

## 式の値と文字式の背景および発展的な事例

中部大学現代教育学部 金光三男 (Mitsuo Kanemitsu)  
College of Contemporary Education  
Chubu University

数学教育で必要なこととして、

(1) 数学が創られていくときの状況・発想やその背景を知り、できるだけ簡単な数学を使用してその有用性・良さを理解させること。

(2) 数学は発展しつつあり、完成された数学をいつまでも追いかけているだけでは駄目だという意識を持つこと。そして追体験でも良いから自分で数学を創っていくという体験を豊富に持つこと。

また、日本教育大学協会「モデル・コア・カリキュラム」研究プロジェクトの報告書 ([7]) では、到達目標の確認指標の項目例として「小学校から高等学校までを視野に入れて、中学校数学科における指導内容の系統性を理解している。」というのがあげてあるが、これをさらに大学での授業で行われている数学までを視野に入れるところまで拡張して考察したり、また確認指標例「教科書の内容を十分理解し、教科書を介して分かりやすく学習を組み立てる…、子どもからの質問に的確に答えることができるか」ということの確認の手だてのレポートとして「中学校における文字式の指導内容の系統性を論じる」が述べられているが、これらも大学教育の授業内容にまで拡張して考察してみる。

このような視点からいくつかの事例の考察をしてみよう。

### 事例 1. 文字式と分数

中学校 2 年の数学の教科書 ([9, p.30]) における第 2 章連立方程式 (1 連立方程式とその解) の「考えてみよう」に次のような問題がある。

19 人で、3 人部屋を  $x$  室、2 人部屋を  $y$  室使ってとまるとき、人数の関係を等式を使って表しましょう。([9, p.31] の追加条件) 使える部屋の数は 8 室だそうです。

これは連立一次方程式の組

$$\begin{cases} 3x + 2y = 19 \cdots \\ x + y = 8 \cdots \end{cases}$$

これは

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} (= 1)$$

とおく。

世界最古の数学書「アーメス・パピロス」(B.C.1700年)に、方程式の問題があり、これをさらに数千年さかのぼったシュメールの数学にも簡単な一次、二次の方程式が扱われていた([6, p.38])。また[4, p.83]によると、「方程」は紀元1世紀頃には存在していた中国の古算書「九章算術」の巻第八にでてきている。equationに方程を使用したのは宣教師であるアレキサンダーワイリー偉烈亞力(イギリス, 1815-1887)が、ド・モルガン(1806-1871)の本を訳した「代数学」(1859)が最初だそうである。この本には「二式の間には等号を入れたものを方程式という。文字にどんな数を代入しても二辺が恒に相等しいものを恒等式という」と書かれているそうである。一次方程、二次方程という用語も使用されていた。「九章算術」に出てくる問題はすべて連立一次方程式になる問題であったそうである。中国ではこういう問題を算盤の上に算木を並べて解いたのである。解き方は現在の加減法とまったく変わらなかった。この過程で正負数の加減がでてくるので、それについての計算規則が発見された。

一方、西洋では連立方程式を加減法で解く研究はかなり遅れて、17世紀後半から行われた。ライプニッツは1693年に連立二元一次方程式とその解を行列式の展開に相当する結果で得ている。G.Cramer(スイス, 1704-1752)が連立方程式の消去から行列式の発想に達していた。ライプニッツより日本の関孝和の方が速く行列式の発想に達していた。

中村幸四郎の「数学史」([5])によると、方程式の理論において、既知数は $a, b, c, \dots$ 等のアルファベットの首部の文字で表わされ、未知数は $x, y, z, \dots$ 等のアルファベットの尾部の文字で表わされていた。このような記号法ができたのは哲学者であるデカルト(1596~1650)による。ライプニッツは方程式の解法においても、これだけでは十分な表現ができないことを認めていた。文字の代わりに、「記号数」を導入し、代数学は数を文字で書き表す技法だけではなく、数自身を一般的方法で取り扱い、一般的に成立する数式を得るためのものであると考えていた。言い換えると、ライプニッツは「代数学は一般的数の理論である」見方をしていた。上で述べたようにこの考えで「行列式」を発見した。

