular point and an irregular singular point. Kyushu J. Math., **57** (2003), 1-28.

[K1] T.Koike: P_{IV} hierarchy with a large parameter. Manuscript dated Jan. 30, 2006.

[K2] ———: On P_{II}-P_{IV} hierarchy and Garnier systems. In prep.

[LS] C. -H. Lin and Y. Sibuya: Some applications of isomondromic deformations to the structure of Stokes multipliers. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **36** (1989), 649-663.

[L] D. Liu: On the holonomic deformation of linear differential equations of the A_g type. J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **8** (2001), 559-594.

[N] Y. Nishikawa: WKB analysis of P_{II}-P_{IV} hierarchies. RIMS Koukyuuroku, No.1316, pp.19-103, 2003. (In Japanese.)

[NY] M. Noumi and Y. Yamada: Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$. Funkcial. Ekvac., **41** (1998), 483-503.

[Sa1] S. Sasaki: On the role of virtual turning points in the deformation of higher order linear ordinary differential equations. RIMS Koukyuuroku, No. 1433, pp. 27-64, 2005. (In Japanese.)

[Sa2] ______: ——, II — On a new Stokes curve in Noumi-Yamada systems. Ibid., pp. 65-109, 2005. (In Japanese.)

[S] S. Shimomura: On the Painlevé I hierarchy. RIMS Koukyuuroku, No. 1203, pp. 46-50, 2001.

[T] Y.Takei: Instanton-type formal solutions for the first Painlevé hierarchy. Preprint, 2006.