数理解析研究所講究録
第 1650 巻 2009 年 190-207

単調性・掃き出し法・不動点

東京大学・大学院数理科学研究科　岩尾昌央 (IWAO Masataka)
Graduate School of Mathematical Sciences,
University of Tokyo

概要

対象として連続写像 $F:\mathbf{R}^N\rightarrow\mathbf{R}^N$ の不動点を考える．不動点の唯一存在性の判定手続きを構成したい．本稿では，この種の問題に関して，単調性に付随する冪等半環におけるガウス消去法の類似手法が有効であることを，具体例に即して解説する．

§1. はじめに

本稿においては，新しい手法を明快な形で提供することに主眼を置く．そのため，簡潔な記法を導入すること，および，その具体的な使用法について述べることに専念する．

次の問題を考えよう．

問: 実変数 x_1,x_2,x_3,x_4 に対する連立（C^0 級・超越）方程式

$$\begin{cases} \max(0,-x_1,x_3)+x_3^3 &= x_1,\\ \log(\exp[x_1]+\exp[x_3])-x_4 &= x_2,\\ -(x_2+\cos[x_2]) &= x_3,\\ -\min(0,2x_1^3)-\tanh[x_3] &= x_4,\end{cases}$$

に、解がただ一つ存在するか？

以下，この問を解決する簡便な手法を提案する．この問とは別の，同種の問題への応用を見込んで，時には一般的な議論にまで踏み込んで述べて行こう．

§2 単調性に関する情報

与えられた連立方程式の左辺に対して，

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \max(0,-x_1,x_3)+x_3^3,\\ f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \log(\exp[x_1]+\exp[x_3])-x_4,\\ f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) &= -(x_2+\cos[x_2]),\\ f_4(x_1,x_2,x_3,x_4) &= -\min(0,2x_1^3)-\tanh[x_3],\end{aligned}$$

とおく．各関数 f_1, f_2, f_3, f_4 は，いずれも 連続写像$\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ である．さらにこれらの関数に単調性があるか 吟味しよう．

単調性については通常，1 変数関数に関して定義される概念である．ここでは調べたい関数 f_1, f_2, f_3, f_4 が多変数関数であるから若干の注意が必要であり，次のように考える．

f_1 の単調性:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \max(0, -x_1, x_3) + x_3^3,$$

に関して

- x_2, x_3, x_4 を任意に固定すると，x_1 に関して単調減少．
- x_1, x_3, x_4 を任意に固定すると，x_2 に関して定数関数．
- x_1, x_2, x_4 を任意に固定すると，x_3 に関して単調増加．
- x_1, x_2, x_3 を任意に固定すると，x_4 に関して定数関数．

f_2 の単調性:

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \log(\exp[x_1] + \exp[x_3]) - x_4,$$

に関して

- x_2, x_3, x_4 を任意に固定すると，x_1 に関して単調増加．
- x_1, x_3, x_4 を任意に固定すると，x_2 に関して定数関数．
- x_1, x_2, x_4 を任意に固定すると，x_3 に関して単調増加．
- x_1, x_2, x_3 を任意に固定すると，x_4 に関して単調減少．

f_3 の単調性:

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = -(x_2 + \cos[x_2]),$$

に関して

- x_2, x_3, x_4 を任意に固定すると，x_1 に関して定数関数．
- x_1, x_3, x_4 を任意に固定すると，x_2 に関して単調減少．
- x_1, x_2, x_4 を任意に固定すると，x_3 に関して定数関数．
- x_1, x_2, x_3 を任意に固定すると，x_4 に関して定数関数．

f_4 の単調性:

$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\min(0, 2x_1^3) - \tanh[x_3],$$

に関して

- x_2, x_3, x_4 を任意に固定すると，x_1 に関して単調減少．

- x_1, x_3, x_4 を任意に固定すると，x_2 に関して定数関数.
- x_1, x_2, x_4 を任意に固定すると，x_3 に関して単調減少.
- x_1, x_2, x_3 を任意に固定すると，x_4 に関して定数関数.