さてもとの中学の教科書にある問題にもどろう。

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

この行列式 $D$ の第1行を加えたものを分子に、第2行を加えたものを分母にした分数

$$\frac{5}{2}$$

は既約分数である。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。Aの転置行列を

$${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると、この行列式は  $|{}^tA| = |A| = 1$  である。このときも第1行の要素の和4を分子に、第2行の要素の和3を分母とした分数  $\frac{4}{3}$  は既約分数である。

一般に二次の行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

の値が1なら、第1行の要素の和を分子にして、第2行の要素の和を分母にした分数  $\frac{a+b}{c+d}$  は既約分数になる。

$ad - bc = 1$  とした行列式の値では見通しが悪いが、行列式の性質を使用して  $\frac{a(x+1)+b}{c(x+1)+d}$  の  $x$  に色々な値を代入した分数は既約分数である。教科書の問題で

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+3 & 2 \\ x+1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

これより分数  $\frac{2x+5}{x+2}$  は既約分数である。これより、 $x = 0, 1, 2, 3, \dots$  を代入した分数

$$\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \dots$$

などはどれも既約分数となる。

このように行列式の性質をうまく利用すると見通しがよくなり解決できることが多い。

また、中学校の数学の教科書から分数式を取り出して、それに値を代入して既約分数をつくる。そのとき背景にある行列式と関連付けて、行列式の性質を使用して別の既約分数を見通し良く生産していくことができる。

## 事例2. 文字式とその値の背景など

中学校1年の数学の教科書 ([8, p.49]) における第2章文字の式 (1文字を使った式, 1数量を文字で表わす) の「例3 2種類の文字で表わされる数量」において、次のような例があげられている。

新幹線の車両には、2人がけと3人がけの座席がある。2人がけ  $a$  列と3人がけ  $b$  列を使ってすわることのできる人数は、

2人がけの座席には、 $2 \times a$  (人)

3人がけの座席には、 $3 \times b$  (人)

だから、あわせて、

$$2 \times a + 3 \times b \text{ (人)}$$

と表わせる。

人数が1人なら、2人がけと3人がけの座席のどちらに座っても空席ができる。人数が2人なら、2人がけの座席に2人ともすわれば、座っている人と空席の混在した座席はできない。3人なら、3人がけの座席に3人とも座り、4人なら2人がけの座席2箇所に座ればよい。同様に考えていくと、この問題の結論として1人のときだけ不可能で、他の場合は可能である。

このように、2人がけと3人がけの座席に、座っている人とそうでない座席(空席)の混ざったものができる人数とできない人数は、この式の $x$ と $y$ に値を入れて表わされる数かどうかを見れば分かる。ただし、座り方はできるだけ詰めて座るものとする。

ここでは、都合上 $2a + 3b$ の代わりに、 $2x + 7y$  ( $x, y$ は0以上の整数)としてこの形で表わされる数や表わせない数について考察しよう。もちろん $a, b$ は互いに素である自然数として、 $ax + by$ としてもよいが具体的な上記の例で考察していく(c.f.[1], [12])。

まず $2x + 7y$ は高校の数学なら、数ベクトル $(2, 7)$ と $(x, y)$ の内積として定義される。

サイコロを投げて、座標平面上の格子点 $P$ を考える。偶数の目がでたら2だけ $P$ は座標平面上の $x$ 軸の正の方向に平行移動し、奇数の目がでたら7だけ $y$ 軸の正の方向に平行移動する。はじめに $P$ は原点にあったとすると、 $n$ 回連続してサイコロを投げたときに到達した点の座標を求めてみる問題を考える。

これをハンガリーの数学者G.Polya(1887-1985)([10])の行った数の配置表を用いる方法で求めてみよう。

そのためにまず点 $P$ の移動することのできる点の座標は(同じ点に移るときは1つにまとめると)次のようになる。

$n = 0$	1	2	3	4	5	...
$(0, 0)$	$(2, 0)$	$(4, 0)$	$(6, 0)$	$(8, 0)$	$(10, 0)$	.
	$(0, 7)$	$(2, 7)$	$(4, 7)$	$(6, 7)$	$(8, 7)$	...
		$(0, 14)$	$(2, 14)$	$(4, 14)$	$(6, 14)$	...
			$(0, 21)$	$(2, 21)$	$(4, 21)$	...
				$(0, 28)$	$(2, 28)$	...

