数理解析研究所講究録
第 1656 巻 2009 年 97-109

拡大ヴィラソロ代数と関連する話題について
The extended Virasoro VOAs and related topics

山内 博*

愛知教育大学 数学教育講座

概要

本稿では拡張されたグライス代数の概念を頂点作用素超代数に対して導入し、共形デザインに基づいてそれ上の松尾-ノートン型の跡公式を導出します。その応用として、ベビーモンスター単純群の 2A 元とベビーモンスター頂点作用素超代数に含まれる $c=7/10$ $N=1$ ヴィラソロ頂点作用素超代数の間には一対一対応があることを示します。

1 序論

本研究の目的は群の指標の理論の類似・対応物を頂点作用素代数及び超代数の場合に求め、散在型有限単純群をその対称性に持つムーンシャイン頂点作用素代数やベビーモンスター頂点作用素超代数に応用し、その構造を解析することです。本研究の動機の一つになった、理想的な場合の例を一つ挙げましょう。$\mathbb{M}$ 及び $\mathbb{B}$ をモンスター及びベビーモンスター単純群 [ATLAS]、$V^\natural$ をムーンシャイン頂点作用素代数 [FLM] とします。このとき $\mathrm{Aut}(V^\natural)\simeq\mathbb{M}$ であり、$V^\natural=\bigoplus_{n\geq 0}V_n^\natural$ のウェイト 2 の部分空間 $V_2^\natural$ にはコンウェイにより再構成されたグライス代数 [C, G] と同型な、単位元を持つ 196884 次元の可換代数の構造が自然に入ります。t を $\mathbb{M}$ の 2A 元とすると、$C_{\mathbb{M}}(t)\simeq 2.\mathbb{B}$ であり、[C] にあるように、グライス代数 $V_2^\natural$ は $C_{\mathbb{M}}(t)$-加群として次のような既約分解を持ちます。

$$
\begin{array}{ccccc}
V_2^\natural & = & \underbrace{\mathbf{1}+\mathbf{1}+\mathbf{4371}+\mathbf{96255}} & + & \mathbf{96256} \\
t & : & +1 & & -1
\end{array}
\tag{1.1}
$$

この分解から不動点部分代数 $(V_2^\natural)^{C_{\mathbb{M}}(t)}$ は二次元であり、互いに直交する巾等元で張られることが分かります。グライス代数には不変内積が入っているので、これらの巾等元のう

*Partially supported by JSPS Grant-in-Aid for Young Scientists (Start-up) No. 19840025.

ち内積に関する長さが短い方を e とすると、e は分解 (1.1) に現れる各既約 $C_{\mathbb{M}}(t)$-部分加群上定数倍で作用しており、その固有値は以下のようになることも計算されています。

$$\begin{array}{cccccccccccc} V_2^\natural & = & \mathbf{1} & + & \mathbf{1} & + & \mathbf{4371} & + & \mathbf{96255} & + & \mathbf{96256} \\ t & : & +1 & & +1 & & +1 & & +1 & & -1 \\ e & : & 2 & & 0 & & \frac{1}{2} & & 0 & & \frac{1}{16} \end{array} \tag{1.2}$$

この分解から逆に、e の随伴作用による $V_2^\natural$ の固有空間分解を行い、固有値 1/16 の固有空間上 -1 倍、その補空間上恒等的に作用する線形変換を考えることで、元々の 2A 元 t を復元することができます。

上記の $e \in (V_2^\natural)^{C_{\mathbb{M}}(t)}$ は [C] において 2A 元 t の定める軸巾等元と呼ばれており、$\mathbb{M}$ の 2A 元と $V_2^\natural$ の軸巾等元との間には $\mathbb{M} \ni t \longmapsto e \in (V_2^\natural)^{C_{\mathbb{M}}(t)}$ によって定まる一対一対応の関係があります。これを頂点作用素代数の視点で見直したのが [Mi] における宮本の自己同型です。軸巾等元 e は $V^\natural$ において中心電荷 1/2 のヴィラソロ元を定めます。$c = 1/2$ のヴィラソロ頂点作用素代数の表現論を用いることで、$V^\natural$ に限らない一般の頂点作用素代数上で (1.2) の類似・一般化となる自己同型の構成法が [Mi] において発表されました。宮本の自己同型はヴィラソロ元の作用による固有空間分解を用いて定義されており、その具体的は計算は、グライス代数上でその巾等元の固有空間分解を求める問題に帰着させることができます。[Ma] において、グライス代数上の随伴作用の多重積の跡を計算する松尾-Norton 跡公式が発表されました。この公式を $V^\natural$ に含まれる $c = 1/2$ のヴィラソロ元に適用した場合、得られる分解は常に (1.2) と一致するため、$\mathrm{Aut}(V^\natural) \simeq \mathbb{M}$ から、その跡を計算することで得られる自己同型は $\mathbb{M}$ の 2A 元と同定できます。

さて、以上の話を見直してみると、(1.1) 及び (1.2) で与えられる分解は最初は有限群の表現論を用いて得られたものでしたが、松尾-Norton 跡公式により、群の作用を仮定せずとも、$V^\natural$ の代数構造のみから復元することも可能になりました。非常に大雑把な意見ですが、ボーチャーズによるムーンシャイン予想の解決 [B] や、上記の例など、よく出来すぎている話を見ていると、頂点作用素代数の理論はその自己同型の作用、特に指標の理論を内包しているように思われ、前述の松尾-Norton 跡公式はその片鱗を見せてくれているように感じられます。そこで松尾-Norton 跡公式を一般化し、頂点作用素代数の理論がどこまで自己同型群の指標理論を知っているのか確かめるべく、本稿では頂点作用素超代数の場合に拡大グライス代数を定義し、適切な仮定の下でその上の跡公式を導出します。そして得られた跡公式をベビーモンスター頂点作用素超代数に適用することで、[HLY] における $\mathbb{B}$ から描かれる E_7 図形の研究に応用します。

