数理解析研究所講究録
第 1650 巻 2009 年 101-115

ハイパー行列式と長方形ヤング図形に対応したジャック多項式[1]

九州大学大学院数理学研究院　松本 詔 (Sho Matsumoto)
Faculty of Mathematics,
Kyushu University.

概 要

行列式の高次元への拡張であるハイパー行列式を扱い，そのジャック多項式との関係を見ていく．§1 ではハイパー行列式についての基本的な性質を見る．§2 ではテープリッツ型ハイパー行列式の具体的な値を，ジャック多項式の理論を用いて計算する手法を与える．§3 がここでの主結果であるが，長方形ヤング図形に対応したジャック多項式に対し，ハイパー行列式を用いたヤコビ・トゥルディ型公式を与える．

1 ハイパー行列式

ハイパー行列式はケーリー (Cayley) により定義された，行列式の単純な拡張である．まずこの章ではハイパー行列式について基本的な事柄を self-contained で述べよう．特に重要な主張は，ハイパー行列式の積分公式（命題 1.1）である．

1.1 ハイパー行列式の定義

正の整数 n に対し，$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく．配列

$$A = (A(i_1, i_2, \ldots, i_k))_{1 \le i_1, i_2, \ldots, i_k \le n}$$

を考える．ここで，各成分 $A(i_1, \ldots, i_k)$ は適当な可換環（たとえば $\mathbb{C}$ や $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$）の元であるとする．$A$ は $k = 1$ のときは $(A(1), \ldots, A(n))$ という数列であり，$k = 2$ のときは n 次の正方行列 $(A(i,j))_{1 \le i,j \le n}$ である．また，$A = (A(i_1, \ldots, i_k))_{[n]}$ のように書くこともある．このような A を**ハイパー行列**と呼ぶ．また，テンソルと呼ぶこともある．

ハイパー行列 $A = (A(i_1, \ldots, i_k))_{[n]}$ に対して，行列式の拡張を次のように定義する．

$$\text{(1.1)} \qquad \det{}^{[k]}(A) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma_1)\mathrm{sgn}(\sigma_2) \cdots \mathrm{sgn}(\sigma_k) \prod_{i=1}^{n} A(\sigma_1(i), \sigma_2(i), \ldots, \sigma_k(i)).$$

$\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群であり，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は置換 σ の符号である．この $\det^{[k]}(A)$ を A の**ハイパー行列式** (hyperdeterminant) という（[C, BBL, LT2] 及び [Mat1]-[Mat5]）．特に，$\det^{[2]}(A)$ は $n \times n$ 行列 A の行列式に他ならない．

---

[1]RIMS 研究集会「可積分系数理の新潮流」　2007 年 8 月 20 日～22 日．

例 1.1. $k=4, n=2$ とすると,

$$\begin{aligned}&\det{}^{[4]}(A(i_1,i_2,i_3,i_4))_{[2]} = \\ &A(1,1,1,1)A(2,2,2,2) - A(1,2,1,1)A(2,1,2,2) - A(1,1,2,1)A(2,2,1,2) \\ &- A(1,1,1,2)A(2,2,2,1) + A(1,2,2,1)A(2,1,1,2) + A(1,2,1,2)A(2,1,2,1) \\ &+ A(1,1,2,2)A(2,2,1,1) - A(1,2,2,2)A(2,1,1,1).\end{aligned}$$

k が奇数のときは, $n=1$ でなければ式 (1.1) の定義は恒等的に 0 になることに注意する. 実際, 定義からすぐに

$$\det{}^{[k]}(A) = \left[\frac{1}{n!}\sum_{\sigma_1\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma_1)^k\right] \times \sum_{\sigma_2,\ldots,\sigma_k\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma_2)\cdots\operatorname{sgn}(\sigma_k)\prod_{i=1}^{n}A(i,\sigma_2(i),\ldots,\sigma_k(i)) \tag{1.2}$$

と変形できるが, $n>1$ ならば $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)=0$ となるため, k が奇数のときは $\det^{[k]}(A)=0$ である. よって以下 k を偶数とし, $k=2m$ と書く.

注意 1.1. Cayley [C] は定義 (1.1) 以外にも行列式の高次元への拡張を考えており, それらもまたハイパー行列式 (hyperdeterminant) と呼ばれている. したがってこの用語を扱うときには定義をしっかりと確認する必要がある.

注意 1.2. ハイパー行列 $A=(A(i_1,\ldots,i_k))_{[n]}$ に対し,

$$\det{}^{[k]}_{+}(A) := \sum_{\sigma_2,\ldots,\sigma_k\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma_2)\cdots\operatorname{sgn}(\sigma_k)\prod_{i=1}^{n}A(i,\sigma_2(i),\ldots,\sigma_k(i))$$

を考える. 式 (1.2) より, k が偶数ならば $\det^{[k]}(A) = \det^{[k]}_{+}(A)$ となる. 一方, k が奇数ならば $\det^{[k]}(A)=0$ であったが, $\det^{[k]}_{+}(A)$ は 0 ではない. そこで k が奇数の場合は $\det^{[k]}(A)$ ではなく $\det^{[k]}_{+}(A)$ を扱えば良いように思えるが, $\det^{[k]}_{+}$ は $\det^{[k]}$ と性質が異なってしまうのでここでは扱わない. もう少し詳しいことは [LT2] の Appendix C を参照.

1.2 ハイパー行列式の不変性

2 つの $n\times n$ 行列 A,B に対し, 行列式は乗法性 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ を満たす. これに対応するハイパー行列式の性質を述べる.

