

教科専門科目の内容を活用する教材研究の指導方法 (Team 2 プロジェクト)

島根大学・教育学部 青山 陽一 (Yoichi Aoyama)
Faculty of Education, Shimane University

岐阜大学・名誉教授 中馬 悟朗 (Goro Chuman)
Professor Emeritus, Gifu University

滋賀大学・教育学部 神 直人 (Naondo Jin)
Faculty of Education, Shiga University

§0. プロジェクトの理念

by 青山 陽一

チーム 2 のプロジェクトの理念・スローガンとして

「大学における教科専門科目の内容を体系的に把握して、小学校・中学校・高等学校の数学を自ら構成し授業展開等を行える数学教師を養成する為に」を掲げ、学生に備えさせるべき能力として

「小学校・中学校・高等学校の数学の内容全てを、大学における教科専門科目の内容を機能的に連携させて、捉え扱うことが出来る」

を目標にし、具体的方策として

「大学における教科専門科目の内容を活用する教材研究の指導」

に取り組む。従って、プロジェクトの名称を

「教科専門科目の内容を活用する教材研究の指導方法」

と設定する。なお、ここに言う‘教材研究’とは、教育現場で如何に提示するかではなく、我々の目指す教員を養成をするため、学生に教材を深く理解させるものと捉えている。

教科専門科目は元来、上述した理念等を実現するために設けられているものと理解しているが、小学校・中学校・高等学校(以下、小中高と言う風に略記する場合がある)を主とする教育界ではそのように捉えられていないとの印象がある。また、学生も教える学校種における教科内容を知っていれば充分で、後は授業の実施方法や児童・生徒の掌握の仕方を学べば‘良い’教師になれると思っている感じである。従って、小中高における内容を体系的に把握していないため、どの部分を教示しているかが判らず、各々の場面でバラバラに扱ってしまうという状況ではないだろうか。児童・生徒の多彩さに応じた教育が出来ず、教育効果が損なわれているのではないだろうか。小中高における数学の内容を、例えば、山脈のように捉え、ここにはこのような小山脈があり他の小山脈と如何

に繋がり大山脈を形成しているか、一方小山脈ひいては大山脈を形成する素となる個々のものがどのような意味を持っているかを考察しよう、というような立場で理解する能力を身に付けてこそ‘良い’数学教師になり得るのではないだろうか。また、このとき注意しなければならないのは、「小中高の数学を‘体系的地図’で示し、各々の位置付けを教えることをすればよい」では、能力とならないことを明確にしておくことである。更に、体系的に把握していれば、例えば何らかの理由により長期的に通学出来なかった児童・生徒を同学年のレベルにもっていくのに、教育課程に従って順に学習させていくのではなく、個々のケースに応じた効果的方法を案出する能力も身に付けられるであろう。

ここで、上記の中でも触れてあるが、我々の理念に思い到ることにもなった現状から三つ程記しておく。解決すべき問題点を認識する上にも役に立つと思われる。

- 極端な見方をすると、多くの学生は、教育実習等において授業を行うときなど、扱う内容を大学で学修したことを活用して把握することとして認識しておらず、児童・生徒と同じレベルでしか捉えていない。児童・生徒に教示する場合はそうすべきであるが、自分の理解が児童・生徒と同程度ではいけない事を理解していない。従って、大学の講義を意味のない、卒業に必要なだから仕方なく履修するものとの認識しか持たず、小中高の内容を使える形で講義して欲しいなどという考えを持っている。そしてそのような講義を役に立つなどとアンケートに記入する。

- 児童・生徒の思考方法・過程を推察する能力が備わっていないため、児童・生徒の行うことを観て、適切に対応し指導出来ることが出来ず、正しい方向に向いているのか、さもなくばその原因は何処に在りどう修正すればよいのか が判らない。従って、指導書等の解答などと比べて合っているか否かの判断で、児童・生徒の行っていることを評価している。数学は公式に値を入れて計算するものと合点してしまっ、答が合っているかどうか執着する傾向が見られる。一般に流通しているイメージ『算数・数学においては、答は一つ。』の術縛から逃れられず、全く同一の答に導こうとする。

- 或る文献において、「四角形において、四辺の長さがすべて等しいならば、四つの角がすべて等しいか？」という問いに「四辺の長さがすべて等しいから、四つの角がすべて等しい。」と答えたのに対し、「証明の意義・意味が理解されていない。」と判断している。しかし、もっと前の段階から考えないといけないのではないか。国語の問題で次の様なものがある：文章を読ませて、「著者は、『...』と結論付けているが、その根拠として挙げているものはなにか？」と問う。‘答’はその文章の中にあり、正しい文を挙げさせる。数学における上の問題は、この類ではない。算数・数学の世界を教えよう。その中に入れよう。児童・生徒の教科に対する認識は？ 実施している教科の世界に居るか？ 等、先生は判断して対応する必要がある。

理念に向かうためには、学生自らが‘数学をやる’ことが絶対条件である。自ら数学をやって、‘オモシロイ’、‘タノシイ’、‘ヤッター’、‘デキテウレシイ’等を感じた経験が必要である。自分で考えて何かを得る経験が必要である。これを教示出来るのは数学者であり、数学者しか出来ないことではないか。先生がそのような経験をしたことがないのな

ら、児童・生徒にどう伝えることが出来るのか、‘数学嫌い’を作ってしまう危険性が増すだろう。

これらのことは、講義やセミナーなどを通して体得していくものではあるが、我々教員がそれらのことを積極的に教示していく必要があると思われる状況である。

こういう考えの下、プロジェクトに取り組みたいと思う。

以下の三つの節において、教材研究の指導についての例を示したいと思う。§1で述べられているものは、著者が実際に行ったことを基に纏めたものであり、記録としての意味も合わせ持っている。§2は、第一著者が長年に亘り授業した内容から本プロジェクトの主旨に沿うように纏めたものに、第二著者の意見等を探り入れながら仕上げたものになっている。§3は、かなり不完全なものであるが、著者のプロジェクトの捉え方を示し、今後遂行していくべき課題の一例として提起することを意図して書かれている。