謝辞 松尾-Norton 跡公式の産みの親である松尾氏には議論を通じて色々と教えて頂きました。本稿の命題 4.5 も氏との議論の中で明確に出来たものです。また、氏にはオリジ

ナルの跡公式の導出に使われたプログラムも提供して頂きました。本研究を行うにあたって、松尾氏の数々のご協力に感謝します。また、今回講演する機会を与えてくださった山田裕理氏にも感謝いたします。

2 $N=1$ ヴィラソロ頂点作用素超代数

本節ではヴィラソロ頂点作用素代数およびその超代数化である $N=1$ ヴィラソロ頂点作用素超代数を簡単に紹介します。

ヴィラソロ代数 ヴィラソロ代数 $\mathrm{Vir}=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}L(n)\oplus\mathbb{C}\vec{c}$ は次の関係式で定義される無限次元リー代数です：

$$[L(m),L(n)]=(m-n)L(m+n)+\delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}\vec{c},\qquad [\vec{c},\mathrm{Vir}]=0. \tag{2.1}$$

本稿では次の条件を満たす Vir-加群 M を考えます。

(1) 中心 $\vec{c}$ はスカラー倍 $c\in\mathbb{C}$ で作用する。(この数値を M の中心電荷といいます。)

(2) $L(0)$ は M 上半単純に作用する。

(3) 任意の $v\in M$ についてある $N\in\mathbb{Z}$ がとれて $L(n)v=0$ が全ての $n\geq N$ に対して成り立つ。

このような Vir-加群 M が与えられたとき、次で定まる作用素の母関数

$$\omega(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L(n)z^{-n-2}\in\mathrm{End}(M)[\![z,z^{-1}]\!]$$

を考えると、交換関係式 (2.1) から $\mathrm{End}(M)[\![z,z^{-1}]\!]$ において**局所可換**と呼ばれる関係式

$$(z_1-z_2)^4[\omega(z_1),\omega(z_2)]=0 \tag{2.2}$$

が成り立つことが確かめられます[註1]。ここで $[\omega(z_1),\omega(z_2)]\neq 0$ であることに注意します。一般に、作用素を係数とする形式的巾級数が (2.2) のような可換関係式を満たしているとき、そのような形式的巾級数が $\mathrm{End}(M)[\![z,z^{-1}]\!]$ の内部においてなす代数系として頂点代数が構成されます (cf. [K, MaN])。ヴィラソロ代数の表現上の作用素 $\omega(z)$ から構成される頂点作用素代数をヴィラソロ頂点作用素代数といいます。中心電荷が c のヴィラソロ頂点作用素代数であって、もっとも大きいもの (普遍的なもの) を $\overline{M}(c,0)$ で表します[註2]。$\overline{M}(c,0)$ は唯一つの極大イデアルを持ち、それゆえ唯一つの単純商代数を持ちます。本稿ではこれを $L(c,0)$ で表します[註3]。

[註1] 展開したとき両辺の $z_1^m z_2^n$ の係数がすべて等しいという意味です。

[註2] $M(c,h)$ で中心電荷 c, 最高ウェイト h のヴァーマ加群を表すとき、Vir-加群としては $\overline{M}(c,0)=M(c,0)/M(c,1)$ となります。

[註3] 同様に、中心電荷 c, 最高ウェイト h の既約最高ウェイト表現を $L(c,h)$ で表します。$M(c,h)$ 及び $L(c,h)$ は常に $\overline{M}(c,0)$-加群になりますが、c, h の値によっては $L(c,h)$ は $L(c,0)$-加群にはなりません。

$N=1$ **ヴィラソロ超代数**　ヴィラソロ代数 Vir は様々なリー超代数へ拡大することができます。ここでは $N=1$ と呼ばれる拡大を考えます。

$\epsilon \in \{0, 1/2\}$ としてヴィラソロ代数 Vir の拡大

$$\mathrm{SVir}_\epsilon := \mathrm{Vir} \oplus \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}+\epsilon} \mathbb{C}G(r) = \underbrace{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L(n) \oplus \mathbb{C}\vec{c}}_{\text{偶部分}} \oplus \underbrace{\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}+\epsilon} \mathbb{C}G(r)}_{\text{奇部分}}$$

に次のリー積を定義したものを考えます。

$$\begin{aligned}
&[L(m), G(r)] = \left(\frac{1}{2}m - r\right) G(m+r), \\
&[G(r), G(s)]_+ = 2L(r+s) + \delta_{r+s,0}\frac{1}{3}\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\vec{c}, \\
&[\mathrm{SVir}_\epsilon, \vec{c}] = 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

ϵ の選択に応じ、$\mathrm{SVir}_{1/2}$ はヌブ・シュワルツ代数と、SVir_0 はラモン代数と呼ばれます。

ヴィラソロ代数の場合と同じように、本稿では次のような SVir_ϵ-加群 M を考えます。

(1) 中心 $\vec{c}$ はスカラー倍 $c \in \mathbb{C}$ で作用する。(この数値を M の中心電荷といいます。)

(2) $L(0)$ は M 上半単純に作用する。

(3) 任意の $v \in M$ についてある $N \in \mathbb{Z}$ がとれて $L(n)v = G(n+\epsilon)v = 0$ が全ての $n \geq N$ に対して成り立つ。

このような SVir_ϵ-加群 M が与えられたとき、次で定まる作用素の母関数

$$\omega(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2}, \quad \tau(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+\epsilon} G(r) z^{-r-3/2} \in \mathrm{End}(M)[\![z, z^{-1}]\!][z^{\epsilon+1/2}]$$

を考えると、交換関係式 (2.3) から $\mathrm{End}(M)$ において局所可換性

$$(z_1 - z_2)^4[\omega(z_1), \omega(z_2)] = (z_1 - z_2)^2[\omega(z_1), \tau(z_2)] = (z_1 - z_2)^3[\tau(z_1), \tau(z_2)]_+ = 0 \tag{2.4}$$