この格子点の二つの座標の和を作ると、

$y = 0$	0	2	4	6	8	10	...
$y = 1$		7	9	11	13	15	·
$y = 2$			14	16	18	20	...
$y = 3$				21	23	25	...
$y = 4$					28	30	...

この配置表に出でこない数を見ることにより、 $2x + 7y$  の形に表わされない数は 1, 3, 5 であり、他のすべての自然数はこの形で表わすことができる。G.Polya もこの方法について述べているが「表の右方および下方に限りなく広がるものを想像する」とあり、 $y = 0, 1$  で十分であることは述べられていないが、G.Polya はこのことを承知の上で上記のように書いたのであろう。数の配置表で  $y = 0, 1$  のみを見れば十分であることは、整数  $2x, 2x + 7$  を 2 で割ったときの余りは 0, 1 であることによる。

また、サイコロを投げて、同一点に移る回数は下記のようにパスカルの三角形として得ることができる。パスカルは「人間は考える葦である」という名言、物理学や科学革命といわれる自然科学が急速に発達した 17 世紀 (1623-1662) のフランスの数学者でもあり哲学者でもある。また、計算機の創始者であるとも言われている ([6, p.23])。幾何学の方法が説得術に役立つことを主張したり、貴族の間で流行していた賭博の分配の研究から確率論の端緒をつくった ([4, p.24])。パスカルはフェルマーと文通をしながら確率論に貢献した。さらに「数三角形論」という論文のなかで 3 ケ所も数学的帰納法が現れ数学的帰納法を確立した ([4, p.73])。  ${}_nC_r : {}_nC_{r+1} = (1+r) : (n-r)$  という定理にそれは使用されている ([4, p.197])。

1回	2回	3回	4回	5回	6回	7回	...
1	1	1	1	1	1	1	·
1	2	3	4	5	6	7	...
	1	3	6	10	15	21	...
		1	4	10	20	35	...
			1	5	15	35	...
				1	6	21	...
					1	7	...

上で  $2x + 7y$  で表わされる数の配置表を作成したが、パスカルの三角形も 2 項係数を表わすための数の配置表である。

この表から、パスカルは色々な結果を見つけている ([11, p.13])。例えば、表において 4 回目の箇所を縦に見ると、1, 4, 6, 4, 1 である。上から第 2, 第 3 の数字は 4, 6 である。この比  $4 : 6 = 2 : 3$  は「4 を含んで上から 4 までの数字の個数 2」と「6 を含んで 6 から下にある

数字の個数3」である。第5回目で見ると、表の上から順番に、1, 5, 10, 10, 5, 1の数字が並んでいる。上から第2, 第3の数字をみると5と10である。この比 $5:10=1:2=2:4$ は「5を含んで上から5までの数字の個数2」(5は二つあるが上の5)と「10を含んで10から下にある数字の個数4」(10が二つあるが上の10)の比である。

次に4回目の $4 = {}_4C_1$ と $6 = {}_4C_2$ の和は5回目の $10 = {}_5C_2$ となる。一般に、 ${}_nC_{r-1} + {}_nC_r = {}_{n+1}C_r$ なる公式が見えてくる。

今度は配置表とは異なる方法で求めてみよう。

$2x + 7y$  は数ベクトル  $(2, 7)$ ,  $(x, y)$  の内積または  $1 \times 2$  型行列  $(2, 7)$  と  $2 \times 1$  行列

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の積とみなすことができる。

上で述べた配置表の  $y = 0, 1$  の部分を書きあげると、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}, \dots$$

というベクトルの並びから次のように記すことができる。

$$\begin{pmatrix} x+1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2 \\ 2x+7 \end{pmatrix}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

この式で  $x = -3$  を代入すると右辺の行列の第2成分として1が得られる。また  $x = -2, -1$  を代入すると3, 5が得られる。これらは条件「 $x$ は0以上の整数」に反する。従って  $2x+7y$  では、1, 3, 5が表わせないことが分かる。

さらに上の2つの方法と異なる  $2x + 7y$  の形の数を格子点を用いて表現してみよう。

その前に、G.Polyaがよく言う「類比」(異なったものの中に潜む同じもの、例えば、枝の多い枯れ木、レントゲンで写した気管支造影の写真、ナイル川の支流、葉の葉脈等にある類似性)の例を述べた後に  $2x + 7y$  の形の格子点について考察しよう。