これらの情報をまとめて，次の表を得る.

	x_1	x_2	x_3	x_4
f_1	減少	定数	増加	定数
f_2	増加	定数	増加	減少
f_3	定数	減少	定数	定数
f_4	減少	定数	減少	定数

§§2.1 形式的な連立一次式

情報加工の便利を図るため，記号 $\{O, I, \Delta\}$ を導入する：

(注： 'Omitter','Increaser','Decreaser' の頭文字．D は O と紛らわしいので Δ にした．)

	x_1	x_2	x_3	x_4
f_1	Δ	O	I	O
f_2	I	O	I	Δ
f_3	O	Δ	O	O
f_4	Δ	O	Δ	O

これらの情報に関して，もとの連立方程式に対応させるため、次の形式的連立一次式で表

記することにする：

$$
\begin{cases}
(\Delta \odot x_1) \oplus (O \odot x_2) \oplus (I \odot x_3) \oplus (O \odot x_4) \to x_1, \\
(I \odot x_1) \oplus (O \odot x_2) \oplus (I \odot x_3) \oplus (\Delta \odot x_4) \to x_2, \\
(O \odot x_1) \oplus (\Delta \odot x_2) \oplus (O \odot x_3) \oplus (O \odot x_4) \to x_3, \\
(\Delta \odot x_1) \oplus (O \odot x_2) \oplus (\Delta \odot x_3) \oplus (O \odot x_4) \to x_4.
\end{cases}
$$

以下，記号‘$\to$’，‘$\odot$’，‘$\oplus$’に，自然な計算規則を付与する．

§3 「代入‘$\to$’」，「積‘$\odot$’」，「和‘$\oplus$’」

以降，上式を変形して，冒頭の「問」の答を導く．まず基本的な計算規則を定める．

§§3.1 代入操作による変数消去と合成写像

連立方程式の「代入による等価変形」に関して，以下のことを注意しておく．

一般に，連続写像 $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ と，変数 x, y, z に対して，連立方程式

$$
\begin{cases}
f(x) = y, \\
g(y) = z,
\end{cases}
$$

を考える．ここで f が写像であるから，第２式から変数 y を代入消去してよい．つまり

$$
\begin{cases}
f(x) = y, \\
g(y) = z,
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
f(x) = y, \\
(g \circ f)(x) = z,
\end{cases}
$$

が導かれ，合成写像 $g \circ f$ も連続写像となるが，このとき $g \circ f$ の引数に指定される変数として y は除去されている．

（注： f が写像性を持たなければ，上式の等価性は保証されず，代入消去が意味を持たない.）

§§3.2 $\{O, I, \Delta\}$ における「積」$\odot$

一般に，連続写像 f, g に単調性があれば，連立方程式

$$
\begin{cases}
f(x) = y, \\
g(y) = z,
\end{cases}
$$

に対して，（問の連立方程式と同様の対応のさせ方で）形式的連立一次式を対応させて，

$$
\begin{cases}
a \odot x \to y, \\
b \odot y \to z,
\end{cases}
$$

となるような $a, b \in \{O, I, \Delta\}$ が定まる．

このとき，合成写像 $(g \circ f)$ にも単調性があり，$(g \circ f)(x) = z$ に対して，

$$c \odot x \to z,$$

となるような $c \in \{O, I, \Delta\}$ が定まる．

一方，

$$\begin{cases} a \odot x \to y, \\ b \odot y \to z, \end{cases}$$

において形式的な代入を行うことにより，変数 y を消去して

$$\begin{cases} a \odot x \to y, \\ b \odot (a \odot x) \to z, \end{cases}$$

を得る．ここで第２式

$$b \odot (a \odot x) \to z,$$

が整合性を持つためには，

$$b \odot (a \odot x) = c \odot x$$

であれば良い．

そこで

$$\underline{b \odot (a \odot x) = (b \odot a) \odot x}$$

と定めれば，自然な「積」$b \odot a$ $(= c)$ が定義され，形式的な代入において整合性が担保される．

（注：　写像の具体形によらない代数系にするためには，多少の細工が必要であるが，長くなるので本稿では述べない．「和」$\oplus$ についても同様である．ここでは，後に述べる積表の意味が解釈できればよいので，厳密な定義については割愛する.）