が成り立つことが確認できます。この場合、$\omega(z)$ 及び $\tau(z)$ は $\mathrm{End}(M)[\![z, z^{-1}]\!][z^{\epsilon+1/2}]$ の内部で頂点作用素超代数を生成します。この頂点作用素超代数を $N=1$ ヴィラソロ頂点作用素超代数といいます。中心電荷が c の $N=1$ ヴィラソロ頂点作用素超代数の中でもっとも大きいもの (普遍的なもの) を $\overline{M}_{N=1}(c, 0)$ で表します[註4]。$\overline{M}_{N=1}(c, 0)$ は唯一つの極大イデアルを持ち、それゆえ唯一つの単純商代数を持ちます。本稿ではこれを $L_{N=1}(c, 0)$ で表します[註5]。

[註4] $M_\epsilon(c, h)$ で中心電荷 c, 最高ウェイト h の SVir_ϵ 上のヴァーマ加群を表すとき、$N=1$ ヴィラソロ頂点作用素超代数は $\mathrm{SVir}_{1/2}$-加群 $\overline{M}_{N=1}(c, 0) = M_{1/2}(c, 0)/M_{1/2}(c, 1/2)$ となります。

[註5] 同様に、中心電荷 c, 最高ウェイト h の SVir_ϵ 上の既約最高ウェイト表現を $L_\epsilon(c, h)$ で表します。

3 頂点作用素超代数の拡大グライス代数

以下では次の条件を満足する頂点作用素超代数 V を考えます。

設定 1. V は $V = V^0 \oplus V^1 = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}/2} V_n$ と二重に次数付けられており、以下を満たす。

$$V^0 = \bigoplus_{n\geq 0} V_n,\ V^1 = \bigoplus_{n\geq 0} V_{n+h},\ h\in\mathbb{Z}+1/2,\ V_h\neq 0,\ V_0 = \mathbb{C}\mathbb{1},\ V_1 = 0.$$

上の条件を満たす $h\in\mathbb{Z}+1/2$ を奇部分 V^1 の**トップウェイト**、V_h^1 を**トップレベル**と言います。

頂点作用素超代数上の不変内積 頂点作用素代数 $V = V^0\oplus V^1$ 上の内積 $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ が任意の $a,u,v\in V$ に対して以下の条件を満たすとき、**不変内積**と呼ばれます。

$$\begin{aligned}&\langle Y(a,z)u \mid v\rangle_\pm = \langle u \mid Y^*_\pm(a,z)v\rangle_\pm,\\ &Y^*_\pm(a,z) := Y(e^{zL(1)}z^{-2L(0)}(-1)^{L(0)\pm 2L(0)^2}a, z^{-1}).\end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで設定 1 より $(-1)^{L(0)\pm 2L(0)^2}a$ は $\pm a$ になることに注意します。このとき次の結果が知られています。

命題 3.1. ([Li]) 頂点作用素超代数 V 上の不変内積のなす空間は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_0/L(1)V_1,\mathbb{C})$ と自然に線形同型となる。特に設定 1 のもとでは V 上の不変内積は定数倍を除いて一意的に定まる。

注釈 1. [Li] では頂点作用素代数の場合のみ扱われていますが、全く同じ議論で頂点作用素超代数の場合もカバーできます。なお、この結果から特に V 上の不変内積の空間はその偶部分 V^0 上の不変内積の空間と一致することも分かります。すなわち、偶部分 V^0 が不変内積を持てば、それは V へと ($\pm$ の選択を除いて) 一意に拡張することができます。

頂点作用素超代数の場合、その $\mathbb{Z}_2$-次数により奇部分の内積は ± 1 倍する自由度があります。以下では $\langle\mathbb{1}|\mathbb{1}\rangle = 1$ と正規化し、$a,b\in V_h^1$ に対して $\langle a|b\rangle\mathbb{1} = a_{(2h-1)}b$ となるように V^1 のトップウェイトに応じて不変性の符号を固定します[註6]。

拡大グライス代数 V を設定 1 を満たす頂点作用素代数とします。$a,b\in V_2^0$, $u,v\in V_h^1$ として部分空間 $V_2^0\oplus V_h^1$ に積及び内積を以下のように定義します[註7]。

$$\begin{aligned}&ab := a_{(1)}b, \qquad au := a_{(1)}u, \qquad ua := u_{(1)}a, \qquad uv := u_{(2h-3)}v,\\ &\langle a|b\rangle\mathbb{1} = a_{(3)}b, \qquad \langle u|v\rangle\mathbb{1} = u_{(2h-1)}v, \qquad \langle a|u\rangle = \langle u|a\rangle = 0.\end{aligned} \tag{3.2}$$

[註6] つまり $n\in\mathbb{N}$ として $h = 2n+1/2$ のとき $\langle\cdot\mid\cdot\rangle_-$ を、$h = 2n+3/2$ のとき $\langle\cdot\mid\cdot\rangle_+$ を使う。
[註7] この内積は上記の規格化のもとで V 上の不変内積を $V_2^0\oplus V_h^1$ に制限したものです。

命題 3.2. 上記 (3.2) で定めた積及び内積は $V_2^0 \oplus V_h^1$ 上に単位元を持つ不変内積付き可換代数構造を定める。

V の偶部分 V^0 を考えた場合、その次数 2 の空間 V_2^0 は命題 3.2 で定まる代数の部分代数になり、通常 V^0 のグライス代数と呼ばれます。命題 3.2 はグライス代数の定義を頂点作用素超代数へ一般化したものと考えられます。$V_2^0 \oplus V_h^1$ は通常のグライス代数 V_2^0 の拡大をなしているので、これを頂点作用素超代数 V の**拡大グライス代数**と呼ぶことにします。