§1. 「折って作る放物線」の教材研究指導について

by 神直人

1.1 はじめに

著者は滋賀大学教育学部で数学(解析学)の講義を担当している。本学部における中学校の数学科教員志望者は主に教員養成課程理数教育コースに在籍している。理数教育コースにおいて中学校数学科免許取得に必要な「指導法に関する科目」としては次の4科目が開講されている：

中等数学科教育法 I,II (3回生に配当, 各2単位; 教科教育教員担当)

中等数学科教材内容論 I,II (3回生に配当, 各2単位; 教科専門教員担当)

理数教育コースに在籍し、中学校数学科1種免許を取得して卒業する学生の多くのものが上記4科目をすべて履修している。

著者は中等数学科教材内容論IIの1/2(秋学期7回)を担当している。ここで報告するのはこの科目で実施した授業である。この中等数学科教材内容論IIは3回生の秋学期に配当されており、受講生の多くはその直前の9月に中学校教育実習を経験している。実際に教えてみることで、自らの数学的知識・能力が数学科の教師としては不十分であると身にしみているときである。

そこで、彼らに教育実習と大学での数学・数学教育の授業との接点についてアンケートを取った。受講生のうち何名かは教育法などの授業が実習でも役に立った、あるいは参考にしたと答えたが、大学での専門数学の授業(たとえば微積分, 線形代数, 群論など)に言及したものはほとんどいなかった。つまり、彼らは自らの数学的知識・能力の不足を自覚してはいるが、その力を養うために専門数学の各授業が開講されていることには思いもつかない。これまでは例えば中学校教員になって授業を行う際に、高度な数学を学んでさえいればそこで培われた数学の知識、能力を自ら活用して教材研究、教材開発

を進めていけるはず、という暗黙の了解があったように思われる。しかし、今の学生の実態からは専門数学の内容を中学校の授業展開に活用している姿は見えてこない。この現状から、本プロジェクトのめざす

「大学における教科専門科目の内容を体系的に把握して、小学校・中学校・高等学校の数学を自ら構成し授業展開等を行える数学教師を養成するために」

を実現させるには教科専門科目を学ぶだけではだめで、それを教材研究に活用できる力を育てなければならない、と考える。

そこで中等数学科教材内容論IIでは、実際の中学校での授業を題材として「どこで、どのように大学等で学んだ数学が活用されるのか」を学生の前で見せて、体験させることを目標とした。標語として、「中学校実習で扱った内容の数学的な位置、広がり、深さを自ら学ぶ」を掲げた。

1.2 事例報告

「放物線」を題材に行なった3コマの授業について報告する。

1時間目 放物線は中学3年で「2乗に比例する関数」のグラフとして学習する。もちろんこの学年の生徒に、投げたボールの軌跡すなわち文字通りの放物線が2次関数のグラフとして表せる、という解説をすることはできないので事実を伝えるだけに終わっている。

しかし、教師にはこのことをきちんと理解してほしい。ところが受講生の半数ほどは高校では物理を未履修のためこのまま卒業して中学校の数学科教員に採用されれば、なぜ2次関数のグラフを放物線と呼ぶのかを理解しないまま教壇に立つことになってしまう。そこで1時間目はガリレオの話から入った。(以下は授業の流れである。)

1. 学生の前でチョークを落として見せて、その様子表現させる。

⇒ “だんだん速くなる” (見れば誰でもわかりそう)

2. 著者の発問 “だんだん速くなる” を確かめるにはどうすればいいか?

⇒ “高いところからチョークを落とした方が受ける手への衝撃が大きい”

3. 著者の発問 “だんだん速くなる” ことは一応わかった。ではこれをどう数学的に表現するか?

4. 著者「ガリレオは次の2つの可能性を考えた。例えば鉄の玉を持ち上げて手を放す。このとき、

(仮説1) 鉄の玉の速さは落下した 距離 に比例する

(仮説2) 鉄の玉の速さは落下した 時間 に比例する

のどちらかが成り立つに違いないとした。ではどちらが正しいか判断するにはどうすればよいか?

5. 著者「ストップウォッチ、ストロボ写真などのない当時においては、実は (仮説1)

の方が考えやすい。ではとりあえず(仮説1)から出発するとどういふ結論が導かれるか考えてみよう。」

⇒ 「(仮説1)のもとでは、運動が不可能になる」

6. 著者「(仮説2)が成り立つことをガリレオはどのように確かめたのか？」

(*) 授業はここまでで、以下のようなレポート課題を出した：

- 1 ガリレオはどのような実験をしたのか、「新科学対話」を読んでまとめよ。
- 2 (仮説2)の発見から「自由落下の場合、落下距離は落下時間の2乗に比例する」へはどのように繋がるのかを明らかにせよ。
- 3 投げ上げたボールの軌跡が2次関数のグラフで表されることを説明せよ。

2時間目 滋賀県甲賀市立城山中学校の神谷教諭が中学3年数学の課題学習として実施された研究授業「折って作る放物線」をもとに、授業を構成した。この研究授業に関しては、平成20年度滋賀県小・中学校教育研究会算数・数学部会研究発表会(高月大会)で、神谷先生から発表があった。