$V=\mathbb{C}^n$ を n 次元複素ベクトル空間とし, $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ を V の一つの基底とし固定する. このとき, $V^{\otimes k}$ の任意の元 $\boldsymbol{A}$ は,

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i_1,\ldots,i_k\in[n]} A(i_1,\ldots,i_k)e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_k}, \qquad A(i_1,\ldots,i_k)\in\mathbb{C},$$

のように書ける. これにより $\boldsymbol{A}$ と $A=(A(i_1,\ldots,i_k))_{[n]}$ を同一視し, (前述したように) ハイパー行列 A を**テンソル**とも呼ぶ. またこの同一視の元で, $V^{\otimes k}$ 上の関数 $\det^{[k]}$ を $\det^{[k]}(\boldsymbol{A}) := \det^{[k]}(A)$ で定める.

$GL(n,\mathbb{C})^{\times k}$ の $V^{\otimes k}$ への自然な作用を考える．

$$(g^{(1)},\dots,g^{(k)})\cdot \boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_k}=(g^{(1)}\boldsymbol{e}_{i_1})\otimes\cdots\otimes(g^{(k)}\boldsymbol{e}_{i_k}).$$

このとき，

$$\det{}^{[k]}((g^{(1)},\dots,g^{(k)})\cdot\boldsymbol{A})=\prod_{i=1}^{k}\det(g^{(i)})\cdot\det{}^{[k]}(\boldsymbol{A}) \tag{1.3}$$

が成り立つ．特に，$\det^{[k]}(\boldsymbol{A})$ は $SL(n,\mathbb{C})^{\times k}$ 不変である．実際，

$$(g^{(1)},\dots,g^{(k)})\cdot\boldsymbol{A}=\sum_{i_1,\dots,i_k\in[n]}B(i_1,\dots,i_k)\boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_k}$$

と表すとき，

$$B(i_1,i_2,\dots,i_k)=\sum_{j_1,j_2,\dots,j_k\in[n]}g^{(1)}_{i_1j_1}g^{(2)}_{i_2j_2}\cdots g^{(k)}_{i_kj_k}A(j_1,j_2,\dots,j_k)$$

である．よって，

$$\begin{aligned}
\det{}^{[k]}(B(i_1,\dots,i_k))_{[n]}&=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_k\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma_1\cdots\sigma_k)\prod_{i=1}^{n}\left[\sum_{j_1,\dots,j_k\in[n]}g^{(1)}_{\sigma_1(i)j_1}\cdots g^{(k)}_{\sigma_k(i)j_k}A(j_1,\dots,j_k)\right]\\
&=\frac{1}{n!}\sum_{\{j^i_p:1\le p\le k,\ 1\le i\le n\}}\sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_k\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma_1\cdots\sigma_k)\prod_{i=1}^{n}\left[g^{(1)}_{\sigma_1(i)j^i_1}\cdots g^{(k)}_{\sigma_k(i)j^i_k}A(j^i_1,\dots,j^i_k)\right]\\
&=\frac{1}{n!}\sum_{\{j^i_p:1\le p\le k,\ 1\le i\le n\}}\left[\prod_{i=1}^{n}A(j^i_1,\dots,j^i_k)\right]\times\prod_{p=1}^{k}\left[\sum_{\sigma_p\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma_p)\prod_{i=1}^{n}g^{(p)}_{\sigma_p(i)j^i_p}\right]\\
&=\frac{1}{n!}\sum_{\{j^i_p:1\le p\le k,\ 1\le i\le n\}}\prod_{i=1}^{n}A(j^i_1,\dots,j^i_k)\times\prod_{p=1}^{k}\det(g^{(p)}_{s,j^t_p})_{1\le s,t\le n}.
\end{aligned}$$

式の最後の行列式は，各 $1\le p\le k$ に対し，$j^1_p,\dots,j^n_p$ が $[n]$ の順列でなければ零である．従って，

$$\begin{aligned}
\det{}^{[k]}(B(i_1,\dots,i_k))_{[n]}&=\frac{1}{n!}\sum_{\tau_1,\dots,\tau_k\in\mathfrak{S}_n}\prod_{i=1}^{n}A(\tau_1(i),\dots,\tau_k(i))\times\prod_{p=1}^{k}\det(g^{(p)}_{s,\tau_p(t)})_{1\le s,t\le n}\\
&=\frac{1}{n!}\sum_{\tau_1,\dots,\tau_k\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\tau_1)\cdots\mathrm{sgn}(\tau_k)\prod_{i=1}^{n}A(\tau_1(i),\dots,\tau_k(i))\times\prod_{p=1}^{k}\det(g^{(p)}_{s,t})_{1\le s,t\le n}\\
&=\det{}^{[k]}(A)\times\prod_{p=1}^{k}\det(g^{(p)})
\end{aligned}$$

となり，(1.3) を得る．

1.3 ハイパー行列式の積分公式

式 (1.3) とは別の形の，行列式の乗法公式の拡張を与えよう．次の公式は，単純だが大変便利である．次のように，行列式の偶数個の積の積分はハイパー行列式で表すことができる．

命題 1.1. $(X,\mu(\mathrm{d}x))$ を測度空間とし，$\{\phi_{i,j}\}_{1\le i\le 2m, 1\le j\le n}$ を X 上の関数の集まりとする．さらに，

$$M(i_1,i_2,\ldots,i_{2m}) := \int_X \phi_{1,i_1}(x)\phi_{2,i_2}(x)\cdots\phi_{2m,i_{2m}}(x)\,\mu(\mathrm{d}x)$$

とおく．このとき次式が成り立つ．

$$\frac{1}{n!}\int_{X^n}\prod_{i=1}^{2m}\det(\phi_{i,j}(x_k))_{1\le j,k\le n}\cdot\prod_{j=1}^{n}\mu(\mathrm{d}x_j) = \det{}^{[2m]}(M(i_1,\ldots,i_{2m}))_{[n]}.$$