巾等元の平方根と超対称性　簡単な場合について拡大グライス代数を調べてみましょう。まず、通常のグライス代数の場合には次の結果が知られています。

補題 3.3. ([Mi]) 偶部分の元 a が V^0 のヴィラソロ元であることと $a/2 \in V_2^0$ が拡大グライス代数において巾等元であることは同値である[註8]。

$a \in V_2^0$ をヴィラソロ元、即ち $a/2$ が巾等元としましょう。拡大グライス代数において a の平方根とも言える、$xx = a$ を満たす元 $x \in V_h^1$ について考えてみます。

■ $h = 1/2$ **の場合**　$x_{(n)}x \in V_{-n}^0$ より $n > 0$ ならば設定 1 から $x_{(n)}x = 0$ となります。また、$x_{(0)}x = \langle x|x\rangle \mathbb{1}$ より、x の頂点作用素 $Y(x,z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} x_{(n)}z^{-n-1}$ の展開係数は次の交換関係を満たします。

$$[x_{(m)}, x_{(n)}]_+ = (x_{(0)}x)_{(m+n)} = \langle x|x\rangle \mathbb{1}_{(m+n)} = \langle x|x\rangle \delta_{m+n+1,0}. \tag{3.3}$$

仮定より $a = x_{(-2)}x$ はヴィラソロ元なので $a_{(1)}a = 2a$ が成り立ちます。よって

$$2x_{(-2)}x = (x_{(-2)}x)_{(1)}(x_{(-2)}x) = 4\langle x|x\rangle x_{(-2)}x \tag{3.4}$$

から $\langle x|x\rangle = 1/2$ と求まり、それゆえ a の中心電荷 c_a は

$$c_a = 2\langle a|a\rangle = 2\langle x_{(-2)}x|x_{(-2)}x\rangle = 2\langle x|x_{(1)}x_{(-2)}x\rangle = 2\langle x|\langle x|x\rangle x\rangle = \frac{1}{2}$$

となります。よって x が生成する頂点作用素超代数は自由フェルミオン場

$$\psi(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \psi_{n+1/2} z^{-n-1}, \qquad [\psi_r, \psi_s]_+ = \delta_{m+n,0} \tag{3.5}$$

から構成される単純ヴィラソロ頂点作用素超代数 $L(1/2, 0) \oplus L(1/2, 1/2)$ (cf. [K, KR]) と同型になります[註9]。

[註8] このとき中心電荷は $\langle a|a\rangle/2$ で与えられます。

[註9] この議論から、$\langle x|x\rangle = 0$ の場合には $x_{(-2)}x$ がヴィラソロ元という仮定を外すと、x の生成する部分代数は可換な頂点超代数になることも分かります。

■ $h=3/2$ **の場合**　ここでは設定を少し変形して、$V_2^0=\mathbb{C}a$ に帰着できる場合を考えます。ω を V の共形ベクトルとします。設定 1 から $\omega=a+(\omega-a)$ は V の共形ベクトルの直交分割を与えます。a を共形ベクトルとする V の部分代数のうち、最大のものが存在し、それは $\ker_V(\omega-a)_{(0)}$ で与えられることが知られています (cf. [FZ])。$x\in V_{3/2}^1$ を $\ker_V(\omega-a)_{(0)}$ から取ってきて、$xx\in\mathbb{C}a$ を満たしたとします。このとき設定 1 から $x_{(0)}x=\lambda a$ $(\lambda\in\mathbb{C})$, $x_{(1)}x=0$, $x_{(2)}x=\langle x|x\rangle\mathbb{1}$ であって、さらに $n\geq 3$ については $x_{(n)}x=0$ となります。x は $\mathrm{Vir}(a)$ の最高ウェイト 3/2 の最高ウェイトベクトルになり、$a_{(0)}x=\omega_{(0)}x=x_{(-2)}\mathbb{1}$, $a_{(1)}x=(3/2)x$, $n\geq 2$ については $a_{(n)}x=0$ となります。以上の仮定のもとで x の生成する部分代数を決定しましょう。a の中心電荷を c_a とするとき、$x_{(0)}x=\lambda a$ より $\langle a|x_{(0)}x\rangle=\lambda\langle a|a\rangle=\lambda c_a/2$ となりますが、一方、

$$\begin{aligned}\langle a|x_{(0)}x\rangle\mathbb{1} &= a_{(3)}x_{(0)}x=[a_{(3)},x_{(0)}]x=\sum_{i\geq 0}\binom{3}{i}\left(a_{(i)}x\right)_{(3-i)}x\\ &=\left(a_{(0)}x\right)_{(3)}x+3\left(a_{(1)}x\right)_{(2)}x=-3x_{(2)}x+3\cdot\frac{3}{2}x_{(2)}x\\ &=\frac{3}{2}\langle x|x\rangle\mathbb{1}\end{aligned}$$

より $\lambda c_a=3\langle x|x\rangle$ を得ます。よってもし $\lambda=0$ ならば $\langle x|x\rangle=0$ であり、それゆえ $i\geq 0$ に対して $x_{(i)}x=0$ から $[x_{(p)},x_{(q)}]_+=0$ となってしまいます。この場合 x の生成する部分代数は (超代数の意味で) 可換な部分代数となります。一方、$\lambda\neq 0$ ならば x を $\lambda^{-1/2}$ 倍し直すことで $xx=x_{(0)}x=a$ とすることができます。即ち、x は拡大グライス代数においてヴィラソロ元 a の平方根にできます。このとき $\langle x|x\rangle=c_a/3$ であるから

$$\begin{aligned}[a_{(m)},x_{(n)}] &= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{m}{i}(a_{(i)}x)_{(m+n-i)}\\ &=(a_{(0)}x)_{(m+n)}+m(a_{(1)}x)_{(m+n-1)}\\ &=-(m+n)x_{(m+n-1)}+m\cdot\frac{3}{2}x_{(m+n-1)}\\ &=\left(\frac{m}{2}-n\right)x_{(m+n-1)},\end{aligned}\qquad \begin{aligned}[x_{(p)},x_{(q)}]_+ &= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{p}{i}(x_{(i)}x)_{(p+q-i)}\\ &=(x_{(0)}x)_{(p+q)}+\binom{p}{2}(x_{(2)}x)_{(p+q-2)}\\ &=a_{(p+q)}+\frac{p(p-1)}{2}\langle x|x\rangle\mathbb{1}_{(p+q-2)}\\ &=a_{(p+q)}+\frac{p(p-1)}{6}c_a\delta_{p+q-1,0},\end{aligned}\tag{3.6}$$