§§3.3 $\{O, I, \Delta\}$ における「和」$\oplus$

上の形式的代入操作を，多変数の場合に拡張するため，「和」$\oplus$ を導入する．

連続写像 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ と，変数 x, y に対して，方程式

$$f(x, x) = y,$$

を考える．

$f(x,x)$ が x に対して単調性を持つとすると

$$d \odot x \to y,$$

となるような $d \in \{O, I, \Delta\}$ が定まる．

一方，f が，各引数に対してそれぞれ，（自身以外の引数を任意に固定する時に）単調性を持つ場合には

$$(a \odot x) \ominus (b \odot x) \to y,$$

となるような $a, b \in \{O, I, \Delta\}$ が定まる．

これらの式が整合性を持つために

$$(a \odot x) \oplus (b \odot x) = d \odot x,$$

であれば良い．

そこで

$$\underline{(a \odot x) \oplus (b \odot x) = (a \ominus b) \odot x}$$

と定めれば，自然な「和」$a \oplus b$ $(= d)$ が定義される．

§§3.4 積表

実際に写像を適当にとって $\odot$ と $\oplus$ を調べてみると，積表は次のとおりになる．

$\odot$	O	I	Δ
O	O	O	O
I	O	I	Δ
Δ	O	Δ	I

$\oplus$	O	I	Δ
O	O	I	Δ
I	I	I	
Δ	Δ		Δ

空白になっているところは，写像の取り方によっては単調性が特定できないことを示す．

（注：　写像の取り方によらない代数系にするためには，このことを良く考える必要がある.）

後に一般的な考察を行う際に，代数系が閉じていると便利なので，次のような処方を施す.

§§3.5 代数系としての閉包

上に述べた集合 $\{O, I, \Delta\}$ に，W を付加する('Wild card' の頭文字．単調性が特定されない時に使う) と，次のような，演算の閉じた代数系が得られる.

$\odot$	O	I	Δ	W
O	O	O	O	O
I	O	I	Δ	W
Δ	O	Δ	I	W
W	O	W	W	W

$\oplus$	O	I	Δ	W
O	O	I	Δ	W
I	I	I	W	W
Δ	Δ	W	Δ	W
W	W	W	W	W

演算が閉じていると，一般論の構成の際に便利であり，後に述べるグラフにおける性質を，式変形により示すことが可能になる.

また，連続写像 $\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^M$ 全体の（写像の合成を積とする）集合から，この代数系の要素を成分とする $M \times N$ 行列全体の（行列の掛け算を積とする）集合への対応が，全射準同型になっている．つまり，W を付加することにより，任意の実連続写像に対しての取り扱いが自然な形になる.

（注：　「和」$a \oplus b$ が冪等律を満たしているので，この演算について半束になっている．従って自然な半順序（$a \leq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$）を入れることができる．この半順序を使って，各演算を「任意の写像 … に対して … を満たす最も小さな … 」のような形で定義しなおすとよい.）

§§3.6 代数系 $(\{O, I, \Delta, W\}, \odot, \oplus)$ の性質

２つの演算の満たす性質を列挙しよう.

1. 乗法について commutative: $a \odot b = b \odot a$;
2. 加法について idempotent: $a \oplus a = a$;

3. semi-ring の公理：

- $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$;　※
- $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;
- $a \oplus b = b \oplus a$;
- $O \oplus a = a \oplus O = a$;
- $I \odot a = a \odot I = a$;
- $O \odot a = a \odot O = O$;
- $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$;
- $(b \oplus c) \odot a = (b \odot a) \oplus (c \odot a)$.

※：　積の結合律は，公理系に含まれないこともある．

（注：　シュプリンガーのウェブページ参照．$\odot, \oplus$ の記号は，このページから借用．semi-ring の要素を成分とする行列について，標準的な行列計算が可能．また，その行列を隣接行列とする有向グラフ表示が可能．）

§§3.7 行列表記

代数系 $(\{O, I, \Delta, W\}, \odot, \oplus)$ が semi-ring であり，

$$\begin{cases} (\Delta \odot x_1) \oplus (O \odot x_2) \oplus (I \odot x_3) \oplus (O \odot x_4) \to x_1, \\ (I \odot x_1) \oplus (O \odot x_2) \oplus (I \odot x_3) \oplus (\Delta \odot x_4) \to x_2, \\ (O \odot x_1) \oplus (\Delta \odot x_2) \oplus (O \odot x_3) \oplus (O \odot x_4) \to x_3, \\ (\Delta \odot x_1) \oplus (O \odot x_2) \oplus (\Delta \odot x_3) \oplus (O \odot x_4) \to x_4, \end{cases}$$

