数理解析研究所講究録
第 1655 巻 2009 年 96-100

不動点組合せ子の非循環性と関連する性質について*

岩見 宗弘 (Munehiro Iwami)
島根大学 総合理工学部
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University
Matsue, Shimane, Japan, 690-8504
e-mail: munehiro@cis.shimane-u.ac.jp

概要

本稿では, 不動点組合せ子の非循環性, 非基礎ループ性と停止性について述べる. 最初に Turing の不動点組合せ子 $\mathbf{U}$[1], [5] が $\mathbf{U}$-項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが, 非循環性を持つことを示す. 次に Curry らの不動点組合せ子 $\mathbf{Y}$[1], [2] も $\mathbf{Y}$-項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが, 非循環性を持つことを示す. さらに, 我々は組合せ子 $\mathbf{U}$ が持つ書換え規則の右辺を一般化した組合せ子 $\mathbf{U}^n$ を提案し, $\mathbf{U}^n$-項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが, 非循環性を持つことを示す.

1 準備

本稿の定義は文献 [3], [4], [6] に準ずる.

シグネチャ$\mathcal{F}$ を引数を持つ**関数記号**の集合とする. 引数が 0 の関数記号を**定数**と呼ぶ. **変数**の可算無限集合を $\mathcal{V}$ とする ($\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \emptyset$). 構文的等式を $\equiv$ で表す. $\mathcal{F}$ 上の**項**の集合 $T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ を次のように帰納的に定義する. (1) $\mathcal{V} \subseteq T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ (2) f を n 引数関数記号 $(n \geq 0)$, $t_1,\cdots,t_n \in T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ ならば $f(t_1,\cdots,t_n) \in T(\mathcal{F},\mathcal{V})$. 変数を含まない項を**基礎項**といい, 基礎項全体の集合を $T(\mathcal{F})$ により表す. シグネチャ$\mathcal{F} \cup \{\square\}$ 上の項を**文脈**という. すなわち, 0 個以上のホール $\square$ を含む項の集合 $T(\mathcal{F} \cup \{\square\},\mathcal{V})$ を次のように帰納的に定義する. (1) $\mathcal{V} \subseteq T(\mathcal{F} \cup \{\square\},\mathcal{V})$, (2) $\square \in T(\mathcal{F} \cup \{\square\},\mathcal{V})$, (3) f を n 引数関数記号 $(n \geq 0)$, $t_1,\cdots,t_n \in T(\mathcal{F} \cup \{\square\},\mathcal{V})$ ならば $f(t_1,\cdots,t_n) \in T(\mathcal{F} \cup \{\square\},\mathcal{V})$. 文脈 C がホール $\square$ を 1 つだけ含むとき, $C[\,]$ と表す. $C[t]$ は文脈 $C[\,]$ のホール $\square$ を項 t で置き換えた結果である. $t \equiv C[s]$ として表すことができるならば, s は t の**部分項**であるといい, $s \trianglelefteq t$ と表す. 項 t に出現する変数の集合を $Var(t)$ と表す. **代入** σ を $\mathcal{V}$ から $T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ への定義域 $Dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{V} \mid \sigma(x) \not\equiv x\}$ が有限である写像とする. すべての代入 σ は項 $f(t_1,\cdots,t_n) \in T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ に対して, $\sigma(f(t_1,\cdots,t_n)) = f(\sigma(t_1),\cdots,\sigma(t_n))$ を満たす写像 $\sigma : T(\mathcal{F},\mathcal{V}) \to T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ へ拡張できる. 以下では, $\sigma(t)$ の代わりに $t\sigma$ という記法を使用

*This paper is an extended abstract and the detailed version will be published elsewhere.