ただし，ここで登場している積分は全て意味を持つと仮定する．

証明．証明は直接計算で簡単に分かる（式 (1.3) の証明と同様である）．

$$\begin{aligned}
&\det{}^{[2m]}(M(i_1,\ldots,i_{2m}))_{[n]}\\
=&\frac{1}{n!}\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{2m}\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma_1\cdots\sigma_{2m})\prod_{j=1}^{n}\left(\int_X\prod_{i=1}^{2m}\phi_{i,\sigma_i(j)}(x)\,\mu(\mathrm{d}x)\right)\\
=&\frac{1}{n!}\int_{X^n}\left[\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{2m}\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma_1\cdots\sigma_{2m})\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{2m}\phi_{i,\sigma_i(j)}(x_j)\right]\prod_{j=1}^{n}\mu(\mathrm{d}x_j).
\end{aligned}$$

最後の式の被積分関数は次に等しい．

$$[\cdots] = \prod_{i=1}^{2m}\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^{n}\phi_{i,\sigma(j)}(x_j)\right) = \prod_{i=1}^{2m}\det(\phi_{i,k}(x_j))_{1\le j,k\le n}.$$

□

注意 1.3. 命題 1.1 で $m=1$ とすると，次のようになる．X 上の関数 ϕ_j,ψ_j $(1\le j\le n)$ に対し，

$$\frac{1}{n!}\int_{X^n}\det(\phi_j(x_k))_{1\le j,k\le n}\det(\psi_j(x_k))_{1\le j,k\le n}\cdot\prod_{j=1}^{n}\mu(\mathrm{d}x_j) = \det\left(\int_X\phi_i(x)\psi_j(x)\mu(\mathrm{d}x)\right)_{1\le i,j\le n}.$$

この公式はランダム行列の分野において，直交多項式アンサンブル（例えば，GUE など）の相関関数の計算などによく用いられている（例えば [Me, TW] を参照）．

注意 1.4. 命題 1.1 で $X=[n]$ とすると，次の式を得る．行列 $g^{(i)}=(g^{(i)}_{jk})_{1\le j,k\le n}$, $1\le i\le 2m$, に対し，

$$\prod_{i=1}^{2m}\det(g^{(i)}) = \det{}^{[2m]}\left(\sum_{j=1}^{n}g^{(1)}_{i_1j}g^{(2)}_{i_2j}\cdots g^{(2m)}_{i_{2m}j}\right)_{[n]}.$$

これは (1.3) で，$\boldsymbol{A}=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{e}_j\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_j$ とした場合に一致する．

注意 1.5. 命題 1.1 は行列式の偶数個の積の積分を考えているが，奇数個の積の場合には，ハイパー行列式の代わりにハイパーパフィアンを用いた公式を得ることができる（[Mat1, Mat2, Mat4, Mat5]）.

2 テープリッツ・ハイパー行列式

前章で定義されたハイパー行列式であるが，実際にそれらの値を計算するとなると大変困難である．この章では，テープリッツ・ハイパー行列式という特別な形のハイパー行列式に対し，実際にその値を計算する手法を与えることを目標とする．そのためにはジャック多項式の理論を用いる．

2.1 テープリッツ・ハイパー行列式の定義と積分表示

$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とおく．$f(z)$ を $\mathbb{T}$ 上の関数で，以下のようにフーリエ展開が与えられているとする．

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d(k) z^k.$$

このとき，ハイパー行列式

$$D_n^{[2m]}(f) = \det{}^{[2m]}(d(i_1 + \cdots + i_m - i_{m+1} - \cdots - i_{2m}))_{[n]}$$

を，f の**テープリッツ・ハイパー行列式** (Toeplitz hyperdeterminant) と呼ぶ ([LT2])．$m = 1$ のとき，すなわち $D_n^{[2]}(f) = \det(d(i-j))_{1 \le i,j \le n}$ は通常のテープリッツ行列式である．

注意 2.1. テープリッツ・ハイパー行列式の類似物であるハンケル (Hankel)・ハイパー行列式

$$\det{}^{[2m]}(d(i_1 + i_2 + \cdots + i_{2m}))_{0 \le i_1, \ldots, i_k \le n-1}$$

は，Luque-Thibon [LT2] により研究され，幾つかの例に対しセルバーク型積分を通じてその値が計算されている．任意のテープリッツ・ハイパー行列式は，ハンケル・ハイパー行列式の形でも書く事ができる．したがって，それら 2 種類のハイパー行列式は本質的に異なるものではないが，この章で与えるハイパー行列式の計算手法は，[LT2] で与えられるものとは異なっている．

テープリッツ・ハイパー行列式は次のように積分で表される．

命題 2.1.

$$D_n^{[2m]}(f) = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^{n} f(z_j) \cdot |V(z_1, \ldots, z_n)|^{2m} \, \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n.$$

ここで $\mathrm{d}z_j$ は $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{d}z_j = 1$ を満たす $\mathbb{T}$ のハール測度で，$V(z_1, \ldots, z_n)$ はヴァンデルモンド行列式

$$V(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (z_i - z_j).$$

証明. 命題1.1において, $X=\mathbb{T}$, $\mu(\mathrm{d}x)=\mathrm{d}z$, そして

$$\phi_{i,j}(z)=\begin{cases} f(z)z^{j-1}, & i=1\text{ のとき}, \\ z^{j-1}, & 2\le i\le m\text{ のとき}, \\ z^{1-j}, & m+1\le i\le 2m\text{ のとき} \end{cases}$$

とする. このとき,

$$|V(z_1,\dots,z_n)|^{2m}=\left\{\det(z_i^{j-1})\det(z_i^{-(j-1)})\right\}^m$$

だから,

$$\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{T}^n}\prod_{j=1}^n f(z_j)\cdot|V(z_1,\dots,z_n)|^{2m}\,\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_n=\det{}^{[2m]}\left(\int_{\mathbb{T}}f(z)z^{-i_1-i_2-\cdots-i_m+i_{m+1}+\cdots+i_{2m}}\mathrm{d}z\right)_{[n]}$$

を得る. 最後のハイパー行列式の各成分は, フーリエ係数 $d(i_1+\cdots+i_m-i_{m+1}-\cdots-i_{2m})$ である. □

注意 2.2. 命題2.1で $m=1$ のときは, ユニタリ群上での積分に言い換えられる. すなわち, ユニタリ群 $U(n)$ におけるワイルの積分公式を用いて

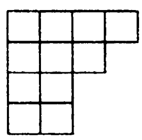
$$\det(d(i-j))_{1\le i,j\le n}=\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{T}^n}\prod_{j=1}^n f(z_j)\cdot|V(z_1,\dots,z_n)|^2\,\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_n=\int_{U(n)}F(g)\mu(\mathrm{d}g)$$

となる. ここで $\mu(\mathrm{d}g)$ は $U(n)$ のハール測度で, また $g\in U(n)$ の固有値を $z_1,\dots,z_n$ とするときに, 関数 F を $F(g)=\prod_{i=1}^n f(z_i)$ と定めている. この式はハイネ・セゲー (Heine-Szegö) の公式として知られている. 詳しくは [BD] などを参照.