神谷先生の行った研究授業(50分)の流れは以下の(1)–(4)の通りである：

- (1) 導入：パラボラアンテナの実物を見せてその仕組みを探ることが授業のテーマであることを伝える。
- (2) 「地表面に垂直に交わる平行線群を1点に集めるにはどう反射させればよいか」を考えさせる。次に、1辺に垂直に交わる平行線を描いた長方形の用紙を配布して1点 F を決めさせ、反射させるべき面(線)を折らせる。(図1参照)
- (3) 用紙に浮かび上がる曲線が放物線であることを確かめる方法を話し合う。今回は、用紙から実測した長さを元に表を書いて、 $y = ax^2$ の関係を見つけることにより確かめさせる。
- (4) まとめ。

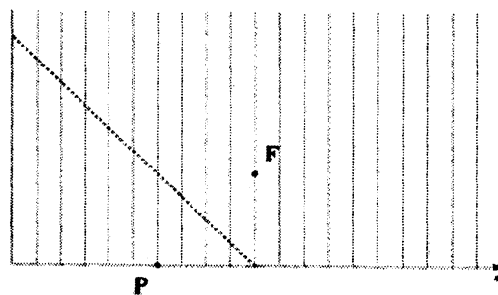


図 1:

著者の「放物線」を扱った2時間目は、大学生を相手に上述の授業をほぼそのまま行った。操作の箇所のみを具体的に説明すると、

- A4の薄紙に長辺に垂直に交わる平行線を5mm間隔で印刷したものを全員に配布。
- 1本の直線上に焦点 F を各自が自由に決める。
- 長辺上の垂線との各交点が焦点 F に重なるように折る。

○ 焦点 F がのっている垂線を y 軸にし、 y 軸と長辺の交点 P を F に重ねるように折ったときできる折り線を x 軸とする。1cm を 1 として曲線上の点の座標 (x, y) をいくつか実測する。

○ Excel を用いて、 $x, y, \frac{y}{x^2}$ の表を作る。

○ 表をもとに出来上がった曲線の方程式を求める。そしてグラフを描く。

○ 次週までに放物線ができた理由を考え(調べ)てくる。

この操作活動から考察へ移る際に重要なことは、「点 P を点 F に重ねるように折ったときできる折り線は数学的に何を表しているのか？」つまり、手で行った操作の数学的意味、あるいは解釈を考える、ということである。

3時間目 紙を折って放物線ができる理由を考察したが、受講生の理解、納得の仕方は中学生と大差なく、

大半の受講生は表ができて、 y/x^2 がほぼ定数になった段階でこれが放物線であると納得している。

また、数学的な理由を発表させたところ、

* F を焦点とし、長辺を準線とする放物線ができる。

* 折り線の包絡線として放物線が現れる

など、調べて出てきた「焦点」「準線」「包絡線」という言葉さえあれば自分も(そして他人も)理解、納得できたと思い込んでしまっていた。

そこで

(1) 曲線が放物線になることは初等幾何学的に証明可能であり、中学3年生段階でも理解できること

(2) 曲線が見えることもせいぜい1次関数を使って説明可能なこと

(3) 包絡線の一般的な理論は微積分の知識があれば理解可能なこと

を伝え、(1), (2) に関してきちんと証明することを最終レポートの課題とした。

最終レポートを提出の際には簡単な試問を課すことを伝え、理解、説明が不十分な場合には再提出を求めた。この結果、レポート提出までに多くの学生が2度3度と著者とのやり取りをすることで、学生の理解はある程度深まり、自らの数学の知識を活用した教材研究とはどういうものかを体験することができたものとする。

1.3 まとめ

中学校で「折って作る放物線」の授業を実際に行なう教員に数学(教育)的に求められるものをあげてみよう。

まず最初に大切なことは、自分で用紙を折ってみて、そこに放物線が見えることへの驚きであろう。この驚きは、その放物線が直線の集まりで構成されていることに気づくことでさらに深まるはずである。

次に放物線が現れることへの数学的な理由付けができなければならない。理由のうちいくつか考えられるものを記しておく。

A 1. 「1 直線 (準線) と 1 定点 (焦点) からの距離が等しい点の集まりは放物線である」という定理を持ち出して、この場合最初に定めた 1 点が焦点になり、長方形の用紙の長辺が準線になることを確かめる。このとき、長辺上の垂線との交点 P が焦点 F に重なるように折った折り線と垂線の交点 Q が見えている放物線上の点であることもわかる。

A 2. A 1 と本質的には同様であるが、長方形の長辺を x 軸、焦点 F がのっている垂線を y 軸にし、長辺上の垂線との交点 $P(a, 0)$ が焦点 $F(0, b)$ に重なるように折った折り線と垂線の交点 $Q(x, y)$ が次の条件を満たす：

$$\begin{cases} x & = a \\ \sqrt{(x-a)^2 + y^2} & = \sqrt{x^2 + (y-b)^2} \end{cases}$$

そして、 $y = \frac{1}{2b}(x^2 + b^2)$ が示され $Q(x, y)$ は 2 次関数のグラフ上にあることがわかる。

A 3. これは初等幾何学的に証明する方法である。長辺上の垂線との交点 P が焦点 F に重なるように折った折り線と垂線の交点 Q 、また、焦点 F がのっている垂線と長辺の交点を F に重ねるように折った折り線と垂線の交点を O とする。さらに、上述の 2 本の折り線の交点を R 、直線 OR と PQ の交点を S とおく。(図 2 参照)

