数理解析研究所講究録
第 1656 巻 2009 年 110-117

D. G. Higman の組合せ論・群論についての後期の仕事を巡って
(On the late work of D. G. Higman on combinatorics and groups)

坂内英一（九大数理）
Eiichi Bannai (Kyushu University)

この原稿は京大数理研研究集会「有限群・頂点作用素代数と組合せ論」（代表者山田裕理）(2009 年 1 月 6 日–9 日）での私の講演（1 月 9 日）の記録です。講演は英語で行いましたが、報告集は日本語で書きます。また講演は OHP (書画カメラ）で行いましたが、そこで見せた写真およびプレプリントの写しなどはここでは省略しました。

この講演の目的は次の 3 つでした。
(1) D. G. Higman (1928-2006) および彼の数学について紹介すること。
(2) 特に、1980 年代以降の彼の晩年（後期）の仕事について紹介すること。（彼のやりたかった数学は何だったのか？を私なりに纏めること。）
(3) 関連した私達の現在進行中の仕事 (Coherent configurations and Euclidean designs) を紹介すること。

御存知の方も多いと思いますが、 D. G. Higman は群論および組合せ論において優れた仕事をしていますが、2006 年 2 月に亡くなりました。Michigan 大学で同僚でもあった Robert L. Griess, Jr. が音頭を取って、 D. G. Higman の追悼記念の特別号を Michigan Mathematical Journal から出版することを目指して、Leonard Scott, Cheryl E. Praeger と私の 3 名が加わった計 4 名からなる委員会が活動を始めました。この追悼記念号は関連した数学者による 15 編の研究論文と、
The Mathematics of Donald Gordon Higman, by Eiichi Bannai, Robert L. Griess, Jr., Cheryl E. Praeger, Leonard Scott
という biography および関係する数学者の個人的な思い出なども含む論説からなります。この追悼記念号全体は 2009 年 4 月に印刷に回っています。従って 2009 年中にはこの報告集の出版と前後して出版されると思いますので、詳しくは Michigan Math. Journal を直接参照していただけたらと思います。

D. G. Higman (Sept 20, 1928–Feb 13, 2006) の略歴

Ph. D, 1952, University of Illinois (adviser: Reinhold Baer)
McGill University (1952—)
Montana State University (1954—)
University of Michigan (1956—) (Full Professor, 1960-1998)

Visits to Japan: 1966, 1974, 1994, 1997.

論文

詳しいリストは Michigan Journal of Mathematics に出る論説 [1] を参照して下さい。Math Scinet に出ているのが 48 編、それ以外の論文、プレプリントなどが約 10 編あります。これらのプレプリントなどは将来何らかの形で web などで公表するようにしたいというのが Griess の考えです。(具体的にどうするかはまだ未定と思われます。プレプリントは直ぐ発表できそうなものとほとんど未完成のものまで色々のものがあります。専門家に取って、興味あるものもいくつかあると思われます。)

Mathematical work of D. G. Higman

1950 年代の仕事は主に有限群についてと表現論についてです。
1960 年代の仕事は置換群、有限単純群が主な主題であり、次のようなものが目覚ましい仕事と思われます。
• Geometry of classical groups
(Geometric ABA-groups, Flag transitive subgroups of projective groups)
• Rank 3 permutation groups (1964—)
• Discovery of Higman-Sims simple group of order $4,352,000 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$ (1968)
• Intersection matrices for finite permutation groups (1967)
(ここで permutation group of maximal diameter という概念を提唱かつ研究していますが、これは後で Norman L. Biggs により distance-transitive graph (group) (距離可移グラフ) と呼ばれた概念と一致しています。)
1970 年頃を境に、次の種類の研究も始まります。
• Strongly regular graphs (study of 4-vertex conditions)
• Krein condition $q_{ij}^k \geq 0$ (study of generalized polygons)
• **coferent configurations and association schemes**
• **Applications of coferent configurations and association schemes to finite geometries**
(最後の太文字にした２つの主題が Higman のそれ以後の後期の仕事の主題になります。)

なお、Higman-Sims 群（グラフ）は、François Jaeger による Higman-Sims 群（グラフ）上のスピンモデルの構成において非常に重要であり、トポロジー、数理物理学の方面からも興味を持たれています。詳しくは次の論文を参照して下さい。
F. Jaeger: Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial, Geom. Dedicata 44 (1992), 23-52.