という交換関係式が得られます。少し見やすくするために、$L^a(m):=a_{(m+1)}$, $G^x(r):=\sqrt{2}x_{(r+1/2)}$ とおくと (3.6) は次のようになります。

$$\begin{aligned}[L^a(m),G^x(r)] &= \left(\frac{m}{2}-r\right)G^x(m+r),\\ [G^x(r),G^x(s)]_+ &= 2L^a(r+s)+\delta_{r+s,0}\frac{1}{3}\left(r^2-\frac{1}{4}\right)c_a.\end{aligned}\tag{3.7}$$

これはまさに $N=1$ ヴィラソロ超代数の関係式です。よって拡大グライス代数におけるヴィラソロ元 a が奇部分に平方根を持てば、その平方根が生成する部分代数は a を共形

ベクトルとする $N=1$ ヴィラソロ頂点作用素超代数となります。以上の議論をまとめると、$N=1$ ヴィラソロ頂点作用素超代数を次のように特徴付けることができます。

命題 3.4. 設定 1 を満たす頂点作用素超代数 $V=V^0\oplus V^1$ において $a\in V_2^0$ をヴィラソロ元、$x\in V_{3/2}^1$ を $\mathrm{Vir}(a)$ に関する最高ウェイト 3/2 の最高ウェイトベクトルとする。x が $i\geq 0$ に対して $x_{(i)}x\in\mathrm{Vir}(a)$ を満たしているとき[注10]、x の生成する部分代数は可換であるか、$N=1$ ヴィラソロ頂点作用素超代数となる。

■ **$h=5/2$ の場合**　$a\in V_2^0$ をヴィラソロ元とし、$x\in V_{5/2}^1\cap\ker_V(\omega-a)_{(0)}$ が拡大グライス代数において $xx=a$ を満たしたとします。これだけの条件では x の生成する部分代数は決まりませんが、さらに x は $\mathrm{Vir}(a)$ の最高ウェイト 5/2 の最高ウェイトベクトルであり、$i\geq 0$ について $x_{(i)}x\in\mathrm{Vir}(a)$ であることを請要すると、a の中心電荷は $-13/14$ でなくてはならず、また x の生成する部分代数も一意的に決まってしまうことが知られています (cf. [Z])。この場合 x が生成する部分代数は $\mathrm{Vir}(a)$-加群として $L(-{}^{13}\!/_{14},0)\oplus L(-{}^{13}\!/_{14},{}^{5}\!/_{2})$ と同型であり、ヴィラソロ頂点作用素代数 $L(-{}^{13}\!/_{14},0)$ の単純カレント拡大をなします。

4　拡大グライス代数上の跡公式

V を $V_1=0$ なる頂点作用素代数としたとき、[Ma] において V のグライス代数 V_2 における随伴作用の多重積作用の跡を求める松尾-Norton 跡公式が発表されました。この跡公式は頂点作用素代数の自己同型群の指標値の計算に役立ちます。ここでは松尾-Norton 跡公式を頂点作用素超代数の拡大グライス代数上で一般化します。

4.1　共形デザインと跡公式

V を頂点作用素超代数、$\omega\in V_2$ をその共形ベクトルとします。以下では次の条件を満たす頂点作用素超代数を考察します。

設定 2. 頂点作用素超代数 V は設定 1 を満たしており、さらに以下を満たす。
(1) V 上の不変内積は非退化である。
(2) V 上の不変内積を $\mathrm{Vir}(\omega)$ に制限したものも非退化である。
(3) V は $\mathrm{Vir}(\omega)$-加群として最高ウェイト加群の直和である。

上記の設定の下で V は $\mathrm{Vir}(\omega)$-加群として次のように分解することが出来ます。

$$V=V^0\oplus V^1,\qquad V^0=\bigoplus_{n\geq 0}V^0(n),\qquad V^1=\bigoplus_{n\geq 0}V^1(n+h).\tag{4.1}$$

[注10] 講演では $Y(x,z)x\in\mathrm{Vir}(a)[\![z,z^{-1}]\!]$ と発表してしまいましたが、命題にあるように正しくは $i\geq 0$ に対して $x_{(i)}x\in\mathrm{Vir}(a)$ です。

ここで $V^i(k)$ は V^i の最高ウェイト k の最高ウェイト $\mathrm{Vir}(\omega)$-部分加群の全体の和を表します。設定 1 より $V^0(0)=\mathrm{Vir}(\omega)$ であり、$\mathrm{Vir}(\omega)$-加群として次の完全列がとれます。

$$0 \longrightarrow V^0/V^0(0) \simeq \bigoplus_{n>0} V^0(n) \longrightarrow V^0 \xrightarrow{\ \pi\ } V^0(0)=\mathrm{Vir}(\omega) \longrightarrow 0. \tag{4.2}$$

松尾-Norton 跡公式を導くには V の偶部分 V^0 に適切な仮定をおく必要があります。それを述べるために少し準備します。まず一般化されたカシミール元について定義します。V_2^0 の基底 $\{u^i \mid 1\le i\le \dim V_2^0\}$ を一つとり、その双対基底を $\{u_i \mid 1\le i\le \dim V_2^0\}$ とします。このとき次で定まるベクトル

$$\kappa_n := \sum_{i=1}^{\dim V_2^0} u^i_{(3-n)}u_i \in V_n^0 \tag{4.3}$$

は基底の選び方に依りません。[Ma] に従って、κ_n を (n 次の) **一般カシミール元**と呼ぶことにします。次の定義は [Ma] のものを少し修正したものです[註11]。