このとき、線分 OS の長さで線分 SQ の長さを表すことを考える。

$\triangle PSR$ と $\triangle FOR$ は合同になるから $OS = 2RS$ 、すなわち $OR = RS$ がわかる。

また、 $\triangle FOR$ と $\triangle RSQ$ は相似になるから $SQ \cdot OF = RS \cdot OR$

以上より、 $SQ = \frac{1}{4 \cdot OF} OS^2$ が導かれる。

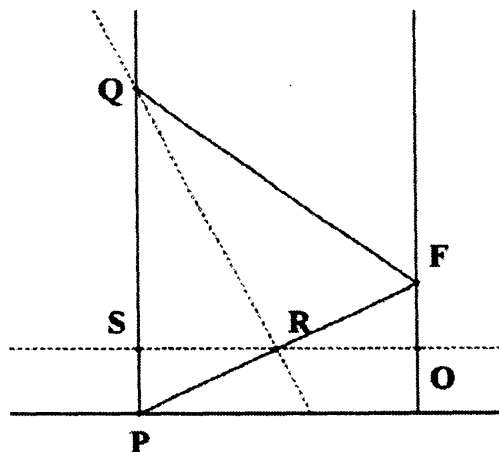


図 2:

A 1, A 2 の理解のしかたでは教員が納得することはできるが、生徒には理解が難しい。ところが、A 3 は三角形の相似を使うだけなので中学生にも理解可能である。目の

前にいる生徒の状況，時間数などによって中学校での授業中に放物線が見える理由を数学的に扱うことはほとんどありえないのかもしれないが，教員には自分が納得するだけでなく中学3年生ならばどのような納得のしかたがあるのかまで考えておいてもらいたい．そして例えばA3のような理解のしかたがあることにも気づいてほしい．

次に「なぜ直線の集まりから放物線が見えるのか」の理由も自分が納得するためと，生徒の立場に立った納得のしかたを考えてもらいたい．

B1. 包絡線の理論を用いれば次のように説明できる：

長方形の長辺を x 軸，焦点 F がのっている垂線を y 軸とすると，長辺上の垂線との交点 $P(s, 0)$ が焦点 $F(0, b)$ に重なるように折った折り線 $L(s)$ は，

$$L(s) : y = \frac{s}{b} \left(x - \frac{s}{2} \right) + \frac{b}{2}$$

で与えられるから，曲線族 $\{L(s)\}_s$ の包絡線は $f(x, y, s) = y - \frac{s}{b} \left(x - \frac{s}{2} \right) + \frac{b}{2}$ とおけば，

$$\begin{cases} f(x, y, s) = 0 \\ f_s(x, y, s) = 0 \end{cases}$$

から s を消去して， $y = \frac{x^2}{2b} + \frac{b}{2}$ を得る．

しかし，B1の包絡線の理論ではやはり中学生の疑問に答えることはできない．ここでも初等幾何学的な取り扱いを考えてみる (図3 参照)：

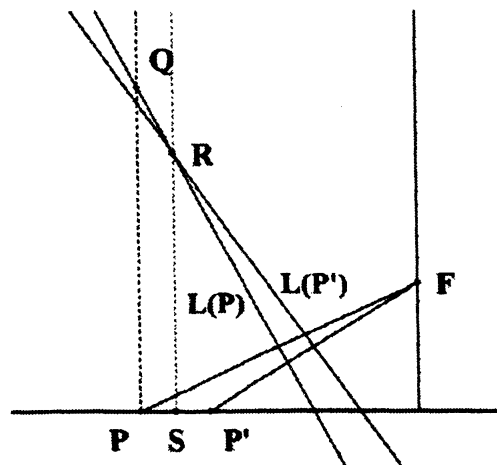


図 3:

B2. 長辺上の垂線との交点 P が焦点 F に重なるように折った折り線を $L(P)$, $L(P)$ と垂線の交点 Q とすれば，A3で示したように Q は放物線上の点である．

平面が折り線 $L(P)$ で2つの半平面に分割され，焦点 F のない方の半平面が切り取られ

るとする。 P を長辺上で動かしたとき、次々半平面を切り取って行って「残る形」を考えてみよう。

長辺上に P と異なる P' をとり、折り線 $L(P')$ を考える。 $L(P)$ は線分 PF の垂直二等分線、 $L(P')$ は線分 $P'F$ の垂直二等分線であるから、 $L(P)$ と $L(P')$ の交点を R は $\triangle FPP'$ の外心になる。 よって、 PP' の中点を S とすれば R は S を通る長辺への垂線と折り線 $L(P)$ の交点でもある。 つまり、点 Q は折り線 $L(P')$ で分割された半平面で常に焦点 F と同じ半平面に属する。

一方、点 P' を限りなく点 P に近づければ、交点 R は限りなく点 Q に近づく。 すなわち、 P' を P 以外の点で動かすとき、折り線 $L(P)$ 上の点で Q 以外は全て切り取られる。 つまり切り取られて「残る形」の境界は放物線をなすことがわかる。

このように1つの数学的事実でも高等数学を用いる方法や、もっと初等的な方法が考えられる場合もある。 中学生を相手に教えるから彼らに理解できない厳密な証明は知らなくてもいいと安易に考えるのではなく、まず自分が教えるべき内容を数学的にしっかりと理解したうえで、いろいろな説明の可能性を試してみても中学生にとって理解可能でかつ魅力的な説明を考えておこことが大切である。 授業でそれを説明するかどうかは、生徒を目の前にしてから判断すればよい。

今回の著者の授業だけでこれらの力を身に付けた教員を養成できるとは考えないが、改善を加えてよりよい授業を目指したい。

§ 2. 正多角形の作図に関する教材研究の指導について

by 中馬 悟朗・青山 陽一

2.1 はじめに

平成10年の教員免許法改革による教員養成の為の教科専門必要単位数の激減(40単位→20~28単位)等で数学の専門家からみると、「専門家とは言えない程の専門家を送り出している現状」をどのように考えればよいのであろうか? 全教科の教員を養成するのにそれぞれ同じ専門の単位数で専門家を養成させようとしているのが間違いではないかと思える。 現実に専門家養成に携わっている教員はかなりの教材研究を行っており、時間的にも体力的にも限界に近い感じである。