Higman-Sims グラフについての歴史的コメント

Higman-Sims 群は parameter $(v, k, \lambda, \mu) = (100, 22, 0, 6)$ の strongly regular graph を構成することにより、そのグラフの自己同型群として 1968 年の論文で得られたのは御存知の通りです。

今まであまり知られていなくて興味深い歴史的な事実は、この parameter を持つ strongly regular graph が 1956 年の Michigan State University の Statistics Department の Dale M. Mesner の Ph. D thesis において具体的に構成されていたとのことです。良く知られているように、このグラフは Witt $3-(22,6,1)$ デザインから、言い換えれば Mathieu 群 M_{22} から、構成されます。Mesner は Witt $3-(22,6,1)$ デザインのことも含めてそれらのことは全く知らずに、直接グラフの構成に成功しています。ただし自己同型群については調べていませんでした。もう少し言うと、$3-(22,6,1)$ デザインは $2-(22,6,5)$ デザインですが、ある $2-(22,6,5)$ デザインを作ってそれから strongly regular graph を作ったようです。(この parameter を持つ strongly regular graph の一意性はその後示されているので、Mesner の作ったグラフは Higman-Sims グラフと同型です。) この Mesner の仕事は、組合せ論および関係する統計学の一部の狭い範囲の何名かの専門家には知られていたとのことですが、D. G. Higman 本人および Griess, 私も含めて群論関係のほとんどの人には全く知られていなかったようです。(Griess は 2007 年秋に彼宛の e-mail でそれを初めて知ったとのことですが、誰からの e-mail だったか記録を無くしてしまって分からないとのことです。ただし Mesner の構成が数学的に正しいことは何名かの研究者が既に確認済です。) このことは、統計学の方向からのアソシエーションスキームなどの研究が、我々が理解していた以上に深かったとも言えると思います。(ただし当時その分野で Mesner の仕事の先駆性、重要性を見抜く人が周りにいなかったことも事実と言えるでしょう。)
これらのことの詳細は、Michigan Math. J. に出る我々の論説 [1] およびその references に挙げてある論文などを参照して下さい。M. Klin によるこの件に関しての詳しいノート (preprint?) がありますが、未発表のようです。興味のある方は彼に直接問い合わすのが良いと思います。

群論 versus 組合せ論

専門家にとっては非常に良く知られたことですが、群論と組合せ論の種々の概念は次のような対応関係があります。左辺が群論的概念で、右辺が対応する組合せ論的概念です。

(transitive) rank 3 perm. group$\longleftrightarrow$ strongly regular graph
(with subdegrees $1, k, k(k-1)$ $\longleftrightarrow$ Moore graph of diameter 2 with valency k)

(transitive) perm. group of maximal diameter$\longleftrightarrow$ distance regular graph
(=distance-transitive group (graph)) $\longleftrightarrow$ (P-poly. assoc. scheme)

transitive perm. group$\longleftrightarrow$ association scheme

(general) perm. group$\longleftrightarrow$ coherent configuration
(Here, general means not necessarily transitive. Also, note that the concept of coherent

configuration was first defined by D. G. Higman around 1970.)