する．書換え規則 $l \rightarrow r$ は $T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ 上の方向付けられた等式であり，次の条件を満たす：$l \notin \mathcal{V}$ かつ $Var(r) \subseteq Var(l)$. **項書換えシステム (TRS)** は書換え規則の集合である．TRS $\mathcal{R}$ により項 s が項 t に書換えられるとは，ある代入 σ, 文脈 $C[\,]$ と書換え規則 $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$ が存在し $s \equiv C[l\sigma]$ かつ $t \equiv C[r\sigma]$ を満たすときをいい，$s \rightarrow_{\mathcal{R}} t$ と表す．項 $l\sigma$ を**リデックス**という．項 s 中のリデックス Δ を書換えることにより t が得られるとき，$s \rightarrow^{\Delta} t$ と表す．TRS $\mathcal{R}$ が無限書換え列 $t_0 \rightarrow_{\mathcal{R}} t_1 \rightarrow_{\mathcal{R}} t_2 \rightarrow_{\mathcal{R}} \cdots$ を持たないとき, **停止性を持つ**という．TRS $\mathcal{R}$ の書換え $\rightarrow_{\mathcal{R}}$ の推移的閉包を $\rightarrow^{+}_{\mathcal{R}}$ で表す．TRS $\mathcal{R}$ において, 書換え $t \rightarrow^{+}_{\mathcal{R}} t$ を**循環**であるという．TRS $\mathcal{R}$ が循環書換えを持たないとき, **非循環性を持つ**という．$C[\,]$ を文脈, σ を代入とする．TRS $\mathcal{R}$ において, 書換え $t \rightarrow^{+}_{\mathcal{R}} C[t\sigma]$ を**ループ**という．TRS $\mathcal{R}$ がループを持たないとき, **非ループ性を持つ**という．TRS $\mathcal{R}$ において, 書換え $t \rightarrow^{+}_{\mathcal{R}} C[t]$ を**基礎ループ**という．TRS $\mathcal{R}$ が基礎ループを持たないとき, **非基礎ループ性を持つ**という．

以下では, 組合せ子 Δ を定数として扱う．また, シグネチャ $\mathcal{F}(\Delta)$ を定数 Δ と引数 2 の関数記号 a だけからなる集合とする．$\mathcal{F}(\Delta)$ 上の変数が出現しないすべての項を**基礎 Δ-項**といい, 基礎 Δ-項全体の集合を $CL(\Delta)$ と表す．代入は写像 $\sigma : \mathcal{V} \rightarrow CL(\Delta)$ と制限し, 組合せ子 Δ に対する TRS を $\mathcal{R}(\Delta)$ と表す．以降の節では, $CL(\Delta)$ 上の書換え関係 $\rightarrow_{\mathcal{R}(\Delta)}$ を考える．

2 不動点組合せ子の性質

定義 2.1 Δ-項の長さを次のように再帰的に定義する．

(1) $|\,\Delta\,| = 1$,

(2) $|\,a(X, Y)\,| = |\,X\,| + |\,Y\,|$ $(X, Y \in CL(\Delta))$.

定義 2.2 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$ のシグネチャ $\mathcal{F}(\mathbf{Y})$ を定数 $\mathbf{Y}$ と 2 引数関数記号 a から成る集合とし, *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$ を次のように定義する：

$$\mathcal{R}(\mathbf{Y}) = \{a(\mathbf{Y}, x) \rightarrow a(x, a(\mathbf{Y}, x))\}.$$

定理 2.3 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$ は $CL(\mathbf{Y})$ 上で停止性と非基礎ループ性を持たないが，非循環性を持つ．

(証明) TRS $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$ は次のような無限書換え列が存在するから $CL(\mathbf{Y})$ 上で停止性と非基礎ループ性を持たない．

$\underline{a(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})} \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{Y})} a(\mathbf{Y}, \underline{a(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})}) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{Y})} a(\mathbf{Y}, a(\mathbf{Y}, \underline{a(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})})) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{Y})} \cdots$.