定義 4.1. (cf. [Ma]) 頂点作用素代数 V^0 が $\mathcal{S}^t$ **級**であるとは、$0\le n\le t$ について $\kappa_n\in \mathrm{Vir}(\omega)$ となることと定める。

[Ma] において松尾氏は V^0 が $\mathcal{S}^{2n}$ 級 ($n\le 5$) である場合に、グライス代数において n 個までの随伴作用素の積の跡を計算する公式を与えました。その導出における本質的な性質を抜き出すことによって、$\mathcal{S}^t$ 級の概念の一般化が G. Höhn によって提案されました。

定義 4.2. (cf. [H4]) 頂点作用素代数 V^0 上の加群 M の部分空間 X が**共形 t-デザイン**であるとは、任意の $a\in\bigoplus_{0\le n\le t}V_n^0$ に対し、そのゼロモード作用素[註12]$\mathrm{o}(a):=a_{(\mathrm{wt}(a)-1)}$ が等式 $\mathrm{tr}_X\mathrm{o}(a)=\mathrm{tr}_X\mathrm{o}(\pi(a))$ を満たすことと定める。

これらの性質は一見異なるように見える条件ですが、設定 2 のもとではほとんど同値になることが示せます。設定 2 (2) より $\mathrm{Vir}(\omega)$ に特異ベクトルは含まれていません。よって次が成り立ちます。

補題 4.3. 分解 (4.1) において $m>0$ ならば不変内積に関して $V^0(m)\perp V^0(0)$ である。

補題 4.4. 任意の $a\in V_p^0$ について $\mathrm{tr}_{V_2^0}\mathrm{o}(a)=(-1)^p\langle a|\kappa_p\rangle$ が成り立つ。

【証明】 $d=\dim V_2^0$ とおく。歪対称性 $u_{(m)}v=\sum_{j\ge0}\frac{(-1)^{m+j+1}}{j!}L(-1)^jv_{(m+j)}u$ 及び $L(1)V_2^0=0$ を用いて $\mathrm{tr}_{V_2^0}\mathrm{o}(a)=\sum_{1\le i\le d}\langle \mathrm{o}(a)u^i|u_i\rangle$ を計算する。

[註11] 原論文では $\mathrm{Aut}(V)$ を用いて定式化されていますが、$\mathrm{Aut}(V)$ が有限群でない場合には、その作用についていくつかの仮定が必要なため、ここではこの定義を採用しました。

[註12] ここで a が斉次でない場合には $\mathrm{o}(a)$ は線形に拡張して定義する。

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_{V_2^0}\mathrm{o}(a) &= \sum_{i=1}^{d}\langle \mathrm{o}(a)u^i|u_i\rangle = \sum_{i=1}^{d}\langle a_{(p-1)}u^i|u_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p+j}}{j!}\langle L(-1)^j u^i_{(p-1+j)}a|u_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p+j}}{j!}\langle u^i_{(p-1+j)}a|L(1)^j u_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{d}(-1)^p\langle u^i_{(p-1)}a|u_i\rangle = \sum_{i=1}^{d}(-1)^p\langle a|u^i_{(3-p)}u_i\rangle \\
&= (-1)^p\langle a|\kappa_p\rangle.
\end{aligned}$$

∎

命題 4.5. V^0 を設定 2 を満たす頂点作用素代数とするとき、V^0 が $\mathcal{S}^t$ 級であることと、そのグライス代数 V_2^0 が共形 t-デザインであることは同値である。

【証明】 V^0 を $\mathcal{S}^t$ 級、即ち $0 \le n \le t$ について $\kappa_n \in \mathrm{Vir}(\omega)$ と仮定する。$a \in V_n^0$ を任意に取る。補題 4.4 より $\mathrm{tr}_{V_2^0}\mathrm{o}(a) = (-1)^n\langle a|\kappa_n\rangle$ 及び $\mathrm{tr}_{V_2^0}\mathrm{o}(\pi(a)) = (-1)^n\langle \pi(a)|\kappa_n\rangle$ である。補題 4.3 より $\mathrm{Vir}(\omega) = V^0(0) \perp \ker\pi = \bigoplus_{n>0} V^0(n)$ であり、また (4.2) の π は射影であるから $a - \pi(a) \in \ker\pi$ である。よって $\langle a|\kappa_n\rangle = \langle \pi(a) + (a-\pi(a))|\kappa_n\rangle = \langle \pi(a)|\kappa_n\rangle$ なので、V_2^0 は共形 t-デザインとなる。

逆に V_2^0 を共形 t-デザインとすると、全ての $a \in V_n^0$, $0 \le n \le t$ について $\mathrm{tr}_{V_2^0}\mathrm{o}(a) = \mathrm{tr}_{V_0^2}\mathrm{o}(\pi(a))$ であり、補題 4.4 から $\langle a - \pi(a)|\kappa_n\rangle = 0$ となる。ここで π は射影であるから $\{a - \pi(a) \mid a \in V_n^0\} = \ker\pi \cap V_n^0$ となるので、V 上の内積の非退化性及び補題 4.3 から $\kappa_n \in \mathrm{Vir}(\omega)$ となる。よって V は $\mathcal{S}^t$ 級である。 ∎

$\{v^i \mid 1 \le i \le \dim V_h^1\}$ を V_h^1 の一つの基底、$\{v_i \mid 1 \le i \le \dim V_h^1\}$ をその双対基底とするとき、補題 4.4 の証明おける議論でも用いたように、$A \in \mathrm{End}(V_h^1)$ の跡は

$$\mathrm{tr}_{V_h^1}A = \sum_{i=1}^{\dim V_h^1}\langle Av^i|v_i\rangle \tag{4.4}$$