2.2 ジャック多項式の定義

命題2.1で, テープリッツ・ハイパー行列式は積分で表された. その積分の値を具体的に計算していくために, ジャック多項式の理論を用いる. 分割やジャック多項式について必要な事項を述べよう. 詳しくは [Mac] を参照されたい.

非負整数の列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$ が**分割**であるとは, $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge 0$ を満たし, かつ十分大きな j に対して $\lambda_j=0$ となるときをいう. 0でない λ_j の個数を $\ell(\lambda)$ と書き, 長さと呼び, また全ての λ_j の和を $|\lambda|$ と書き, 重さと呼ぶ. 分割はしばしば**ヤング図形**と同一視される. すなわち, 上から i 行目に λ_i 個の箱を左詰めで並べていく. 例えば, 分割 $(4,3,2,2)$ のヤング図形は



となる. ヤング図形の第 j 列の長さを λ'_j とかく. 分割 $\lambda'=(\lambda'_1,\lambda'_2,\dots)$ を λ の共役な分割と呼ぶ. そのヤング図形は λ のヤング図形の対角線での転置となる. すなわち行と列の入れ替えである.

分割の dominance order を次で定める．$|\lambda| = |\mu|$ なる分割 λ と μ に対し，任意の $i \geq 1$ において $\lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i$ が成り立つときに，$\lambda \geq \mu$ と書く．これは同じ重さをもつ分割の集合の上の半順序である．

$x_1, \ldots, x_n$ を変数とする．長さが n 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ に対し，

$$m_\lambda(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{\mu \in \mathfrak{S}_n \lambda} x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}$$

と定める．ただし，$\mathfrak{S}_n \lambda = \{(\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)}) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ とした．定義より，m_λ は対称多項式である：$m_\lambda(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$．また，

$$\{m_\lambda(x_1, \ldots, x_n) \mid \lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下の分割}\}$$

は $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ の基底となる．

α を正の実数とする．次の２つを満たすような対称多項式の族 $\{P_\lambda^{(\alpha)} \mid \lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下の分割}\}$ $(\subset \mathbb{Q}(\alpha)[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n})$ が一意的に存在する（[Mac, chapter VI]）．

- $P_\lambda^{(\alpha)} = m_\lambda + \sum_{\mu:\mu<\lambda} u_{\lambda\mu}^{(\alpha)} m_\mu, \qquad u_{\lambda\mu}^{(\alpha)} \in \mathbb{Q}(\alpha)$,
- $\langle P_\lambda^{(\alpha)}, P_\mu^{(\alpha)} \rangle'_{n,\alpha} = 0, \qquad \lambda \neq \mu$ のとき．

ただし，$\langle \cdot, \cdot \rangle'_{n,\alpha}$ は次で定まる $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ 上の内積．

$$\langle m_\lambda, m_\mu \rangle'_{n,\alpha} = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{T}^n} m_\lambda(z_1, \ldots, z_n) \overline{m_\mu(z_1, \ldots, z_n)} |V(z_1, \ldots, z_n)|^{2/\alpha} \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n.$$

この $P_\lambda^{(\alpha)}$ を**ジャック P 多項式**という．係数 $u_{\lambda\mu}^{(\alpha)}$ は一般に $\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$ (a, b, c, d は非負整数) の形の積の和で与えられ，特に正であることが知られている．また，$u_{\lambda\mu}^{(1)}$ はコストカ数 (Kostka number) に一致する．

各分割 λ に対し，

$$b_\lambda^{(\alpha)} := \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} \frac{\alpha(\lambda_i - j) + \lambda'_j - i + 1}{\alpha(\lambda_i - j) + \lambda'_j - i + \alpha} \tag{2.1}$$

とおく．対称多項式 $Q_\lambda^{(\alpha)} := b_\lambda^{(\alpha)} P_\lambda^{(\alpha)}$ を**ジャック Q 多項式**という．各 α において，

$$\{P_\lambda^{(\alpha)}(x_1, \ldots, x_n) \mid \lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下の分割}\}, \qquad \{Q_\lambda^{(\alpha)}(x_1, \ldots, x_n) \mid \lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下の分割}\}$$

はともに $\mathbb{Q}(\alpha)[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ の基底となる．

内積の値は次で与えられる．

$$\langle P_\lambda^{(\alpha)}, Q_\mu^{(\alpha)} \rangle'_{n,\alpha} = \delta_{\lambda,\mu} I_n(\alpha) \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{n + (j-1)\alpha - i + 1}{n + j\alpha - i}. \tag{2.2}$$

ここで,

$$I_n(\alpha) := \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{T}^n} |V(z_1,\ldots,z_n)|^{2/\alpha} \mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_n = \frac{\Gamma(n/\alpha+1)}{n!\,\Gamma(1/\alpha+1)^n} \tag{2.3}$$

である. ただし, 2つ目の等式は [AAR, §8] などで与えられている.