私たちは学生に備えさせるべき能力として「小学校・中学校・高等学校の数学の内容全てを、大学における教科専門科目の内容を機能的に連携させて、捉え扱うことが出来る」を目標にして、教材開発・研究を指導出来るように教科内容を考察するものである。

算数・数学を学ぶには、「図形を描いて考える」ことや「実習・実験を行いつつ考える」などの操作活動を通して、学習することは重要である。 その意味からも、初等幾何学に於ける「作図(問題)」は「算数・数学」を学ぶに適した教材と言える。 小学生からその学力に応じて、児童・生徒はしっかりと学習して慣れておくことが大切である。「作図(問)

題」には、必ず「証明(根拠)」を要求されるから、数学的な論証を学ぶためにも「作図(問)題」は適していると思われる。「証明」の面倒さから初等幾何学は嫌われてきた歴史的事実もあるのだが、「作図(問)題」における「証明」は「解析」をも含めて図形を描きながら考えるから比較的扱いやすいと言えよう。

数学の教員となるためには大学でも初等幾何を学んでおく必要がある。中学校・高等学校への入試問題のような難しい問題ばかりを扱うというのではなく、古典数学と現代数学の橋渡しとなるような教材とするべきである。数学の歴史から考えても、数学の発展に「作図(問)題」は深く関わっている。

ここでちょっと「小学校における作図」と「中学校における作図」とでは違いがあることに触れておこう。小学校においては、三角定規・コンパス・分度器等を使い、またその使用方法についても特段の制限を設けずに作図を行うのであるが、中学校においてはそうではない。中学校における作図について、[新編 新しい数学1, 教師用指導書 指導編, 東京書籍]より次を引用させていただく。

作図における定規とコンパスの役割. 定規で直線をひくこと背景には、直線が2点で決まるということがある。……2枚の三角定規を使って平行線をひくことは、直線を2点で決めていない(直線が通るべき2点を求めてから直線を定規でひくという方法になっていない)から、作図とはいえない。コンパスで円をかくとは、等しい距離をとったり移したりすることにほかならない。この二つのことから、ユークリッド原論の公準に対応しているとみることができる。

作図の定義. これからは「いわゆる作図といえば定規とコンパスのみを用いて図をかく」ということに注意する。このとき、定規は直線をひくために用い、長さを測るためには用いないこと、コンパスは円をかくために用いるが、ある長さと同じ長さを移しとるときも用いることを注意する。これから、中学校の学習では「作図」というときにはこの意味で使い、その必要がないときは、「図をかく」などの別のいい方をするように、教師の側も注意する必要がある。

即ち、「中学校における作図」はガロワ理論や円周率の超越性により解明されたギリシャの三大作図不可能問題(角の三等分問題・立方体倍積問題・円積問題)における「作図」であることを、教師は認識しておかなければならず、作図問題が教科専門科目の内容と深く関わっていることを学んでおく必要がある。また、この作図法が有効である理由として、

- ・ 図形を決める要素を明確に出来、図形に対する理解が深まる。
- ・ 作業を通して学習出来る、そしてそれを通して理解が深まる。
- ・ 作図の裏には方程式があることを学び、他の分野との関連を知ることが出来る。
- ・ 作図法は多種存在する。多様な解き方が在ることを知る。
- ・ 制限された方法で、どこまで可能かを見極める能力を養う助けになる。

等々が考えられる。

さて、ここでは特に興味ある正多角形の作図をとりあげ、作図可能な「正五角形の作図」と作図不能な「正七角形の作図」の教材研究を取り挙げる。「正七角形の作図不能」の‘証明’では、まず初等幾何学の立場で解析し、3次方程式の話に持込み、微分積分学からその方程式を考えて、最後にガロワ理論を用いて証明を完成する。このような証明段階を学ぶことは現代数学への橋渡しとして、大事な教材である。小学校算数専門・中学校・高等学校数学専門の教員となるためには、小学校・中学校・高等学校のそれぞれの教科内容だけでなくその数学的周辺の数学を専門家として学ぶ必要がある。

塾通いをしている最近の中学生に「学校の先生」と「塾の先生」とはどちらが教えるのが上手か？と聞いてみた。中学生の答は「塾の先生の方がしっかり教えてくれるから上手だし、習いやすい」とのことである。さらに私は「中学校の先生は難しい教員採用試験に合格してかなり数学の実力がある人たちのはずだよと…」。と言ったところ、これに対してその中学生からかえってきた返答は「塾の先生達は殆ど全員が学校の先生より有名大学を出ているし…信頼できる」でした。

塾のテキストにある問題で難しいものは幾何の問題が多いようである。昔から「たった一本の補助線を引くことが解決への道筋をひらく」と言われていたような問題である。このような問題はかなり熟知していないかぎり、たとえ数学の専門家と知っている人でさえも簡単には解けないと思われる。

現場古参教師からは新任として着任時に「大学で習った数学は直ぐに忘れて学校で教える数学と教え方を勉強しましょう」とか言われたりした新卒の教師もいるようである。

教育学部数学科では、塾の教師ではなく学校教育の専門家を育てようとしているのであるから、難しい入試問題に慣れるということではなく、古典数学と現代数学の架け橋となる部分をもしっかりと学び数学にも相当の自信を持ったしっかりした教師になってもらいたいと願っている。従って、数学的な知識が少なくても良いということにはならない。教科専門の単位数が激減して指導法の単位を多くする方が良しとするのはあまりに短慮であろう。