として計算することが出来ます。この等式と頂点作用素代数の公理を駆使することで、V^0 が $\mathcal{S}^{2n}$ 級 $(n=1,2)$[註13]である場合には以下のように拡大グライス代数上の跡公式を求めることができます。ここで $a, b \in V_2^0 \oplus V_h^1$ について、$ab = \mathrm{o}(a)b$ であることに注意します。命題 4.5 から、以下の定理では V^0 が $\mathcal{S}^t$ 級であることを V_2^0 が共形 t-デザインであることに置き換えても構いません。

[註13] $n = 3,4,5$ の場合にも公式自体は導出できると考えてますが、まだやり切っていません。

定理 4.6. $V = V^0 \oplus V^1$ を設定 2 を満たす頂点作用素超代数とする。
(1) 偶部分 V^0 が $\mathcal{S}^2$ 級かつ $c \neq 0$ ならば、任意の $a \in V_2^0$ について以下の等式が成り立つ。

$$\mathrm{tr}_{V_h^1} o(a) = \frac{2h \dim V_h^1}{c} \langle \omega | a \rangle.$$

(2) 偶部分 V^0 が $\mathcal{S}^4$ 級かつ $c \neq 0, -22/5$ ならば、任意の $a, b \in V_2^0$ について以下の等式が成り立つ。

$$\mathrm{tr}_{V_h^1} o(a) o(b) = -\frac{2h(c-22h)\dim V_h^1}{c(5c+22)} \langle a|b \rangle + \frac{4h(5h+1)\dim V_h^1}{c(5c+22)} \langle a|\omega \rangle \langle b|\omega \rangle.$$

4.2 ベビーモンスター頂点作用素超代数への応用

$V^\natural$ をムーンシャイン頂点作用素代数 [FLM], $\mathbb{M}$ 及び $\mathbb{B}$ をモンスター及びベビーモンスター単純群 [ATLAS] とします。このとき $\mathrm{Aut}(V^\natural) = \mathbb{M}$ であり、また t を $\mathbb{M}$ の 2A 元とすれば $C_{\mathbb{M}}(t) = 2.\mathbb{B}$ という関係があります。これらの事実を参考にして [H1] において $\mathbb{B}$ が自然に作用するベビーモンスター頂点作用素超代数 $V\!B^\natural = V\!B^{\natural,0} \oplus V\!B^{\natural,1}$ が $V^\natural$ を用いることで構成されました。その後、[H2, Y] によって $\mathrm{Aut}(V\!B^{\natural,0}) = \mathbb{B}$ 及び $\mathrm{Aut}(V\!B^\natural) = \mathbb{B} \times 2$ であることが示されました。ここでは $V\!B^\natural$ を例として松尾-Norton 跡公式の威力を確かめるとともに、定理 4.6 で新たに得られた公式を $V\!B^\natural$ の 2A 元の研究に応用します。

$V\!B^\natural$ の偶部分 $V\!B^{\natural,0}$ のグライス代数 $V\!B_2^{\natural,0}$ は 96256 次元であり、奇部分のトップレベル $V\!B_{3/2}^{\natural,1}$ は 4371 次元です。$V\!B^\natural$ の拡大グライス代数 $V\!B_2^{\natural,0} \oplus V\!B_{3/2}^{\natural,1}$ は $\mathbb{B}$-加群として $1 + 96255 + 4371$ 次元の既約分解を持ちます。$s \in \mathbb{B}$ を 2A 元とすると、[ATLAS] より $C_{\mathbb{B}}(s) = 2 \cdot {}^2E_6(2) : 2$ であり、$C_{\mathbb{B}}(s)$-加群として $V\!B_2^{\natural,0}$ 及び $V\!B_{3/2}^{\natural,1}$ は次のように既約分解します。

$$V\!B_2^{\natural,0} = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{48620} + \mathbf{1938} + \mathbf{45696}, \qquad V\!B_{3/2}^{\natural,1} = \mathbf{1} + \mathbf{1938} + \mathbf{2432}. \tag{4.5}$$

これより不動点部分代数 $(V\!B_2^{\natural,0})^{C_{\mathbb{B}}(s)}$ は二次元であり、互いに直交する巾等元で張られることが分かります。[HLY] においてこれらの巾等元は中心電荷 7/10 及び 114/5 のヴィラソロ元を与えることが計算されています。よって $\mathbb{B}$ の 2A 元 s に対し、$(V\!B^\natural)^{C_{\mathbb{B}}(s)}$ の $c = 7/10$ のヴィラソロ元を対応させることで、$\mathbb{B}$ の 2A 共役類と $V\!B^\natural$ の部分代数 $L(7/10, 0)$ との間に対応関係が与えられます。残念ながらこの対応は一対一ではありません。$V\!B^\natural$ に含まれる $c = 7/10$ のヴィラソロ元にある条件[註14]をつければ一対一対応にすることができますが、[HLY] にあるように $\mathbb{B}$ と E_7 型ディンキン図形との関係を調べていくと、$L(7/10, 0)$ よりはその拡大超代数である $L(7/10, 0) \oplus L(7/10, 3/2)$ を考えたほうが道理が通っているよう

[註14] [HLY] にて σ-型と呼ばれるものに限れば一対一である。

に思えます[注15]。まず拡大超代数 $L(7/10,0)\oplus L(7/10,3/2)$ について簡単な事実を述べます。

補題 4.7. [LLY] にて構成された単純頂点作用素超代数 $L(7/10,0)\oplus L(7/10,3/2)$ は $c=7/10$ $N=1$ ヴィラソロ頂点作用素超代数 $L_{N=1}(7/10,0)$ と同型である。