Association Schemes and Coherent Configurations

これも専門家には良く知られていることであるが、 Association Schemes (以下 AS と略記) と Coherent Configurations (以下 CC と略記) について復習する。

群 G は有限集合 X に作用しているとする。(可移性は仮定しない。)
このとき G は $X \times X$ に作用するが、この G の orbits (軌道) を $\mathcal{O}_0, \dots \mathcal{O}_d$ で表わす。
このとき、$x, y \in X$ に対して、$(x,y) \in R_i \Leftrightarrow (x,y) \in \mathcal{O}_i$ $(i = 0, 1, \dots, d)$ と定義すると、$(X, \{R_i\}_{0 \le i \le d})$ は $\mathcal{O}_0 = \Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ の時 (すなわち G が X 上可移の時) は AS になり、一般の場合は CC になるという具合である。正確な定義を次に与えよう。

AS と CC の定義と性質

X を有限集合、$R_i \subset X \times X$ $(i = 0, 1, \dots, d)$ とし、次の条件を考える。
(1) $X \times X = R_0 \cup R_1 \cup \cdots \cup R_d$ and $R_i \cap R_j = \emptyset$, if $i \neq j$.
(2) $R_0 = \Delta (= \{(x,x) \mid x \in X\})$ or (2bis) $R_0 \cup R_1 \cup R_{r-1} = \Delta$.
(3) For each $i \in \{0, 1, \dots, d\}, \exists i' \in \{0, 1, \dots, d\}$ such that ${}^tR_i = R_{i'}$.
(4) $\forall i, j, k \in \{0, 1, \dots, d\}, |\{z \in X \mid (x,z) \in R_i, (z,y) \in R_j\}| = \text{const}(= p^k_{i,j})$, whenever $(x,y) \in R_k$.
このとき、$(X, \{R_i\}_{0 \le i \le d})$ が (1), (2), (3), (4) をみたせば AS であると言い、 (1), (2bis), (3), (4) をみたせば CC であると言う。(もちろん AS は CC の特別な場合である。AS は homogeneous な CC であるとも言われる。)

上で定義した AS, CC のいずれの場合も、関係 R_i に対応する隣接行列 A_i 達で生成される代数

$$\mathcal{A} = < A_0, A_1, \dots, A_d > \subset M_{|x|}(\mathbb{C})$$

を AS の時は Bose-Mesner 代数、CC の時は coherent algebra と呼ぶ。いずれも semi-simple な代数になる。D. G. Higman は coherent algebra の構造および表現についていくつかの論文で詳しく研究した。特に重要なのは、次の論文であろう。
(1) Coheremt Configurations, I, (Geom. Dedicara, 1973),
(2) Coheremt Configurations, II, (Geom. Dedicara, 1975),
(3) Coheremt Algebras, (Lin. Alg. Appl., 1987).

CC の特別なクラスが AS であり、その特別なものが可換 (commutative) な AS であり、更に特別なものが対称 (symmetric) な AS である。対称な AS の中で特に興味深い (重要な) クラスが、P-polynomial, Q-polynomial, あるいは P-and Q- polynomial AS と呼ばれるクラスであり、特に P-and Q- polynomial AS に関しては、Leonard, Bannai-Ito, Terwilliger などの研究の流れがあり、最近の Ito-Terwilliger の仕事は特別に目覚ましいものであり、P-and Q- polynomial AS の最終的な分類へ向けての大きな希望を与えるものである。また、P-and Q- polynomial AS 以外にも可換な AS とその指標表についていろいろな仕事が成されていることも注意しよう。
それらはさておいて、

(Proper な) CC で興味あるクラスはどのようなものであるか？

ということを考えたいと思う。D. G. Higman の後期（晩年）の仕事はこの問に答えようとの試みであった、と要約出来るのではないかというのが私の個人的意見である。

Proper な Coherent configuration (CC)