代数計算と微分の計算の類比として、[3, p.176]における  $(x+y)^1 = x^1y^0 + x^0y^1$  ( $x^0 = y^0 = 1$ )に対比して、 $d(xy) = dx d^0y + d^0x dy$  ( $d^0x = x, d^0y = y$ )がある。次数を上げてても同様に成立する。

$ax + by$  はベクトルの一次結合(ベクトルの実数倍したものの和)を連想させる。すなわち二つの関係をG.Polyaがよくいう類比的に考える。

ベクトルの一次結合  $ax + by$  : 数の和  $xa + yb$   
 $a, b$  は一次独立 :  $a, b$  は互いに素

のように考える。 $2x + 7y$  の場合は、直交座標平面を考え、 $x$  軸上に単位 2、 $y$  軸上に単位 7 をとる。一次独立なベクトル 2, 7 に対し、 $2x + 7y$  は平面ベクトルである。しかし、今は数  $2x + 7y$  を考察しているから、 $2x + 7y$  の終点を平面上の格子点と考えたとき、1次元に戻さなければならない。平面上の点  $(r, s)$  を通る傾き 1 の直線  $l$  と  $x$  軸の交点は  $(r - s, 0)$  である。Weierstrass による自然数から整数を定義する方法はこの考えである。直線  $l$  の傾きが  $-1$  のとき、 $x$  軸との交点は  $(r + s, 0)$  である。従って、格子点  $(2x, 7y)$  を通り、傾き  $-1$  の直線に沿って  $x$  軸上に平行射影すると自然数  $2x + 7y$  が得られる。

$x$  軸上の負でない偶数の格子点  $(2x, 7y)$ ,  $(x = 0, 1, 2, \dots)$  を通り、傾き  $-1$  の直線に沿って  $x$  軸上に平行射影して得られる点は  $2x + 7y$  の形の数を表わす。1 は点  $(-3, 1)$  の射影による像であるが、点  $(-3, 1)$  は条件「 $x$  は負でない整数」をみたさない。3 は点  $(-2, 1)$  の射影による像であるが、 $x$  は負でない整数という条件に反するから  $2x + 7y$  の形で表わせない。5 も点  $(-1, 1)$  の射影による像で同様のことがいえる。

自然数の  $2x + 7y$  の形に表わされる数を具体的に書くと、次のようになる。

$0 = 2 \cdot 0 + 7 \cdot 0$	$1 = 2(-3) + 7 \cdot 1$
$2 = 2 \cdot 1 + 7 \cdot 0$	$3 = 2(-2) + 7 \cdot 1$
$4 = 2 \cdot 2 + 7 \cdot 0$	$5 = 2(-1) + 7 \cdot 1$
$6 = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 0$	$7 = 2 \cdot 0 + 7 \cdot 1$
$8 = 2 \cdot 4 + 7 \cdot 0$	$9 = 2 \cdot 1 + 7 \cdot 1$
...	...

この表で、第 4 行以下の数はすべて  $2x + 7y$  ( $x, y = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) の形に書くことができる。第 1 行から第 3 行までは  $2x + 7y$  の形に書ける数と書けない数が左右に並んでいる。従って、 $2x + 7y$  と書ける数の個数と書けない数の個数は等しく、最小数 6 の半分である。 $2x + 7y$  の形に表わされる連続した数のうちの最小数(導手という)は 6 である。それより小さい数には表わされるものとそうでない数が混在していて、表わされない最大数(Frobenius 数という)は 5 である。Frobenius 数は次のようにして求めることができる。格子点  $(0, 7)$  に対して  $x$  軸に沿って負の方向に 1 ますだけ移動した点  $(-2, 7)$  を考える。この点の傾き  $-1$  の直線に沿った  $x$  軸上への平行射影の像が Frobenius 数  $-2 + 7 = 5$  である。導手はこの値に 1 を加えればよい。それ以後は  $(-2 + k) + 7$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) として連続した数が得られる。 $2x + 7y$  の形に表わされない数は 1, 3, 5 の 3 個で導手の半分である。