をまとめて

$$\begin{bmatrix} \Delta & O & I & O \\ I & O & I & \Delta \\ O & \Delta & O & O \\ \Delta & O & \Delta & O \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

と，行列表記するのは自然であろう．以下，この形式の記法を標準的に使用する．

ただし，このように形式的連立一次式を記述する際には，次のことが常に仮定されているものとする：

- その左辺に対応しているところの，連立方程式における左辺の関数たちに関して，いずれも連続写像性が特定される．

（注：　写像性が無いと代入による変数消去が出来ないことを，既に述べた．連続性が無いと，後に述べる陰関数定理が得られない．）

§4 基本戦略

もとの連立方程式が単一解を持つことを示すには

$$\begin{bmatrix} \Delta & O & I & O \\ I & O & I & \Delta \\ O & \Delta & O & O \\ \Delta & O & \Delta & O \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

について，代入や演算などの変形を施して

$$\begin{bmatrix} O & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

の形にできればよい．この式は，全ての変数が定数であることを指している．

§§4.1 戦術１：陰関数定理

一般に，連続写像 $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ に対して連立方程式

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2, \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3, \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4, \end{cases}$$

を考える時，対応する形式的連立一次式として

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

の形に表記できて，各 $j = 1,2,3,4$ および各 $k = 1,2,3,4$ に対して，ある a_j^k がそれぞれ $\{O, I, \Delta, W\}$ より１つずつ選べる．

ここで，対角成分（a_1^1 か a_2^2 か a_3^3 か a_4^4）が全て Δ もしくは O であるとき，次のことが成り立つことを示すことができる．

もとの f_1, f_2, f_3, f_4 による連立方程式と等価な連立方程式として

$$\begin{cases} \tilde{f}_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1, \\ \tilde{f}_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2, \\ \tilde{f}_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3, \\ \tilde{f}_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4, \end{cases}$$

の形に記述され，さらにこの連立方程式に関して形式的連立一次式を対応させると

$$\begin{bmatrix} O & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & O & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & O & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & O \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

となる（つまり対角成分が全て O であって，それ以外の成分についての単調性の情報は同じである）ような関数 $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \tilde{f}_4$ が，連続写像 $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ として 一意的に存在 する．

ラフな言い方をすると，係数行列の対角成分に Δ があれば，それを O に置き換えてよい．

（注１：　この言い方は，仮定として対角成分が全て Δ もしくは O であるとは限らない場合についても言及しているため，単純な言い換えにはなっていないが，言説自体は確かに成り立つ．しかし後で述べる一般論を考慮すると，そのような場合については，考察の対象からは除外される．そこで，表現の精確を期するため，仮定が特殊な形の場合について，やや迂遠な言い回しを試みた．）

（注２：　証明は，ほぼ普通の 陰関数定理 と同じ．連立方程式が 不動点 を表す形式であり，各単独方程式において，左辺を右辺に移項すると，陰関数が大域的に一意存在していることがわかる．ここで，連続写像性 と 単調性 が効いている．陰関数に単調性の情報が継承されることは，不等式によって示せるが，もっと直感的に，２変数の場合で頭の中に３次元グラフを描けば納得する．）

いま扱っている具体例に即して言えば，例えば，与えられた連立方程式の第１式

$$\max(0, -x_1, x_3) + x_3^3 = x_1,$$

に対して，ある連続写像 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が

$$(\text{第 1 式}) \Leftrightarrow g(x_3) = x_1,$$

となるように一意的に存在して，単調増加性を持つ．

このことから

$$\begin{bmatrix} \Delta & O & I & O \\ I & O & I & \Delta \\ O & \Delta & O & O \\ \Delta & O & \Delta & O \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

について，第１対角成分を O に置き換えて良い：

$$\begin{bmatrix} O & O & I & O \\ I & O & I & \Delta \\ O & \Delta & O & O \\ \Delta & O & \Delta & O \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