以下 $(X, \{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ を proper な CC とする。すなわち $R_0 \cup R_1 \cup R_{r-1} = \Delta$ で、$r \geq 2$ とする。このとき、$i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ に対して、$X_i = \{x \in X \mid (x, x) \in R_i\}$ とおく。X_i 達を fibers と呼ぶ。このとき、$X = X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_{r-1}$ (disjoint) が成り立つ。（ここで r は fibers の個数である。）
各 R_k $(k = 0, 1, \ldots, d)$ に対して、$\exists i, j \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ such that

$$R_k \subset X_i \times X_j.$$

各 $i, j \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ に対して、

$$s_{ij} = |k \in \{0, 1, \ldots, d\} \mid R_k \subset X_i \times X_j\}|$$

と定義する。（このとき $s_{ij} = s_{ji}$ が成り立つ。）このとき、$i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ 対して、$(X_i, \{R_h\})$ （ただし $(R_h \subset X_i \times X_i)$）を考えると、これはクラス $s_{ii} - 1$ の （すなわち relations の個数が s_{ii} の）AS になる。ここで、CC $(X, \{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ の type は対称行列（ただし $s_{ij} = s_{ji}$ なので左下の部分は通常省く）

$$\begin{bmatrix} s_{00} & s_{01} & \cdots & s_{0,r-1} \\ & s_{11} & & s_{1,r-1} \\ & & \ddots & \\ & & & s_{r-1,r-1} \end{bmatrix}$$

で表わされる。このとき $s_{ij} \leq \min\{s_{ii}, s_{jj}\}$ が一般に成り立つ。群 G が各 X_i に可移に作用するときは、π_i を G の X_i 上の作用の置換指標とするとき、$s_{ij} = (\pi_i, \pi_j)_G$ で与えられることに注意。（右辺は指標の内積を表わす。）

ここで我々が (Higman が) 考察したい CC は r および 各 s_{ij} がいずれも小さい場合である。（これは rank 3 permutation groups を考えたことにも通じるであろう。）特に、$r = 2$ かつ $\forall s_{ij} < 3$ の場合は次の types が興味深い。

$$(1)\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{bmatrix}, \quad (2)\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & 3 \end{bmatrix}, \quad (3)\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ & 3 \end{bmatrix}, \quad (4)\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ & 3 \end{bmatrix},$$

(1) の場合は通常の symmetric design が対応する。
(2) の場合は通常の quasi-symmetric design が対応する。
(3) の場合は Higman により、strongly regular design of the first kind,
(4) の場合は Higman により、strongly regular design of the second kind,
と呼ばれる。(1), (2) に関しては、組合せ論で詳しく研究されて来た。Higman は (3), (4) の２つの場合について、論文

Strongly regular designs and coherent configurations of type $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ & 3 \end{pmatrix}$, (Europ. J. Comb. 9 (1988),411-422),
Strongly regular designs of the second kind (Europ. J. Comb. 16 (1995),479-490)
でそれぞれ詳しく調べた。ここでは $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ & 3 \end{bmatrix}$ の場合についてもう少し詳しく見てみよう。
以下 $(X, \{R_i\}_{0\le i\le d})$ をこの type の CC とする。このとき、$r=2$ であり、X_0 を点の集合、X_1 をブロックの集合と考えます。この場合 $d=9$ になるので $(d+1)^3 = 1,000$ 個の p_{ij}^k 達がありますが、それらの間には多くの関係が存在します。
$|X_0| = n_1$, $|X_1| = n_2$ とおき、S でブロックのサイズを表わし、
a_1, b_1 で2つのブロックの intersection の2通りのサイズを、a_2, b_2 で2点を含むブロックの2通りのサイズを表わすとします。この場合の Higman の結果は、全ての parameters p_{ij}^k 達はこれら6つの parameters n_1, n_2, S, a_1, a_2, a_2 達で記述出来るということにあります。更に、いろいろな parameters が全て非負整数でなければいけないこともわかります。一方では、これらの関係と整数条件を全て満たす feasible な parameters 達が存在します。一方ではこのような feasible parameters はそれ程多くはなく、ある parameters が小さいという条件を付ければ、feasible parameters は決定出来ます。具体的には、例えば $n_1 \le n_2$, $n_1 \le 50$ のもとでは 13 個の feasible parameters の組が残り、それらに対して具体的にそのような parameters を持つ CC の存在を調べるという具合です。また、ある parameters が小さいという条件の替わりに、strongly regular graphs (X_0, R) (のファミリー) を与えて、strongly regular graphs X_1 で、$X = X_0 \cup X_1$ が strongly regular design (of the first kind) になるものを見つけよ、あるいは決定せよ、という種類の問題も考えています。(率直に言って、ある parameters が小さいという種類の条件を付けなければ決まらない、この場合でも完全に分類出来るわけではないという意味では、不十分と思われるかもしれませんが、これ以上のことは非常に難しいのも確かです。)
この方向の研究は先に述べたように、type $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ & 3 \end{bmatrix}$ にたいしては Higman 自身により、更に type $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & 4 \end{bmatrix}$ にたいしては、Hobart (Discrete Math., 1991) により同様のことが研究されています。