### 事例 3. 「見通しを持つ」という見地からの高校数学の発展的題材の例

これまで学校での算数・数学ではどちらかといえば、演習問題を解くことが中心であった。問題を解くことも重要であるが、数学の体系に目を移すことや構築の仕方に、例え幼稚な結果でも考えて見る必要性がある。その例として、 $1+2+3+\dots+n$  や  $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$  の公式で更に累乗の全体に目を移すと、いくつかの規則性を見つけることができる。教師自身が、自ら規則を見つけ出すことによって関連した公式のよさや美しさを生き生きと情熱を持って生徒に伝えることができるのではないだろうか。また因数定理、多項式の微分や積分などを含んでいる。この報告書は、参考文献 [3] の内容を少し手を加えて補足したものである。

数学 B は、平面上のベクトル、空間のベクトル、数列、統計とコンピュータや数値計算とコンピュータの内容である。

$k$  乗の始めの  $n$  項の和を

$$C_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$$

と表すこととする。

数列の章の累乗和という所で、

$$C_1(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$C_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

が本文に書いてあり、問いに

$$C_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

があげてある。

$n$  番目の三角数

$$C_1(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

は最初の  $n$  個の整数の和になっていて、変数  $n$  の多項式として表現できる。

$$C_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$C_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

4 乗以上の累乗の和の公式は教科書に載ってはいないが、作り方は高校生でも類推できる。

$$(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$$



において,  $k = 1$  から  $k = n$  までを代入して, これら  $n$  個の等式を辺々を加えると

$$C_4(n) = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) = \frac{1}{6}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

が出てくる. 更に,

$$C_5(n) = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

となる.

ここで, 因数分解された右辺を見て規則性が予想されないであろうか.

- (1)  $n$  と  $n+1$  がどの累乗和にも出てきている.
- (2) 偶数乗の累乗和の因数には,  $2n+1$  がある.
- (3) 奇数乗 ( $\neq 1$ ) の累乗和の因数は,  $n^2(n+1)^2$  を持つ.

このことをもう少し 6 乗以上の累乗和についても Mathematica を使用するなどして調べてみよう.

$$C_6(n) = \sum_{k=1}^n k^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1) = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

$$C_7(n) = \sum_{k=1}^n k^7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2) = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$$

$$C_8(n) = \sum_{k=1}^n k^8 = \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^3+5n^4-15n^3-n^2+9n-3) = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$C_9(n) = \sum_{k=1}^n k^9 = \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3) = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2$$

$$C_{10}(n) = \sum_{k=1}^n k^{10} = \frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+25n^2-15n+5) = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$$

$$C_{11}(n) = \sum_{k=1}^n k^{11} = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(2n^8+8n^7+4n^6-16n^5-5n^4+26n^3-3n^2-20n+10)$$

$$C_{12}(n) = \sum_{k=1}^n k^{12} = \frac{1}{2730}n(n+1)(2n+1)(105n^{10}+525n^9+525n^8-1050n^7-1190n^6+23n^5+1420n^4-3285n^3-287n^2-2073n-691)$$

$$C_{13}(n) = \sum_{k=1}^n k^{13} = \frac{1}{420}n^2(n+1)^2(30n^{10}+150n^9+125n^8-400n^7-326n^6+1052n^5+367n^4-1786n^3+202n^2+1382n-691)$$

$$C_{14}(n) = \sum_{k=1}^n k^{14} = \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(3n^{12}+18n^{11}+24n^{10}-45n^9-81n^8+144n^7+182n^6-345n^5-217n^4+498n^3+44n^2-315n+105)$$

$$C_{15}(n) = \sum_{k=1}^n k^{15} = \frac{1}{48}n^2(n+1)^2(3n^{12} + 18n^{11} + 21n^{10} - 60n^9 - 83n^8 + 226n^7 + 203n^6 - 632n^5 - 226n^4 + 1084n^3 - 122n^2 - 840n + 420)$$

$$C_{16}(n) = \sum_{k=1}^n k^{16} = \frac{1}{510}n(n+1)(2n+1)(15n^{14} + 105n^{13} + 175n^{12} - 315n^{11} - 805n^{10} + 1365n^9 + 2775n^8 - 4845n^7 - 6275n^6 + 11835n^5 + 7485n^4 - 17145n^3 - 1519n^2 + 10851n - 3617)$$

となる.