では、以下の小節において学生に教材研究の指導をする際の内容の例を示すことにしよう。

2.2 正五角形の作図

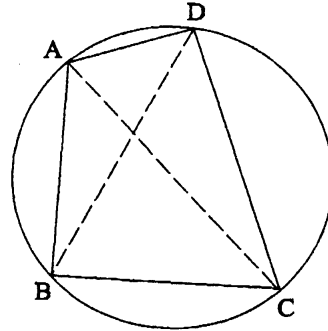
作図可能な正多角形は、正三角形・正四角形(正方形)・正五角形・正六角形・正八角形・正十角形・正十二角形・正十五角形・正十六角形・正十七角形・正二十角形…であり、作図不可能な正多角形は、正七角形・正九角形・正十一角形・正十三角形・正十四角形・正十八角形・正十九角形…である。この小節では作図が出来る場合として「正五角形の作図」を、次の小節では作図不可能な場合として「正七角形の作図」を考察する。

正多角形の作図の‘解析’を行う根拠として、中学校では相似から比を求める方法を探るのが普通のようなのだが、大学生に対しては「トレミーの定理」を用いて行わせる方法を探

りたいと思う。この定理の証明を課題として与えるのも有意義という点も考慮して、学生に、正多角形は円に内接することの証明とその円の中心の求め方を、中学生に教えるつもりで説明させておくのが良いかも知れない。

作図の解析に用いるトレミーの定理を確認しておく。

定理 2.2.1. (トレミーの定理). 同一円周上に4点 A, B, C, D がこの順に在るとき、次の等式が成立する： $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$



学生にはトレミーの定理の完全形を調べ、証明することを課す。また、ピタゴラスの定理 (= 三平方の定理) は周知のことであるが、きちんと復習させておくのが良いだろう。

問題 2.1. 与えられた線分を一辺とする正五角形を作図せよ。

解析. そのような正五角形 ABCDE が作図出来たものとする。一辺の長さを 1 として差支えない。対角線の長さは一つである。 a とする ($a = AC$)。A, B, C, D にトレミーの定理を適用して、 $1 + a = a^2$ を得る。即ち、 a は方程式

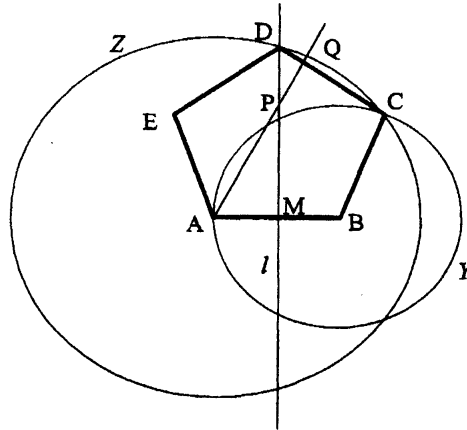
$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (2.1)$$

の解の一つである。これより

$$a = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} (\approx 1.618034) \quad (2.2)$$

を得る。(学生への課題として次を調べさせることも良いと思われる。この値は黄金比と呼ばれ、重要である。正五角形と黄金比は深い係わり合いがあり、その間の関係はしばしば用いられて興味深いものである。なお、ユークリッド原論において黄金比は第2巻命題11にあり、正五角形の作図は第4巻命題11にある。) □

作図. 与えられた線分を AB とする。AB の中点を M とし、AB の垂直二等分線 ℓ 上に $MP = AB$ となる点 P を取る。直線 AP 上に $PQ = AM$ となる点 Q を A と反対側に取り、A を中心として半径 AQ の円 Z を描き、 ℓ との交点の一つを D とする。B を中心として半径 BA の円 Y を描き、 Z との交点の内直線 AB に関して D と同じ側に在る方を C とする。B を中心として半径 BD の円 X と A を中心として半径 AB の円 W を描き、それらの交点の内直線 AB に関して D と同じ側に在る方を E とする。こうして正五角形 ABCDE が作図出来た。 □



円の選び方は色々あるので、全て行わせるのが良い。要するに、長さ $\sqrt{5}$ の線分を作図することになるので、他の方法も色々試させるようにする。

正五角形の作図が出来れば、正三角形あるいは正六角形と組合せて正十五角形の作図も出来ることを生徒に示すのは有意義である。是非、学生に実行させる。勿論、正十角形も。

2.3 正七角形の作図

問題 2.2. 与えられた線分を一辺とする正七角形を作図せよ。

解析. そのような正七角形 ABCDEFG が作図出来たものとする。一辺の長さを 1 として差支えない。対角線の長さは二つである。 $a = AC$, $b = AD$ とする。 $1 < a < 2$, $a < b < a + 1$ である。 A, B, C, D にトレミーの定理を適用して、 $1 + b = a^2$ を得、 A, B, C, E にトレミーの定理を適用して、 $a + b = ab$ を得る。これより a は方程式

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (2.3)$$

の解の一つであることが判る。この方程式は区間 $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ に解を持つ。 a は区間 $(1, 2)$ に在る解である ($a \approx 1.80194$)。 □

作図. 方程式 (2.3) は 3 次方程式で、左辺の式は有理数上既約である。カルダノの公式から見られるように、長さ a の線分を作図するためには三乗根を作図する必要がある。しかし、直線は 1 次方程式で、円は 2 次方程式で表わされるから、作図出来る冪乗根は平方根及びその繰返しに限られる。従って、長さ a の線分を作図することは出来ない。故に、正七角形の作図は不可能である。 □

代数学から、整数係数代数方程式の有理数解の形・多項式の既約性・カルダノの公式等の知識が必要になる。勉強してもらおう。微分積分学からについては、次の小節で述べることにする。

“はじめに”にも述べておいたが、ここで次のことを再度強調しておきたい。数学教師になる人には、ユークリッド原論において集大成され、二千数百年に亘り継承され発展してきた「初等幾何学」をしっかりと学んでおいて欲しい。それが前提となっていないと、ここで扱っていることが希薄なものになってしまう。そして、「現代の幾何学」を身に付けて欲しいものである。