他の Higman の仕事について

論文 Rank 5 association schemes and triality (Lin. Alg. Appl, (1995))
では
$(X, \{R_i\}\ (i=0,1,2,3,4))$ なる対称な rank 5 の AS で、$R_0 \cup R_1 \cup R_2$ が X 上の同値関係になり(従って AS は imprimitive) この同値関係による quotient AS が of rank 2 (すなわち complete graph) になるものの分類を試みています。(いくつかの例が知られていて、それらを特徴付けるのと、ある parameters が小さいものを分類しようという方向で、完全な分類には手が届きません。) この状況に興味を持つ群論的動機は、以下の状況を組合せ論的に考えたいということにあります。
$\Gamma = G \cdot S_3$ とし、Γ は Ω 上に可移に作用しているとする。$1 \in \Omega$, H を $1 \in \Omega$ の Γ の固定群とすると、$\Omega \cong \Gamma/H$ である。$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ で、各 Ω_i は G の orbit であり、いずれも rank 3 で働いていて、S_3 は $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ 上に3次対称群として自然に働いているとする。

この状況のとき、先に述べた対称な rank 5 の AS が出来る訳である。G の Ω への作用が intransitive であることから CC が得られその type は、$\begin{bmatrix} 3 & * & * \\ & 3 & * \\ & & 3 \end{bmatrix}$ ($*$ は一定) となり、CC の理論を応用して、この状況を研究しようと言う訳である。
この状況の更に一般の場合が未発表のプレプリント
Uniform association schemes
で考察されている。
群 $\Gamma = G \cdot S_{t+1}$ が Ω 上に可移に作用し、$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_{(t+1)}$ (disjoint) で各 Ω_i 上 G は可移であり rank m であるとし、更に $\{\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_{(t+1)}\}$ 上に $S_{(t+1)}$ が対称群として自然に働く状況であるとする。G の Ω 上の作用は非可移であるので、CC が出来るが、この CC の type が対角線上が全て m の残りの要素達が全て p のとき、"uniform (t,p,m)- association schemes" と呼び、その type の CC およびもとの非原始的な AS を考察しようという研究である。(これも得られている結果は中途半端と言えないこともないが、研究対象としては面白いと思う。)

W. H. Haemers–D. G. Higman: Strongly regular graphs with strongly regular decomposition, Lin. Alg. Appl. (1989),
では、strongly regular graph Γ が 2 つの strongly regular graphs Γ_1 と Γ_2 の disjoint union になっているのはどのような状況かを考える。このとき、Γ は strongly regular designs of the first kind (すなわち CC of type $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ & 3 \end{bmatrix}$) または、quasi-symmetric designs (すなわち CC of type $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & 3 \end{bmatrix}$) 達の特別な parameters を持つものでなければならないことを示し、前に得られている CC に関する結果を利用する。

他の Higman の未発表の論文としては、鈴木通夫先生の 70 才の記念の報告集（第 14 回代数的組合せ論報告集 (1997)) 43-48 ページにある論文であるが、
Some highly symmetric chamber system,
であり、これは buildings を AS あるいは CC の立場から理解しようという試みと言えるであろう。