繰り返すが，この置き換えは，方程式を陰関数によって等価変形することにより導かれている．

§§4.2 戦術 2：前進消去

いま得られた

$$\begin{bmatrix} O & O & I & O \\ I & O & I & \Delta \\ O & \Delta & O & O \\ \Delta & O & \Delta & O \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

について，第 1 式 $I \odot x_3 \to x_1$, を，第 2 式

$$(I \odot x_1) \oplus (I \odot x_3) \oplus (\Delta \odot x_4) \to x_2,$$

の左辺の x_1 と，第 4 式

$$(\Delta \odot x_1) \oplus (\Delta \odot x_3) \to x_4,$$

の左辺の x_1 に代入しよう．第 1 式の左辺に x_1 が無いので，代入後の第 2 式と第 4 式の左辺から x_1 が消去される．

実際，第 2 式左辺

$$(I \odot x_1) \oplus (I \odot x_3) \oplus (\Delta \odot x_4)$$

の x_1 に第 1 式

$$I \odot x_3 \to x_1,$$

を代入すると

$$\begin{aligned} & (I \odot x_1) \oplus (I \odot x_3) \oplus (\Delta \odot x_4) \\ = \quad & (I \odot [I \odot x_3]) \oplus (I \odot x_3) \oplus (\Delta \odot x_4) \\ = \quad & ([I \odot I] \odot x_3) \oplus (I \odot x_3) \oplus (\Delta \odot x_4) \\ = \quad & (I \odot x_3) \oplus (I \odot x_3) \oplus (\Delta \odot x_4) \\ = \quad & ([I \oplus I] \odot x_3) \oplus (\Delta \odot x_4) \\ = \quad & (I \odot x_3) \oplus (\Delta \odot x_4) \end{aligned}$$

となる．よって，第 2 式は $(I \odot x_3) \oplus (\Delta \odot x_4) \to x_2$, と書き換えてよい．

以上の計算を行列表記のまま実行するには，次のように係数行列を変形すればよい．

$$
\left[\begin{array}{c|ccc}
\boxed{O} & \boxed{A} & \boxed{B} & \boxed{C} \\ \hline
\boxed{D} & \boxed{E} & \boxed{F} & \boxed{G} \\
* & * & * & * \\
* & * & * & *
\end{array}\right]
\longrightarrow
\left[\begin{array}{c|ccc}
\boxed{O} & \boxed{A} & \boxed{B} & \boxed{C} \\ \hline
\boxed{O} & \boxed{E'} & \boxed{F'} & \boxed{G'} \\
* & * & * & * \\
* & * & * & *
\end{array}\right]
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
E' &= E \oplus (D \odot A) \\
F' &= F \oplus (D \odot B) \\
G' &= G \oplus (D \odot C)
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left[\begin{array}{c|ccc}
\boxed{O} & \boxed{O} & \boxed{I} & \boxed{O} \\ \hline
\boxed{I} & \boxed{O} & \boxed{I} & \boxed{\Delta} \\
* & * & * & * \\
* & * & * & *
\end{array}\right]
\longrightarrow
\left[\begin{array}{c|ccc}
\boxed{O} & \boxed{O} & \boxed{I} & \boxed{O} \\ \hline
\boxed{O} & \boxed{O} & \boxed{I} & \boxed{\Delta} \\
* & * & * & * \\
* & * & * & *
\end{array}\right]
$$

同様に，第 1 式の第 4 式への代入は，次のようにする．

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \boxed{O} & \boxed{A} & \boxed{B} & \boxed{C} \\ \hline * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \boxed{D} & \boxed{E} & \boxed{F} & \boxed{G} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|ccc} \boxed{O} & \boxed{A} & \boxed{B} & \boxed{C} \\ \hline * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \boxed{O} & \boxed{E'} & \boxed{F'} & \boxed{G'} \end{array}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l} E' = E \oplus (D \odot A) \\ F' = F \oplus (D \odot B) \\ G' = G \ominus (D \odot C) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \boxed{O} & \boxed{O} & \boxed{I} & \boxed{O} \\ \hline * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \boxed{\Delta} & \boxed{O} & \boxed{\Delta} & \boxed{O} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|ccc} \boxed{O} & \boxed{O} & \boxed{I} & \boxed{O} \\ \hline * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \boxed{O} & \boxed{O} & \boxed{\Delta} & \boxed{O} \end{array}\right]$$