これらについても, 上で述べた (1) - (3) は成立している.

実際, (1) - (3) は一般化しても成立する. 証明は Bernoulli 数や Bernoulli 多項式を使用して出来る. 無理数  $e = 2.7182818 \dots = \lim(1 + \frac{1}{n})^n$  は自然対数の底で微分や積分において本質的な役割を果たす.  $\frac{t}{e^t-1}$  を Maclaurin 展開したものが次式の右辺である.

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(0) \frac{t^n}{n!}$$

にでてくる  $B_n(0)$  は Bernoulli 数と呼ばれている.

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(0) x^{n-k}$$

は Bernoulli 多項式と呼ばれている. 次数の低い Bernoulli 多項式を列挙して見よう.

$$B_0(x) = B_0(0) = 1$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = x(x - \frac{1}{2})(x - 1) \quad B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$$

などである. ここで,  $B_2$  を  $x$  で微分すると  $B_1(x)$  の 2 倍になっている. 同様に  $B_3(x)$  を微分すると  $B_2(x)$  の 3 倍になっている. よって

$$\frac{d}{dx} B_n = B_n(x)' = n B_n(x)$$

が予想される. 同様に Bernoulli 多項式  $B_n(x)$  を  $x$  で積分し, 積分定数として  $B_{n+1}(0)$  なる Bernoulli 数にとると,

$$\int B_n(x) dx = \frac{1}{n+1} B_{n+1}(x)$$

となる.

$f(x) = B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(1)$  とおくと,  $f(x) = (n+1)x^n$  が数学的帰納法で証明できる. この式に  $x = 1, 2, 3, \dots, p$  を代入して辺々を加えると,

$$B_{n+1}(p+1) - B_{n+1}(1) = (n+1)(1^n + 2^n + 3^n + \dots + p^n)$$

を得る. 書き換えると

$$\sum_{k=1}^p k^n = 1^n + 2^n + \cdots + p^n = \frac{B_{n+1}(p+1) - B_{n+1}(1)}{n+1}$$

$f(0) = 0, f(-1) = 0$  だから累乗の和の公式が, 以前述べた (1) がいえることが分かった.

$n$  が奇数のときは,  $f(x)' = (n+1)B_n(x+1)$  だから,  $f'(0) = 0, f'(-1) = 0$  となる. よって因数定理より, (3) がいえた.  $n$  が偶数であるとき,  $n+1$  は奇数だから,  $f(-\frac{1}{2}) = 0$  だから, 因数定理より (2) がいえた.

(4)  $r (\neq 1)$  が奇数のとき,  $\sum_{k=1}^n k^r$  の最高次の項の係数の逆数は,  $r+1$  である.

(5)  $r$  が偶数のとき,  $\sum_{k=1}^n k^r$  の最高次の項の係数の逆数は,  $r+1$  である.

$a_1, a_2, \dots, a_{r+2}$  を整数で, 整係数多項式の内容が 1 とするとき,

$$\sum_{k=1}^n k^r = \frac{1}{q}(a_1 n^{r+1} + a_2 n^r + \cdots + a_{r+1} n + a_{r+2})$$

(6)  $r (\neq 1)$  が奇数のとき,  $q$  は 4 の倍数である.

(7)  $r (\neq 1)$  が奇数で, さらに  $r$  が 5 以上で 3 の倍数でないときは,  $q$  は 12 の倍数となる.

(8) また,  $r$  が偶数ならば,  $q$  は 6 の倍数である.

(9) さらに  $r$  が 4 の倍数になる場合は,  $q$  は 30 の倍数である.

例えば, (6) についてみてみよう.

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

の  $n$  の最高次の係数  $\frac{1}{4}$  の分母は 4 である.

$$\sum_{k=1}^n k^5 = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)$$

の因数分解を  $n$  に関する各整数係数の多項式の内容が 1 となるようにしたときの分母は, 12 で 4 の倍数である. また,  $r$  は 5 以上の奇数で 3 の倍数でなく 12 であり, (7) を満たしている.

$$\sum_{k=1}^n k^7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2)$$

の因数分解で  $n$  の整係数多項式の内容が 1 となるようにしたとき, 分母 24 は 4 の倍数である. また 12 の倍数であり, (7) が成立している.