2.4 微分積分学から

方程式(2.3)の解が区間 $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ に在ることは、連続関数に対する中間値の定理から得られる。そして、関数

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 \quad (2.4)$$

の挙動(グラフ)を調べることは、微分積分学の基本的事項である。

問題2.2の解析における b は方程式

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0 \quad (2.5)$$

の解の一つである。この方程式は区間 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$ に解を持つ。 b は区間 $(2, 3)$ に在る解である ($b \approx 2.24698$)。ここに、変換 $y = 1/x$ を行うと方程式(2.5)は

$$y^3 - y^2 - 2y + 1 = 0 \quad (2.6)$$

となる。方程式(2.3)と同じである。 b は方程式(2.3)の区間 $(0, 1)$ に在る解の逆数である。

ガウスは正17角形の作図法を示しただけでなく、頂点の座標の近似値も与えている。この視点も見落としてはならない。解の近似値計算法の一つであるニュートン法を確認させておくのが良いと思われる。即ち、次の定理を証明させ、近似値を求めさせる。

定理 2.4.1. (ニュートン法). $f(x)$ を2階微分可能な関数とし、 $f''(x)$ は区間 $[a_1, b_1]$ で一定符号、 $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$ とする。このとき、方程式 $f(x) = 0$ は区間 (a_1, b_1) に唯一つの解 s (重複度を込めて)を持つ。そして、

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \quad \text{if } f(a_1) \cdot f''(a_1) > 0$$

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)} \quad \text{if } f(a_1) \cdot f''(a_1) < 0$$

によって数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ or $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ を定めれば、有界単調数列であり、極限值は s である。

2.5 円周等分方程式

一般的に正多角形の作図について考察する。そのために、円周等分方程式について調べる方法を探ることにしよう。これを実行するためには、複素数・ガウス平面を学んでおく必要がある。現行の課程においては高校まででは学んでいないので、これらについて学ばせることが必要となる。 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\neq 0$) に対する、 $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta, \sqrt{\alpha}$ の作図方法を含め、そして、大学で学ぶ代数学の骨頂の一つである‘ガロワ理論’の登場となるのだが、現在の教員養成課程における単位数を考えるとガロワ理論を体系的に教授するのは非常に困難である。そこで、正多角形の作図を材料にガロワ理論の要点を教えようという目論見が生じる。教材研究を通して数学をより進んで学び、そのことにより教材研究を深く行えるようになり、そして．．．これが我々の理念に向かう道程である。

複素数と対応するガウス平面上の点を同一視する。

正 n 角形を作図することは、ガウス平面上の単位円周 $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| = 1\}$ を n 等分することである (1 を分点の一つとして)。従って、0 と 1 から出発して、定木とコンパスだけを使用して残りの $n-1$ 個の点に辿り着けるかということになる。(以下、作図は 0 と 1 から出発するものを主に考える。) 単位円周の n 等分点は方程式

$$z^n = 1 \quad (2.7)$$

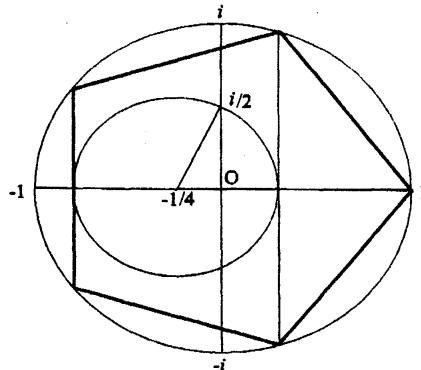
の n 個の解である。この方程式を n 次の円周等分方程式と呼ぶことにする。

$n = 5, 7$ の場合を考えてみよう。

$n = 5$: $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ だから $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ を解く。
 $z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$ と変形し、 $x = z + \frac{1}{z}$ と変換すれば

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad (2.8)$$

となる。方程式 (2.1) において $x \rightarrow -x$ と変換すれば、上の方程式になる。 $|z| = 1$ だから $1/z = \bar{z}$ で、 $x = 2\Re(z)$ である。従って、1 以外の 5 等分点の実数部分は $(\sqrt{5}-1)/4$ と $(-\sqrt{5}-1)/4$ である。これを根拠にする作図を実行させよう。



5 等分点の実数部分を求めることは、 $\cos(2k\pi/5)$ を求めることである。

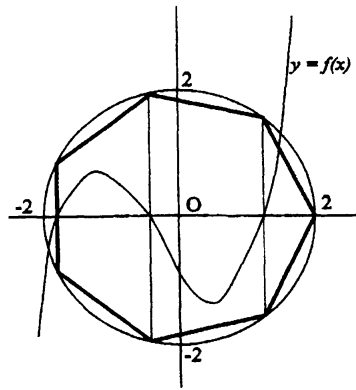
$$\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$$

を用いて方程式をたてると、因数分解と変数変換により上の方程式(2.8)を解くことになる、にも注意しよう。

$n = 7$: $z^7 - 1 = (z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ だから $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ を解く. $z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0$ と変形し, $x = z + \frac{1}{z}$ と変換すれば

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (2.9)$$

となる. 方程式(2.3)において $x \rightarrow -x$ と変換すれば, 上の方程式になる. 1以外の7等分点の実数部分は上の方程式の解の半分である. 3個の解の近似値を計算させ, 正七角形らしく見えるものを作図させよう. また, $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ のグラフを出来るだけ精密に描かせ, それを使って正七角形に近いものを作図させよう.