以上の操作によって

$$\begin{bmatrix} O & O & I & O \\ O & O & I & \Delta \\ O & \Delta & O & O \\ O & O & \Delta & O \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

が得られた．係数行列に着目すると

$$\begin{bmatrix} O & * & * & * \\ O & O & * & * \\ O & * & O & * \\ O & * & * & O \end{bmatrix}$$

の形に変形されている．

引き続き同様に，第２式を第３・４式に代入して

$$\begin{bmatrix} O & O & I & O \\ O & O & I & \Delta \\ O & O & \Delta & I \\ O & O & \Delta & O \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

となる．対角成分の Δ は，陰関数定理で O にする．係数行列に着目すると

$$\begin{bmatrix} O & * & * & * \\ O & O & * & * \\ O & O & O & * \\ O & O & * & O \end{bmatrix}$$

の形に変形されている．

引き続き同様に，第３式を第４式に代入して

$$\begin{bmatrix} O & O & I & O \\ O & O & I & \Delta \\ O & O & O & I \\ O & O & O & \Delta \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

となる．対角成分の Δ は，陰関数定理で O にする．係数行列に着目すると

$$\begin{bmatrix} O & * & * & * \\ O & O & * & * \\ O & O & O & * \\ O & O & O & O \end{bmatrix}$$

の形になり，左辺の係数行列が「上三角化」された．

§§4.3 戦術３：後退代入

次に，第４式を第３式に代入すると

$$\begin{bmatrix} O & * & * & * \\ O & O & * & * \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

となる．引き続き，下方の式を上方に代入していき

$$\begin{bmatrix} O & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

が得られる．

従って，もとの連立方程式の全ての変数は一意的な定数であることが，示されたことにな

る．(問の解答おわり．)

§5 基本戦略の成功する一般条件

一般に，

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$a_j^k \in \{O, I, \Delta, W\}$, について，同様にして「上三角化」されるための必要十分条件を，a_j^k の満たす式として書き下したい．

このため,「サイクル積 $a[\cdots]$」を導入する．例えば

$$\begin{aligned} a[1] &= a_1^1, \\ a[12] &= a_2^1 \odot a_1^2, \\ a[123] &= a_2^1 \odot a_3^2 \odot a_1^3, \\ a[1234] &= a_2^1 \odot a_3^2 \odot a_4^3 \odot a_1^4, \end{aligned}$$

と書く．同様に任意の巡回置換について，サイクル積 $a[\cdots]$ を定める．

サイクル積を用いると，上三角化されるための必要十分条件は，次のように書ける：

- 任意のサイクル積 $a[\cdots] = \Delta$ or O,
- $a[12]a[13] \oplus a[12]a[14] \oplus a[13]a[14] = O$,
- $a[12](a[134] \oplus a[143]) \oplus a[13](a[124] \oplus a[142]) \oplus a[14](a[123] \oplus a[132]) = O$,
- $a[23]a[24] = O$,
- $a[23](a[124] \oplus a[142]) \oplus a[24](a[123] \oplus a[132]) = O$,
- $(a[123] \ominus a[132])(a[124] \oplus a[142]) = O$.

(注： 以上６つの条件が全て満足されること．ここで積 $\odot$ 記号は省略した.)

§§5.1 より一般の場合に向けて

変数が４つ以外の時にも，

- 任意のサイクル積 $a[\cdots] = \Delta$ or O,

は常に，係数行列が上三角化されるための <u>必要条件</u> になっている．

現在，次のような手順によって，上三角化されるケースを見つけている．

1. 行列と対応する有向グラフを描く.（グラフの描き方は後述.）
2. グラフにおいて上の必要条件を検討する.
3. 行列で消去法の計算を行う.