同様に,

$$\sum_{k=1}^n k^9 = \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(2n^6 + 6n^5 + n^4 - 8n^3 + n^2 + 6n - 3)$$

の分母は20で4の倍数である。20は12の倍数ではない。これは5以上の奇数であるが3の倍数だから(7)の仮定が満たされていないからである。

次に、 $r$ が偶数の場合を考察しよう。(8)と(9)について例で確認してみよう。

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

では、 $q = 6$ で確かに6の倍数である。

$$\sum_{k=1}^n k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

では、 $q = 30$ であり、確かに6の倍数であり、 $r = 4$ は4の倍数だから30の倍数である。

$$\sum_{k=1}^n k^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1)$$

では、 $q = 42$ で6の倍数になっている。

$$\sum_{k=1}^n k^8 = \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6 + 15n^3 + 5n^4 - 15n^3 - n^2 + 9n - 3)$$

$q = 90$ は確かに6の倍数である。さらに $r = 8$ は4の倍数だから30の倍数に確かになっている。

$$\sum_{k=1}^n k^{10} = \frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(3n^8 + 12n^7 + 8n^6 - 18n^5 - 10n^4 + 24n^3 + 25n^2 - 15n + 5)$$

では、 $r = 10$ で $q = 66$ は確かに6の倍数である。

$$\sum_{k=1}^n k^{12} = \frac{1}{2730}n(n+1)(2n+1)(105n^{10} + 525n^9 + 525n^8 - 1050n^7 - 1190n^6 + 23n^5 + 1420n^4 - 3285n^3 - 287n^2 - 2073n - 691)$$

では、 $r = 12$ で、 $q = 2730$ だから、6の倍数でも30の倍数でもある。

[2, 定理42.1, 356頁]に $k$ 乗和に関する漸化式が述べてある。

$k \geq 0$ を整数とする。 $k+1$ を次数にもつ多項式 $C_k(X)$ で、各 $n = 1, 2, 3, \dots$ について

$$C_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

であるものが存在する。これらは漸化式

$$C_{k-1}(X) = \frac{(X+1)^k - 1}{k} - \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-2} {}^k C_i C_i(X)$$

により計算される。

$C_k(X)$ の最高次の係数(主係数)は $\frac{1}{k+1}$ であり、主係数の次の係数(すなわち $X^k$ の係数)は $\frac{1}{2}$ である。さらにその次の次数の係数である $X^{k-1}$ の係数は、 $\frac{k}{12}$ である。

## 参考文献

- [1] 石戸谷公直編, 鈴木将史・小谷健司・橋本行洋・石戸谷公直・金光三男著, 数学の小箱, 愛知教育大学ブックレット 2007
- [2] ジョセフ・H・シルヴァーマン(鈴木治郎訳), はじめての数論, 2007, 東京書籍印刷株式会社
- [3] 金光三男・掛布昇英・金應烈, 開いた教材としての累乗和の公式, 発展 2巻, (1993) 7-22
- [4] 片野善一郎, 数学史の利用, 共立出版 1995
- [5] 中村幸四郎, 数学史一形成の立場から一, 共立出版株式会社 1981
- [6] 仲田紀夫・吉村啓, 数学科での教材開発, 共立出版 1982.
- [7] 日本教育大学協会「モデル・コア・カリキュラム」研究プロジェクト, 教員養成カリキュラムの到達目標・確認指標の検討ー中学校教員養成における<教科>の在り方を中心にー, 2007
- [8] 岡本和夫他, 楽しさひろがる 数学 1, 2008 啓林館
- [9] 岡本和夫他, 楽しさひろがる 数学 2, 2008 啓林館
- [10] G.Polya(柴垣和三郎訳), 数学における発見はいかにしてなされるか 1 帰納と類比, 丸善 1996.
- [11] 上垣渉・何森仁, 数とその歴史 53 話, 1996 三省堂
- [12] 山口清・金光三男・稲垣栄二・波多野賢太郎, 整数問題の代数的・幾何的解法に関する事例研究ー  $ax + by$  の形で表わされる自然数についてー, 数学教育学会 Vol.44 No.1-2, 51-60 (2003)