$\alpha = 1$ のとき, $b_\lambda^{(1)} = 1$ である. このとき, ジャック多項式はシューア多項式に一致する.

$$P_\lambda^{(1)}(x_1,\ldots,x_n) = Q_\lambda^{(1)}(x_1,\ldots,x_n) = s_\lambda(x_1,\ldots,x_n) := \frac{\det(x_j^{\lambda_i+n-i})_{1\le i,j\le n}}{V(x_1,\ldots,x_n)}.$$

2.3 テープリッツ・ハイパー行列式の計算

関数 $\mathbf{1}$ を $\mathbf{1}(z) = 1$ $(z \in \mathbb{T})$ で定める. このとき, 命題 2.1 と (2.3) より

$$D_n^{[2m]}(\mathbf{1}) = \frac{(mn)!}{n!\,(m!)^n}$$

を得る.

$\mathbb{T}$ 上の関数 $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d(k)z^k$ のテープリッツ・ハイパー行列式 $D_n^{[2m]}(f)$ を計算しよう. R を非負整数とし,

$$F_R(z) = \sum_{k\ge -R} d(k)z^k$$

とおく. n と m に対し, 十分大きな R をとれば, $D_n^{[2m]}(f) = D_n^{[2m]}(F_R)$ とできる. 実際, $|k| > (n-1)m$ なる整数 k に対して $d(k)$ は, ハイパー行列 $(d(i_1+\cdots+i_m-i_{m+1}-\cdots-i_{2m}))_{1\le i_1,\ldots,i_{2m}\le n}$ の成分に現れない. 命題 2.1 より,

$$D_n^{[2m]}(F_R) = \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{T}^n}\prod_{k=1}^n z_k^R F_R(z_k)\cdot\overline{(z_1\cdots z_n)^R}|V(z_1,\ldots,z_n)|^{2m}\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_n$$

とかける. ここでまず, $(z_1\cdots z_n)^R = P_{(R^n)}^{(\alpha)}(z_1,\ldots,z_n)$ である (α によらない). 一方,

$$S_f(x_1,x_2,\ldots,x_n;R) := \prod_{k=1}^n x_k^R F_R(x_k)$$

とおくと, これは $\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_n]]^{\mathfrak{S}_n}$ の元となる. したがって $S_f(x_1,\ldots,x_n;R)$ はジャック多項式 $Q_\mu^{(1/m)}$ で展開できる. そのときの $Q_{(R^n)}^{(1/m)}$ の係数を $\gamma(f,n,m,R)$ とおく. すると, ジャック多項式の直交性より

$$\begin{aligned} D_n^{[2m]}(F_R) =& \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{T}^n} S_f(z_1,\ldots,z_n;R)\overline{P_{(R^n)}^{(1/m)}(z_1,\ldots,z_n)}|V(z_1,\ldots,z_n)|^{2m}\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_n \\ =& \gamma(f,n,m,R)\cdot\langle Q_{(R^n)}^{(1/m)}, P_{(R^n)}^{(1/m)}\rangle'_{n,1/m} \end{aligned}$$

となる．内積 $\langle Q^{(1/m)}_{(R^n)}, P^{(1/m)}_{(R^n)}\rangle'_{n,1/m}$ の値は，(2.2) で計算される．以上より，次の定理を得る．まず

$$\widehat{D}^{[2m]}_n(f) = \frac{D^{[2m]}_n(f)}{D^{[2m]}_n(\mathbf{1})} = \frac{n!\,(m!)^n}{(mn)!} D^{[2m]}_n(f)$$

と正規化しておく．

定理 2.2. R を $D^{[2m]}_n(f) = D^{[2m]}_n(F_R)$ を満たす非負整数とする．このとき，

$$\widehat{D}^{[2m]}_n(f) = \gamma(f,n,m,R) \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{R} \frac{im+j-1}{(i-1)m+j}.$$

ここで $\gamma(f,n,m,R)$ は，$S_f(x_1,\ldots,x_n;R) = \prod_{k=1}^n x_k^R F_R(x_k)$ をジャック Q 多項式 $(\alpha = 1/m)$ で展開したときの $Q^{(1/m)}_{(R^n)}$ における係数である．

このように，関数 f のテープリッツ・ハイパー行列式を計算するという問題は，f から定まる対称関数 S_f のジャック多項式展開における係数 $\gamma(n,m,f,R)$ を求める問題に帰着される．

2.4 テープリッツ・ハイパー行列式の具体例

一般に $\gamma(f,n,m,R)$ を計算することは困難であるが，$R=1$ のときならば対称関数論を用いて計算できることもある．ここではその一例を挙げよう．

a を正の整数として固定する．$f(z) = z^a - z^{-1}$ を考える．定理 2.2 の記号で，$R=1$ とできて，

$$S_f(x_1,\ldots,x_n;1) = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} (1 - x_k^{a+1})$$

である．この対称多項式の各項の次数は，$a+1$ の倍数であるから，n が $a+1$ で割り切れない場合は $\gamma(f;n,m,R) = 0$ である．そこで以下，n が $a+1$ で割り切れるとし，$n_a = n/(a+1)$ とおく．このとき $S_f(x_1,\ldots,x_n;R)$ の n 次の項の和は，基本対称多項式 $e_k(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_k}$ を用いて

$$(-1)^{n+n_a} e_{n_a}(x_1^{a+1},\ldots,x_n^{a+1})$$

とかける．ここで，対称多項式のプレシズム積 [Mac, I-8] を用いると，これはさらに

$$(-1)^{n+n_a}(e_{n_a} \circ p_{a+1})(x_1,\ldots,x_n)$$

となる．ただし p_k はべき和 $p_k(x_1,\ldots,x_n) = x_1^k + \cdots + x_n^k$ である．プレシズム積 $e_{n_a} \circ p_{a+1}$ は [Mac, I-8] の式を用いて p_k を変数とする多項式として具体的にかける．さらに $p_{k_1}\cdots p_{k_l}$ たちをジャック多項式で展開する式は [Mac, VI-10] で与えられており，それを用いることで $Q^{(1/m)}_{(1^n)}$ の係数 $\gamma(f,n,m,1)$ は次で与えられることがわかる（詳しい計算は [Mat4, Mat5] を参照）．

$$\gamma(f,n,m,R) = \frac{\prod_{i=0}^{n_a-1}(im+1)}{(n_a)!\,m^{n_a}}.$$

よって $f(z)=z^a-z^{-1}$ のテープリッツ・ハイパー行列式は次のように計算された．

$$\widehat{D}_n^{[2m]}(f)=\begin{cases}\prod_{i=n_a}^{n-1}\frac{im+m}{im+1}, & n\equiv 0 \bmod a+1 \text{ のとき} \\ 0, & n\not\equiv 0 \bmod a+1 \text{ のとき}.\end{cases}$$