いずれにせよ、D. G. Higman の後期の仕事は、面白い examples に注目して、その状況を公理化して、feasible parameters を決定したり、それら examples の characterizations を試みるところに特徴があると思われる。（これは後期とかぎらず、彼の置換群・組合せ論的仕事全般に言えることかもしれないと思う。）後期の仕事に関して、得られている結果は中途半端といえるところも多いが、逆にそのことはこれからの研究の方向として面白いということにもなると思う。（とりあつかっている問題自身が難しくかつ本質的であり、それに正面突破をしようという意気込みを感じる。）私自身彼の後期（晩年）の仕事に関しては、いままであまり詳しくは知らなかったこともあったが、彼のやりたかったことが何かについて、今回少しだけ理解できたと思う。もっと多くの方に D. G. Higman の数学について興味を持ってもらえたらと思う。Michigan J. Math. の追悼記念号がそのきっかけになることが出来れば、うれしく思う。

Euclidean designs と coherent configurations

私は坂内悦子と共同で、Euclidean t-designs についての研究を最近進めて来た。Euclidean t-design は spherical design の一般化であり、ひとつの定義は、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の重み付き有限集合で、その任意の高々次数 t のモーメントが任意の直交変換の作用により不変なものを言う。(組合せ論での Euclidean t-design の概念の定式化は Neumaier-Seidel (1988) による。数値解析における cubature formula の概念とも対応し、統計学における rotatable design の概念とも似ている。)

例

今、X を type $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ & 3 \end{bmatrix}$ の CC とし、$X = X_0 \cup X_1$ とする。(簡単のため、群 G が X_0, X_1 にそれぞれ可移にかつ rank 3 に作用しているとする。G の X_i 上の置換指標を π_i とすると、

$\pi_0 = 1 + \chi + \phi$,

$\pi_1 = 1 + \chi + \psi$, $(\psi \neq \phi)$

と表わされる。このとき、$X = X_0 \cup X_1$ は $\mathbb{R}^{\dim \chi}$ の原点に中心のある 2 つの同心球面上に自然に埋め込まれる。この $X = X_0 \cup X_1$ を Euclid t-design として見ようというのが我々の立場である。

• Euclidean t-designs に関して tight t-design の概念が定義されている。

• ある条件のもとでは、 Euclidean t-design が CC の構造を持つことも知られている。(詳しくは Bannai-Bannai の準備中の論文 [2] を参照。)

• Spherical t-designs の研究に AS が非常に重要であったのと同様に、Euclidean t-designs の研究に CC が非常に重要になるというのが、我々が主張したいことである。

例

X を $\mathbb{R}^n$ の原点に中心のある 2 つの同心球面での tight 4-design とする。それぞれの球面上にある X の点の集まりを X_0, X_1 とすると、$X = X_0 \cup X_1$ は CC になり、その type は、$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ & 3 \end{bmatrix}$ または $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & 3 \end{bmatrix}$ のいずれかであることが示される。このようにして、ある種の Euclidean t-design は CC と見ることが出来、逆に ある種の CC は Euclidean t-design の立場から研究できる。これらは坂内悦子との現在進行中の共同研究である。(詳しくは Bannai-Bannai の準備中の論文 [2] を参照。) 我々はこの方向の研究を更に進めたいと考えている。その際に、D. G. Higman の研究が新しい意味を持ってくるのではないだろうか?との期待を抱いている。

文献

1. Eiichi Bannai, Robert L. Griess, Jr., Cheryl E. Praeger, Leonard Scott: The Mathematics of Donald Gordon Higman, to appear in Michigan Journal of Mathematics (2009). (この論文は arXiv:0901.0971 からも見れますし、Griess の home page からも見れます。また D. G. Higman の論文のリストも与えられています。)

2. Eiichi Bannai and Etsuko Bannai: Euclidean designs and coherent configurations, preprint. (近日中に arXiv に投稿予定です。それ以前の Euclidean t-design についての研究もその References を参照して下さい。)