【証明】 命題 3.4 より従う。 ∎

定理 4.6 にある跡公式を用いて分解 (4.5) において $(VB^{\natural,1})^{C_{\mathbb{B}}(s)}_{3/2}$ を張るベクトルは $(VB^{\natural,0}_2)^{C_{\mathbb{B}}(s)}$ に含まれる $c=7/10$ のヴィラソロ元の平方根になっていることを示しましょう。そのために次の事実を引用します。

補題 4.8. ([H3, H4]) $VB^{\natural}$ は設定 2 を満足し、その偶部分 $VB^{\natural,0}$ は S^7 級である。

この補題から定理 4.6 を $VB^{\natural}$ の拡大グライス代数に適用することができます。

命題 4.9. s を $\mathbb{B}$ の 2A 元、f を $(VB^{\natural,0}_2)^{C_{\mathbb{B}}(s)}$ に含まれる $c=7/10$ のヴィラソロ元とするとき、$VB^{\natural}$ の拡大グライス代数における f の随伴作用の $VB^{\natural,1}_{3/2}$ 上の固有空間分解は (4.5) の分解と一致し、その固有値は以下のようになる。

$$\begin{array}{cccccccc} VB^{\natural,1}_{3/2} & = & \mathbf{1} & + & \mathbf{1938} & + & \mathbf{2432} \\ f & : & \dfrac{3}{2} & & \dfrac{1}{10} & & 0 \end{array}$$

この分解と前節の拡大グライス代数における巾等元の平方根の議論から、$\mathbb{B}$ の 2A 元 s は不動点代数 $(VB^{\natural})^{C_{\mathbb{B}}(s)}$ の部分代数 $L_{N=1}(7/10,0)$ を一意に定めることが分かります。[HLY] で議論されているように、逆の対応も正しく、次の定理が成り立ちます。

定理 4.10. $N=1$ ヴィラソロ頂点作用素超代数 $L_{N=1}(7/10,0)=L(7/10,0)\oplus L(7/10,3/2)$ と同型な $VB^{\natural}$ の部分代数とベビーモンスター単純群 $\mathbb{B}\subset \mathrm{Aut}(VB^{\natural})$ の 2A 元 s との間には包含関係 $L_{N=1}(7/10,0)\hookrightarrow (VB^{\natural})^{C_{\mathbb{B}}(s)}$ により一対一対応がつく。

この対応関係を用いて [HLY] における議論を見直せば、$\mathbb{B}$ が描く E_7 図形のより自然な解釈が与えられるものと期待しています。

参考文献

[ATLAS] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker and R.A. Wilson, ATLAS of finite groups. Clarendon Press, Oxford, 1985.

[注15]例えば次のような場合があります。f, f' を $VB^{\natural,0}$ の σ-型 $c=7/10$ ヴィラソロ元とし、s, s' を対応する $\mathbb{B}$ の 2A 元とすると、ss' が $\mathbb{B}$ の 2C 元であるとき、$VB^{\natural,0}$ において対応すべき部分代数は $L(7/10,0)^{\otimes 2}\oplus L(7/10,3/2)^{\otimes 2}$ になりますが、f と f' が生成する部分代数は $L(7/10,0)^{\otimes 2}$ であり、望まれるものより小さくなってしまいます。この場合、拡大された超代数 $L_{N=1}(7/10,0)$ を考えれば、この不一致は解消でき、部分代数同士の対応でも辻褄が合います。

[B] R.E. Borcherds, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras. *Invent. Math.* **109** (1992), 405?-444.

[C] J.H. Conway, A simple construction for the Fischer-Griess monster group. *Invent. Math.* **79** (1985), 513–540.

[FLM] I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster. Academic Press, New York, 1988.

[FZ] I.B. Frenkel and Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representation of affine and Virasoro algebras. *Duke Math. J.* **66** (1992), 123–168.

[G] R.L. Griess, The friendly giant, *Invent. Math.* **69** (1982), 1–102.

[H1] G. Höhn, Selbstduale Vertexoperatorsuperalgebren und das Babymonster. Ph.D. thesis, Bonn 1995, arXiv:0706.0236

[H2] G. Höhn, The group of symmetries of the shorter moonshine module. `arXiv:math/0210076`.

[H3] G. Höhn, Generalized moonshine for the Baby Monster. preprint.

[H4] G. Höhn, Conformal designs based on vertex operator algebras. *Adv. Math.* **217** (2008), 2301-2335.

[HLY] B. Höhn, C.H. Lam and H. Yamauchi, McKay's E_7 and E_7 observations on the Babymonster and the Fischer group Fi_{24}, preprint.

[K] V. G. Kac, Vertex algebras for beginners, second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[KR] V.G. Kac and A.K. Raina, Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie algebras. World Scientific, Singapore, 1987.

[LLY] Ching Hung Lam, Ngau Lam and Hiroshi Yamauchi, Extension of unitary Virasoro vertex operator algebra by a simple module. *Internat. Math. Res. Notices* **11** (2003), 577–611.

[Li] H. Li, Symmetric invariant bilinear forms on vertex operator algebras. *J. Pure Appl. Algebra* **96** (1994), 279–297.

[Ma] A. Matsuo, Norton's trace formulae for the Griess algebra of a vertex operator algebra with larger symmetry. *Commun. Math. Phys.* **224** (2001), 565–591.

[MaN] A. Matsuo and K. Nagatomo, Axiom for vertex operator algebra and the locality of quantum fields. MSJ-Memoirs **4**, Mathematical Society of Japan, 1999.

[Mi] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras. *J. Algebra* **179** (1996), 528–548.

[Y] H. Yamauchi, 2A-orbifold construction and the baby-monster vertex operator superalgebra. *J. Algebra* **284** (2005), 645–668.

[Z] A.B. Zamolodchikov, Infinite additional symmetries in two dimensional conformal quantum field theory, *Theor. Math. Phys.* **65** (1985) 1205.