$\mathbf{Y}$-文脈に関する帰納法より $CL(\mathbf{Y})$ 上の TRS $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$ による書換えで $\mathbf{Y}$-項の長さが次のように単調増加することを示すことができる．すなわち, TRS $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$ は非循環性を持つ．

$s \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{Y})} t$ $(s, t \in CL(\mathbf{Y}))$ とする．ある $X \in CL(\mathbf{Y})$ に対して, $s \equiv C[a(\mathbf{Y}, X)]$, $t \equiv C[a(X, a(\mathbf{Y}, X))]$ と表される．このとき, $|\,s\,| < |\,t\,|$ を $\mathbf{Y}$-文脈に関する帰納法により示す．

- $C[\,] = \Box$ のとき；$s \equiv a(\mathbf{Y}, X) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{Y})} a(X, a(\mathbf{Y}, X)) \equiv t$. $|\,s\,| = 1 + |\,X\,| < 2\,|\,X\,| + 1 = |\,t\,|$.

- $C[\,] = a(Z, C'[\,])$ のとき；$s \equiv a(Z, C'[a(\mathbf{Y}, X)]) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{Y})} a(Z, C'[a(X, a(\mathbf{Y}, X))]) \equiv t$. 帰納法の仮定より $\mid C'[a(\mathbf{Y}, X)] \mid < \mid C'[a(X, a(\mathbf{Y}, X))] \mid$. したがって，$\mid s \mid = \mid Z \mid + C'[a(\mathbf{Y}, X)] < \mid Z \mid + C'[a(X, a(\mathbf{Y}, X))] = \mid t \mid$ が成立する.

- $C[\,] = a(C'[\,], Z)$ のとき； 前項と同様. □

定義 2.4 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ のシグネチャ $\mathcal{F}(\mathbf{U})$ を定数 $\mathbf{U}$ と 2 引数関数記号 a から成る集合とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ を次のように定義する：

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}) = \{a(a(\mathbf{U}, x), y) \rightarrow a(y, a(a(x, x), y))\}.$$

定理 2.5 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ は $CL(\mathbf{U})$ 上で停止性と非基礎ループ性を持たないが，非循環性を持つ.

(証明) TRS $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ は次のような無限書換え列が存在するから $CL(\mathbf{U})$ 上で停止性と非基礎ループ性を持たない.

$\underline{a(a(\mathbf{U}, \mathbf{U}), \mathbf{U})} \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{U})} a(\mathbf{U}, \underline{a(a(\mathbf{U}, \mathbf{U}), \mathbf{U})}) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{U})} a(\mathbf{U}, a(\mathbf{U}, \underline{a(a(\mathbf{U}, \mathbf{U}), \mathbf{U})})) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{U})} \cdots$.

U-文脈に関する帰納法より $CL(\mathbf{U})$ 上の TRS $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ による書換えで U-項の長さが次のように単調増加することを示すことができる. すなわち, TRS $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ は非循環性を持つ.

$s \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{U})} t$ $(s, t \in CL(\mathbf{U}))$ とする. ある X, $Y \in CL(\mathbf{U})$ に対して, $s \equiv C[a(a(\mathbf{U}, X), Y)]$, $t \equiv C[a(Y, a(a(X, X), Y))]$ と表される. このとき, $\mid s \mid < \mid t \mid$ を U-文脈に関する帰納法により示す.

- $C[\,] = \square$ のとき；$s \equiv a(a(\mathbf{U}, X), Y) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{U})} a(Y, a(a(X, X), Y)) \equiv t$. $\mid s \mid = 1 + \mid X \mid + \mid Y \mid < 2 \mid X \mid + 2 \mid Y \mid = \mid t \mid$.

- $C[\,] = a(Z, C'[\,])$ のとき；$s \equiv a(Z, C'[a(a(\mathbf{U}, X), Y)]) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{U})} a(Z, C'[a(Y, a(a(X, X), Y))]) \equiv t$. 帰納法の仮定より $\mid C'[a(a(\mathbf{U}, X), Y)] \mid < \mid C'[a(Y, a(a(X, X), Y))] \mid$. したがって, $\mid s \mid = \mid Z \mid + C'[a(a(\mathbf{U}, X), Y)] < \mid Z \mid + C'[a(Y, a(a(X, X), Y))] = \mid t \mid$ が成立する.