この他の例については [Mat4, Mat5] を参照されたい．

2.5 テープリッツ・ハイパー行列式に対するセゲーの強極限定理

テープリッツ・ハイパー行列式 $D_n^{[2m]}(f)$ において，$n\to\infty$ とするときの漸近挙動について考えよう．ジャック多項式の直交性の漸近挙動から次を得ることができる．

定理 2.3. $f(z)=\exp\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}c(k)z^k\right)$ を $\mathbb{T}$ 上の関数とし，次を仮定する．

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c(k)|<\infty,\qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\,|c(k)|^2<\infty.$$

このとき，次が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty}e^{-c(0)n}\widehat{D}_n^{[2m]}(f)=\exp\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty}kc(k)c(-k)\right).$$

証明は [Mat6, §3] を参照．定理の主張は $m=1$ のときはテープリッツ行列式の漸近挙動を与えるが，セゲー (Szegö) の強極限定理としてよく知られている．定理 2.3 はそのテープリッツ・ハイパー行列式への自然な拡張である．f の仮定は m に依らない，すなわち通常のテープリッツ行列式を考えるときと同じ条件であることに注意する．この定理が示すように，漸近的に見ると，テープリッツ・ハイパー行列式 $\widehat{D}_n^{[2m]}(f)$ はテープリッツ行列式 $D_n(f)=D_n^{[2]}(f)$ の $1/m$ 乗である．

例 2.1. x を正の実数とし，$f(z)=e^{x(z-z^{-1})}$ を考える．このフーリエ係数はベッセル関数である．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\widehat{D}_n^{[2m]}(e^{x(z-z^{-1})})=e^{-x^2/m}.$$

例 2.2. s,t を $|s|,|t|<1$ を満たす複素数とし，w_1,w_2 を任意の複素数とする．このとき，$f(z)=(1+tz)^{w_1}(1+sz^{-1})^{w_2}$ を考えると，各 $k>0$ に対し，$c(k)=w_1(-1)^{k+1}t^k/k$, $c(-k)=w_2(-1)^{k+1}s^k/k$ である．よって次を得る．

$$\lim_{n\to\infty}\widehat{D}_n^{[2m]}(f)=\exp\left(\frac{w_1w_2}{m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(st)^k}{k}\right)=(1-st)^{-w_1w_2/m}.$$

3 ジャック関数のヤコビ・トゥルディ型公式

一般にジャック関数は，シューア関数の行列式表示に対応するものが知られていない．ここでは，ヤング図形が長方形の場合に限るが，ジャック関数をハイパー行列式を用いて表示する式を与える．

3.1 長方形ヤング図形に対するジャック関数

ジャック多項式は次の不変性を持つ：$\ell(\lambda) \le n$ なる分割 λ に対し，

$$P_\lambda^{(\alpha)}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})|_{x_{n+1}=0} = P_\lambda^{(\alpha)}(x_1,\dots,x_n).$$

これによりジャック多項式を可算無限個の変数 $x=(x_1,x_2,\dots)$ の関数と思うことができる（たとえば [Mac, I-2] を見よ）．

$$P_\lambda^{(\alpha)}(x).$$

これを**ジャック関数**と呼ぶ．ただし，ジャック関数とジャック多項式の用語の使い分けは厳密ではない．

ジャック関数は $\alpha=1$ でシューア関数となるのだった．すなわち $\ell(\lambda)\le n$ を満たす任意の分割 λ と正の整数 n に対し，

$$P_\lambda^{(1)}(x_1,\dots,x_n) = s_\lambda(x_1,\dots,x_n) = \frac{\det(x_j^{\lambda_i+n-i})_{1\le i,j\le n}}{\det(x_j^{n-i})_{1\le i,j\le n}}.$$

シューア関数 s_λ はこのようにヴァンデルモンド型行列式の比で与えられる．また，シューア関数は次のような行列式表示も持つ．

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i-i+j})_{1\le i,j\le n}, \qquad \ell(\lambda)\le n.$$

この式を**ヤコビ・トゥルディ(Jacobi-Trudi) 公式**という．ここで，h_k は完全対称関数である．

$$h_k(x) = s_{(k)}(x) = \sum_{1\le i_1\le\cdots\le i_k} x_{i_1}\cdots x_{i_k}.$$

またヤコビ・トゥルディ公式の双対版として次の式もある．

$$s_{\lambda'} = \det(e_{\lambda_i-i+j})_{1\le i,j\le m}, \qquad \lambda_1\le m.$$

ここで，e_k は基本対称関数

$$e_k(x) = s_{(1^k)}(x) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k} x_{i_1}\cdots x_{i_k}.$$

ジャック関数に対して，このヤコビ・トゥルディ公式の拡張はあるだろうか．すなわち，ジャック関数を行列式（のようなもの）で表示する式を得たい．λ のヤング図形が長方形の形をしている場合に限るが，次のような式を得た．

定理 3.1. m,n,L を正の整数とする．このとき，

$$\begin{aligned} Q_{(L^n)}^{(1/m)} &= \frac{n!\,(m!)^n}{(mn)!}\det{}^{[2m]}(g^{(1/m)}_{L+i_1+i_2+\cdots+i_m-i_{m+1}-\cdots-i_{2m}})_{[n]}, \\ P_{(n^L)}^{(m)} &= \frac{n!\,(m!)^n}{(mn)!}\det{}^{[2m]}(e_{L+i_1+i_2+\cdots+i_m-i_{m+1}-\cdots-i_{2m}})_{[n]}. \end{aligned}$$