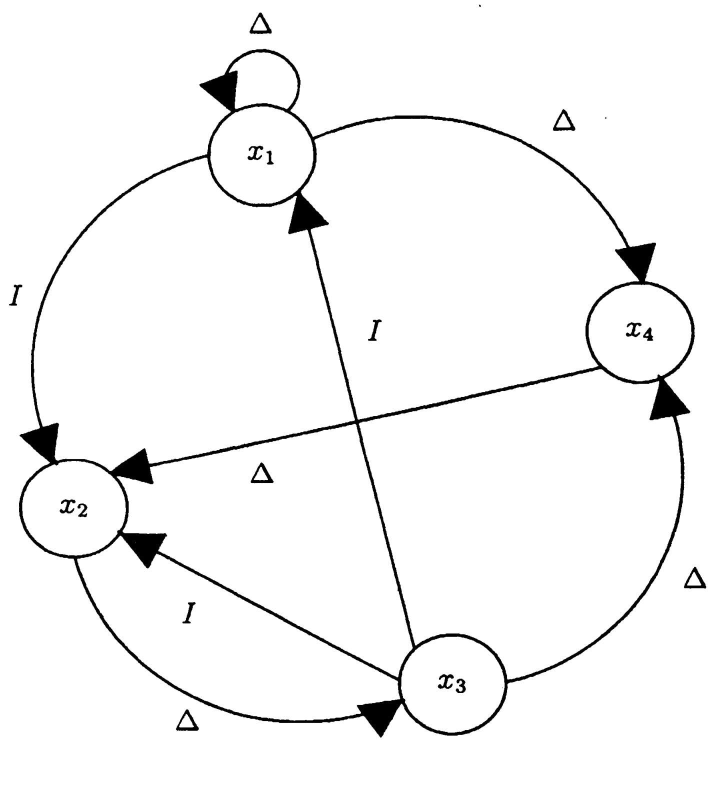
§§5.2 隣接行列としての有向グラフとの対応

上の必要条件はグラフの上では次のように調べればよい.

本稿の例においては与えられた連立方程式を，形式的連立一次式

$$\begin{bmatrix} \Delta & O & I & O \\ I & O & I & \Delta \\ O & \Delta & O & O \\ \Delta & O & \Delta & O \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

に対応させていた．さらに，この左辺の係数行列を有向グラフの隣接行列とみなすことにより，次の有向グラフを対応させよう.



一般に，この例の様に有向グラフを対応させるものとすると，

$$\begin{array}{cl} & \text{任意のサイクル積 } a[\cdots] = \Delta \text{ or } O \\ \Leftrightarrow & \text{グラフにおける任意の単純ループが } W \text{ を含まず } \Delta \text{ を奇数個含む} \end{array}$$

ということが成り立つ．

おわりに

連続写像 $\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ の不動点は，単調性に付随する semi-ring を通じて，(非線形版の) ガウスの消去法や，グラフ理論といった，離散数学と関係していることが解ってきた．

筆者の動機は，当初は区分線形写像（区分アフィン写像）の不動点に関する研究分野の開拓をすることであった．しかしながら，ここで得られたものを振り返って見ると，意外にさまざまな分野に応用のできる形になっているように感じられる．

区分アフィン写像の場合では，本稿で述べたような手法で不動点が一意存在することが保証されるようなときに，不動点を実際に求めるための簡単で効率的かつ強力な手続きがある．その手続きは，原理に気づいてしまえば当たり前のことなのだが，ここに記述するには紙数が足りない．

(注： 本稿では，以前に発表のなされていない内容に関して，厳密性の欠く記述を行なっており，筆者の夢想の域を超えてはいない．しかし，「厳密性」という概念自体が，各個人において，相対的な基準により確立されているものであるため，絶対的に厳密な記述をすることは，断念せざるを得なかった．読者の方には御寛恕を請いたい．)

文献

基本的な概念しか使用していないので，文献は必要ないと思われる．

念のため，現在はマイナーな感じのする基本概念に関して，次のような文献が挙げられる．

- semi-ring の公理について：
  [1] シュプリンガー・フェアラークのウェブページ．
- 半束と半順序の対応について：
  [2] 田村孝行　著，‘半群論’(共立)．
- semi-ring に重みを持つ有向グラフと隣接行列の対応について：
  [3] R. ディーステル　著（根上生也・太田克弘　訳），‘グラフ理論’(シュプリンガー)．