- $C[\,] = a(C'[\,], Z)$ のとき； 前項と同様. □

定義 2.6 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{U}^n)$ のシグネチャ $\mathcal{F}(\mathbf{U}^n)$ を定数 $\mathbf{U}^n$ と 2 引数関数記号 a から成る集合とし，*TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{U}^n)$ を次のように定義する：

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}^n) = \{a(a(\mathbf{U}^n, x), y) \rightarrow a(y, a(a(\cdots a(a(\overbrace{x, x), x) \cdots, x}^{n+1}), y))\} (n \geq 0).$$

このとき, $\mathbf{U}^0 = \delta[7]$ ($\mathbf{O}[5], \mathbf{SI}[1]$) かつ $\mathbf{U}^1 = \mathbf{U}$ [5] ($\mathbf{A}$ [1]) である.

定理 2.7 *TRS* $\mathcal{R}(\mathbf{U}^n)$ は $CL(\mathbf{U}^n)$ 上で停止性と非基礎ループ性を持たないが，非循環性を持つ $(n \geq 0)$.

(証明)

- $n=0$ のとき；$\mathbf{U}^0=\mathbf{O}$ より，文献 [3] から $\mathcal{R}(\mathbf{U}^0)$ は停止性と非基礎ループ性を持たないが，非循環性を持つ.

- $n=1$ のとき；$\mathbf{U}^1=\mathbf{U}$ より，定理 2.5 から $\mathcal{R}(\mathbf{U}^1)$ は停止性と非基礎ループ性を持たないが，非循環性を持つ.

- $n>1$ のとき；TRS $\mathcal{R}(\mathbf{U}^n)$ は次のような無限書換え列が存在するから $CL(\mathbf{U}^n)$ 上で停止性と非基礎ループ性を持たない.

$$\underline{a(a(\mathbf{U}^n,\mathbf{U}^n),\mathbf{U}^n)} \to_{\mathcal{R}(\mathbf{U}^n)} a(\mathbf{U}^n,\, a(a(\cdots \overbrace{\underline{a(a(\mathbf{U}^n,\mathbf{U}^n),\mathbf{U}^n)},\cdots,\mathbf{U}^n)}^{n+1},\mathbf{U}^n)) \to_{\mathcal{R}(\mathbf{U}^n)} \cdots.$$

$\mathbf{U}^n$-文脈に関する帰納法より $CL(\mathbf{U}^n)$ 上の TRS $\mathcal{R}(\mathbf{U}^n)$ による書換えで $\mathbf{U}^n$-項の長さが次のように単調増加することを示すことができる．すなわち, TRS $\mathcal{R}(\mathbf{U}^n)$ は非循環性を持つ.

$s \to_{\mathcal{R}(\mathbf{U}^n)} t$ $(s,t\in CL(\mathbf{U}^n))$ とする．ある $X, Y \in CL(\mathbf{U}^n)$ に対して, $s \equiv C[a(a(\mathbf{U}^n, X), Y)]$, $t \equiv C[a(Y,\, a(a(\cdots,\, a(a(X,\, X),\, X),\, \cdots,\, X),\, Y))]$ と表される．このとき, $|\, s\,| < |\, t\,|$ を $\mathbf{U}^n$-文脈に関する帰納法により示す.