ここで，$g_k^{(\alpha)} := Q_{(k)}^{(\alpha)}$ で，また e_k は基本対称関数であり，$e_k = P_{(1^k)}^{(\alpha)}$ である．

証明．定理3.1の1つ目の式は，2つ目の式とジャック関数の双対性 [Mac, VI-10]

$$\omega_\alpha(P_\lambda^{(\alpha)}) = Q_{\lambda'}^{(1/\alpha)}$$

から分かる．基本対称関数の母関数は，

$$E_x(z) = \prod_{i=1}^{\infty}(1+x_i z) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(x) z^k$$

と与えられるので，定理3.1の2つ目の式は次のような形に書き換えられる．

$$\widehat{D}_n^{[2m]}(f) = P_{(n^L)}^{(m)}(x), \qquad f(z) = z^{-L}E_x(z). \tag{3.1}$$

ただし，ここで x_i は $\sum_i |x_i| < \infty$ を満たすような複素数であると仮定してもよい．

式(3.1)を示そう．定理2.2の記号で，

$$S_f(z_1,\ldots,z_n;L) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{\infty}(1+x_i z_k) = \sum_\lambda Q_{\lambda'}^{(1/\alpha)}(x) Q_\lambda^{(\alpha)}(z_1,\ldots,z_n)$$

である．ここで第2の等式はジャック関数の双対コーシー恒等式である（[Mac, VI (5.4)]）．よって，

$$\gamma(f,n,m,L) = Q_{(n^L)}^{(m)}(x)$$

となり，定理2.2から式(3.1)を得る．□

定理で $m=1$ とすると，

$$s_{(L^n)} = \det(h_{L+i-j})_{1\le i,j\le n}, \qquad s_{(n^L)} = \det(e_{L+i-j})_{1\le i,j\le n}$$

となるが，これはシューア関数のヤコビ・トゥルディ公式の長方形ヤング図形の場合である．従って，我々は定理3.1を**長方形ジャック関数に対するヤコビ・トゥルディ型公式**とみなすことができる．

3.2 僅かな拡張

定理3.1を長方形以外の場合に拡張できるだろうか．定理3.1は次のように僅かに拡張される．

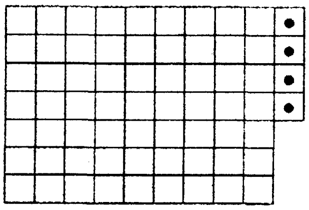
定理 3.2. $n' \le n$ とし，$\lambda = ((L+1)^{n'}\ L^{n-n'})$, *i.e.*, $\lambda' = (n^L\ n')$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} Q_\lambda^{(1/m)} &= C(m,n,n')\cdot \det{}^{[2m]}(g^{(1/m)}_{\lambda_{i_1}-i_1-\cdots-i_m+i_{m+1}+\cdots+i_{2m}})_{[n]}, \\ P_{\lambda'}^{(m)} &= C(m,n,n')\cdot \det{}^{[2m]}(e_{\lambda_{i_1}-i_1-\cdots-i_m+i_{m+1}+\cdots+i_{2m}})_{[n]}. \end{aligned}$$

ここで，定数 $C(m,n,n')$ は次で定まる．

$$C(m,n,n') = \frac{n'!\,(n-n')!\,(m!)^n}{(mn)!}\prod_{i=0}^{n'-1}\frac{1+m(n-n'+i)}{1+mi}.$$

定理 3.2のλのヤング図形は，次のように長方形の右に 1 列付け加えたような形をしている．

$\lambda =$ 

定理 3.2 の証明を与えよう．シューア関数は，以下のような形にジャック関数で展開される．

$$s_\lambda = P_\lambda^{(\alpha)} + \sum_{\mu:\mu<\lambda} \mathcal{K}^{(\alpha)}(\lambda,\mu) P_\mu^{(\alpha)}, \qquad \mathcal{K}^{(\alpha)}(\lambda,\mu) \in \mathbb{Q}(\alpha). \tag{3.2}$$

$s_\lambda = P_\lambda^{(1)}$ だから，$\mu < \lambda$ ならば $\mathcal{K}^{(1)}(\lambda,\mu) = 0$ である．

$\ell(\lambda) \le n$ なる分割λに対し，$N_n^{(\alpha)}(\lambda) := \langle P_\lambda^{(\alpha)}, P_\lambda^{(\alpha)} \rangle'_{n,\alpha}$ とおく．次の積分を考える．

$$\mathcal{I}_n^{(\alpha)}(\lambda) := \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{T}^n} \overline{s_\lambda(z_1,\ldots,z_n)} \prod_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}(1-x_i z_j)^{-1/\alpha} \cdot |V(z_1,\ldots,z_n)|^{2/\alpha} \mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_n. \tag{3.3}$$

ジャック関数のコーシー恒等式

$$\sum_\nu Q_\nu^{(\alpha)}(x) P_\nu^{(\alpha)}(y) = \prod_{i,j\ge1} \frac{1}{(1-x_i y_j)^{1/\alpha}}$$

から，まず

$$\mathcal{I}_n^{(\alpha)}(\lambda) = \sum_\nu Q_\nu^{(\alpha)}(x) \left\langle P_\nu^{(\alpha)}, s_\lambda \right\rangle'_{n,\alpha}$$

である．さらに式 (3.2) 及び直交性から，

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n^{(\alpha)}(\lambda) =& \sum_\nu Q_\nu^{(\alpha)}(x) \left\langle P_\nu^{(\alpha)}, P_\lambda^{(\alpha)} + \sum_{\mu:\mu<\lambda} \mathcal{K}^{(\alpha)}(\lambda,\mu) P_\mu^{(\alpha)} \right\rangle'_{n,\alpha} \\ =& N_n^{(\alpha)}(\lambda) Q_\lambda^{(\alpha)}(x) + \sum_{\substack{\mu:\mu<\lambda \\ \ell(\mu)\le n}} \mathcal{K}^{(\alpha)}(\lambda,\mu) N_n^{(\alpha)}(\mu) Q_\mu^{(\alpha)}(x) \end{aligned} \tag{3.4}$$

となる．一方，表示 $s_\lambda(z_1,\ldots,z_n) = \det(z_j^{\lambda_i+n-i})_{1\le i,j\le n}/V(z_1,\ldots,z_n)$ を用いると命題 2.1 と同様にして

$$\mathcal{I}_n^{(1/m)}(\lambda) = \det{}^{[2m]}(g^{(1/m)}_{\lambda_{i_1}-i_1-\cdots-i_m+i_{m+1}+\cdots+i_{2m}})_{[n]} \tag{3.5}$$

を示せる．今 $\lambda' = (n^L\ n')$ とすると，$|\lambda| = |\mu|$ かつ $\ell(\mu) \le n$ なる任意の $\mu(\ne \lambda)$ に対し，$\lambda < \mu$ が成り立ち，したがって $\mathcal{K}^{(\alpha)}(\lambda,\mu) = 0$ を得る．以上より，

$$\det{}^{[2m]}(g^{(1/m)}_{\lambda_{i_1}-i_1-\cdots-i_m+i_{m+1}+\cdots+i_{2m}})_{[n]} = N_n^{(1/m)}(\lambda) Q_\lambda^{(1/m)}$$

を得る．(2.1) と (2.2) から $N_n^{(1/m)}(\lambda)^{-1} = C(m,n,n')$ が確かめられる．このようにして定理 3.2 を得る．

注意 3.1. 定理 3.2 はごく最近 [BBL] により独立に示されている．手法も本質的に同じである．

4 終りに

ハイパー行列式の類似物として，ハイパーパフィアンも考えられている（[LT1, Mat1, Mat2, Mat4, Mat5]）．筆者（[Mat1, Mat2, Mat4, Mat5]））は，それらを用いてシューア関数の複数個の積を表す等式を得ている．

上で見たきたように，ジャック関数とハイパー行列式は "相性が良い" ように見える．§3 の結果から次のような問題が自然に考えられる．（ほぼ）長方形の場合以外のジャック関数は，ハイパー行列式で表示できるだろうか．定理 3.1 と定理 3.2 を見ると，一般に $Q_\lambda^{(1/m)}$ は

$$\det{}^{[2m]}(g^{(1/m)}_{\lambda_{i_1}-i_1-\cdots-i_m+i_{m+1}+\cdots+i_{2m}})_{[\ell(\lambda)]}$$

の定数倍なのではないかと安直に考えてしまいたくなるが，それは式 (3.4) と (3.5) を比較して分かるようにそれは一般には正しくない．

また，シューア関数はヤコビ・トゥルディ公式以外にも行列式表示を持つ．例えば，ヴァンデルモンド型行列式の比

$$s_\lambda(x_1,\dots,x_n)=\frac{\det(x_i^{\lambda_j+n-j})}{\det(x_i^{n-j})}$$

やジャンベリ (Giambelli) の公式

$$s_\lambda=\det(s_{(a_i|b_j)})_{1\le i,j\le d},\qquad (a_1,\dots,a_d|b_1,\dots,b_d) \text{ は } \lambda \text{ のフロベニウス表示}$$

がある．これらは（ハイパー行列式を用いて）ジャック関数へと拡張されないだろうか．ジャック関数とハイパー行列式の，未だ知られざる "相性の良さ" を発見する事は興味深い問題である．

参考文献

[AAR] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy, "Special Functions", Encyclopedia Math. Appl. 71, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[BBL] H. Belbachir, A. Boussicault, and J.-G. Luque, Hankel hyperdeterminants, rectangular Jack polynomials and even powers of the Vandermonde, arXiv:0709.3021.

[BD] D. Bump and P. Diaconis, Toeplitz minors, J. Combin. Theory Ser. A **97** (2002), 252–271.

[C] A. Cayley, On the theory of determinants, Collected Papers, vol. 1 (Cambridge University Press, Cambridge, 1889), 63–80.

[LT1] J.-G. Luque and J.-Y. Thibon, Pfaffian and Hafnian identities in shuffle algebras, Adv. in Appl. Math. **29** (2002), 620-646.

[LT2] —, Hankel hyperdeterminants and Selberg integrals, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003), 5267–5292.

[Mac] I. G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials", second ed., Oxford University Press, Oxford, 1995.

[Mat1] 松本 詔, ハイパー行列式とそのシューア関数への応用, 第 11 回代数学若手研究会, 11 ページ (EPrint Series of Department of Mathematics, Hokkaido University, http://eprints.math.sci.hokudai.ac.jp/archive/00001576/).

[Mat2] —, ハイパー行列式と対称関数, 日本数学会 2006 年度秋季総合分科会 無限可積分系セッション 講演アブストラクト.

[Mat3] —, 矩形ヤング図形に対応したジャック関数の Jacobi-Trudi 型公式, 2006 年度表現論シンポジウム 講演集, 134-143.

[Mat4] S. Matsumoto, Hyperdeterminants and hyperpfaffians: applications to Schur and Jack functions, 博士論文, 九州大学 (2007).

[Mat5] —, Hyperdeterminantal expressions for Jack functions of rectangular shapes, J. Algebra, at press.

[Mat6] —, Moments of characteristic polynomials for compact symmetric spaces and Jack polynomials, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007), 13567-13586.

[Me] M. L. Mehta, "Random Matrices", 3rd ed., Academic Press, 2004.

[TW] C. A. Tracy and H. Widom, Correlation functions, cluster functions, and spacing distributions for random matrices, J. Statist. Phys. **92** (1998), 809–835.