  - $C[\,]=\Box$ のとき；$s\equiv a(a(\mathbf{U}^n,X),Y) \to_{\mathcal{R}(\mathbf{U}^n)} a(Y,\, a(a(\cdots,\, a(a(X,\, X),\, X),\, \cdots,\, X),\, Y))\equiv t$. $|\, s\,| = 1 + |\, X\,| + |\, Y\,| < |\, X\,| + n\,|\, X\,| + 2\,|\, Y\,| = |\, t\,|$.
  - $C[\,]=a(Z,\, C'[\,])$ のとき；$s\equiv a(Z,\, C'[a(a(\mathbf{U}^n,\, X),\, Y)]) \to_{\mathcal{R}(\mathbf{U}^n)} a(Z,\, C'[a(Y,\, a(a(\cdots,\, a(a(X,\, X),\, X),\, \cdots,\, X),\, Y))] \equiv t$. 帰納法の仮定より $|\, C'[a(a(\mathbf{U}^n,\, X),\, Y)]\,| < |\, C'[a(\mathbf{U}^n,\, a(a(\cdots\, a(a(\mathbf{U}^n,\, \mathbf{U}^n),\, \mathbf{U}^n),\, \cdots,\, \mathbf{U}^n),\, \mathbf{U}^n))]\,|$. したがって, $|\, s\,| = |\, Z\,| + C'[a(a(\mathbf{U}^n,X),Y)] < |\, Z\,| + C'[a(\mathbf{U}^n,\, a(a(\cdots\, a(a(\mathbf{U}^n,\, \mathbf{U}^n),\, \mathbf{U}^n),\, \cdots,\, \mathbf{U}^n),\, \mathbf{U}^n))] = |\, t\,|$ が成立する.
  - $C[\,]=a(C'[\,],Z)$ のとき； 前項と同様. □

3 むすび

本稿では, 不動点組合せ子の非循環性, 非基礎ループ性, 停止性について述べた．最初に Turing の不動点組合せ子 $\mathbf{U}$ が持つ 1 つの書換え規則だけから成る項書換えシステムが $\mathbf{U}$-項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが, 非循環性を持つことを示した．次に Curry らの不動点組合せ子 $\mathbf{Y}$ が持つ 1 つの書換え規則だけから成る項書換えシステムも $\mathbf{Y}$-項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが, 非循環性を持つことを示した．さらに, 組合せ子 $\mathbf{U}$ が持つ書換え規則の右辺を一般化した組合せ子 $\mathbf{U}^n$ を提案し, $\mathbf{U}^n$ が持つ 1 つの書換え規則だけから成る項書換えシステムが $\mathbf{U}^n$-項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが, 非循環性を持つことを示した．本稿で得られた結果を表 1 にまとめる.

表 1: 不動点組合せ子が持つ性質

非循環性 $\Longleftarrow$ 非基礎ループ性 $\Longleftarrow$ 非ループ性 $\Longleftarrow$ 停止性
非循環性 $\not\Longrightarrow$ 非基礎ループ性 $\not\Longrightarrow$ 非ループ性 $\not\Longrightarrow$ 停止性

組合せ子	非循環性	非基礎ループ性	非ループ性	停止性
$\mathbf{Y}[1,2]$	$\odot$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$
$\mathbf{U}[5](\mathbf{A}[1])$	$\odot$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$
$\mathbf{U}^n$ **(本研究)**	$\odot$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$

($\odot$: 成立 **(本研究)**, $\otimes$: 不成立 **(本研究)**, $\times$: 不成立)

参考文献

[1] Barendregt,H.P.: The Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics, 2nd revised edition, North-Holland (1984).

[2] Curry,H.B. and Feys,R.: Combinatory Logic, Vol.1, North-Holland (1958).

[3] 岩見宗弘: 組合せ子の非循環性と関連する性質について, 情報処理学会論文誌 プログラミング, 2(2), pp.97–104 (2009).

[4] Ohlebusch,E.: Advanced Topics in Term Rewriting, Springer-Verlag (2002).

[5] Smullyan,R.: To Mock a Mockingbird, Knopf, New York (1985).

[6] Terese: Term Rewriting Systems, Cambridge University Press (2003).

[7] Zantema, H.: Normalization of infinite terms, Proc. of 19th International Conf. of Rewriting Techniques and Application, LNCS, 5117, pp.441–455 (2008).