7等分点の実数部分を求めることは, $\cos(2k\pi/7)$ を求めることである.

$$\cos 7\theta = 64 \cos^7 \theta - 112 \cos^5 \theta + 56 \cos^3 \theta - 7 \cos \theta$$

を用いて方程式をたてると、因数分解と変数変換により上の方程式(2.9)を解くことになる、にも注意しよう。

なお, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ を用いて, $\cos n\theta$ を $\cos \theta$ の多項式で表せることを証明させ, 幾つかの n に対して求めさせておくのが良いかも知れない.

さて, 正 n 角形の作図可能性を分析しよう.

\mathbb{C} の部分体 K が ' $z \in K \Rightarrow \bar{z} \in K$ ' を満たしているとして, 次の何れかによって得られる数 ξ に対し $[K(\xi) : K] \leq 2$, $[K(\bar{\xi}, \xi) : K(\xi)] \leq 2$ が成立することを見る.

(LL) K の要素を結んで出来る直線二本の交点

(LC) K の要素を結んで出来る直線と K の要素を中心として K の要素を通る円との交点の一つ

(CC) K の要素を中心として K の要素を通る円二つの交点の一つ

そうして, ガロワ理論から次の定理が得られることを見せよう.

定理 2.5.1. $\alpha (\in \mathbb{C})$ が作図出来るための必要十分条件は, $K_0 = \mathbb{Q}$ の拡大体の列 $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_t$ で

(a) $K_t \ni \alpha$ (b) $[K_j : K_{j-1}] = 2$ for $j = 1, \dots, t$ (c) K_t は K_0 のガロワ拡大を充たすものが存在することである。

系 2.5.2. $\alpha (\in \mathbb{C})$ が作図出来るためには, α は \mathbb{Q} 上代数的で, α を零点とする \mathbb{Q} -係数既約多項式の次数が 2 の冪であることが必要である。(充分ではない.)

$x^3 - 2$ は \mathbb{Q} 上既約である (学生に証明させよう) から,

系 2.5.3. $\sqrt[3]{2}$ は作図出来ない。(立方体倍積問題の否定的解決)

1 の原始 n 乗根の一つを ζ とすると, ζ^k ($1 \leq k \leq n$, $\text{GCD}(k, n) = 1$) が 1 の原始 n 乗根の全てである. $\varphi(n)$ 個存在する. ($\varphi(n)$ はオイラーのファイ関数)

$$\Phi_n(z) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{GCD}(k, n) = 1}} (z - \zeta^k) \quad (2.10)$$

とおく. 即ち, $\Phi_n(z)$ は 1 の原始 n 乗根のみを零点とする多項式である. $\deg \Phi_n(z) = \varphi(n)$ である. ζ^k ($1 \leq k \leq n$) が 1 の n 乗根の全てである. 故に,

$$z^n - 1 = \prod_{d \text{ は } n \text{ の約数}} \Phi_d(z) \quad (2.11)$$

が成立する. これを使って,

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= z - 1, & \Phi_2(z) &= z + 1, & \Phi_3(z) &= z^2 + z + 1, & \Phi_4(z) &= z^2 + 1, \\ \Phi_5(z) &= z^4 + z^3 + z^2 + z + 1, & \Phi_6(z) &= z^2 - z + 1, & \Phi_7(z) &= z^6 + z^5 + z^4 + \\ & z^3 + z^2 + z + 1, & \Phi_8(z) &= z^4 + 1, & \Phi_9(z) &= z^6 + z^3 + 1, \dots, & \Phi_{17}(z) &= \\ & z^{16} + z^{15} + z^{14} + z^{13} + z^{12} + z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 \end{aligned}$$

と, 17 くらいまでは計算させておくのが良いだろう. そして, メビウスの反転公式にも触れるのが良いと思われる.

$\Phi_n(z)$ は整数係数モニック多項式で \mathbb{Q} 上既約である. そこで, $\Phi_n(z) = 0$ の解は一つの解の冪乗であることに注意すると, 次が判る.

定理 2.5.4. 正 n 角形は作図可能である. $\iff \varphi(n)$ は 2 の冪乗である.

次に注意する.

- 角の二等分線は作図可能であるから, 正 n 角形が作図可能ならば 正 $2n$ 角形も作図可能である.
- 正 n 角形が作図可能で, m が n の約数ならば, 正 m 角形も作図可能である.
- 正 m 角形と正 n 角形が共に作図可能で, $\text{GCD}(m, n) = 1$ ならば, 正 mn 角形も作図可能である.

そこで, 奇素数 p に対し, 正 p 角形と正 p^2 角形の作図可能性をしてみる.

• $\varphi(p^2) = p(p-1)$ は 2 の冪乗でないから、正 p^2 角形は作図不可能である。

• $\varphi(p) = p-1$ が 2 の冪乗になれば、 $p = 2^{2^r} + 1$ の形である。 $F_r = 2^{2^r} + 1$ ($r = 0, 1, \dots$) はフェルマー数と言われ、素数ならばフェルマー素数と呼ばれる。従って、

正 p 角形は作図可能 $\iff p$ はフェルマー素数。

$F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$ で、これらは全て素数である。
 $F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ で、これは素数でない。 ($r \geq 5$ のとき F_r は素数でない、という予想がある。(フェルマーの予想とは全く逆))

系 2.5.5. 次は同値である。

(a) 正 n 角形は作図可能である。

(b) n の素因数分解は、 $n = 2^e p_1 \cdots p_t$ (p_1, \dots, p_t は互いに相異なるフェルマー素数) の形である。

正九角形は作図出来ない ($9 = 3^2$)。従って、角 $2\pi/3$ の三等分線は作図出来ない。

系 2.5.6. 角の三等分線は作図可能とは限らない。(角の三等分問題の否定的解決)

系 2.5.7. n を自然数とする。次は同値である。

(a) n° (度数法) は作図可能である。

(b) n は 3 の倍数である。

ガウスが数学者になろうと決心した契機と言われている正 17 角形の作図について触れるのも、興味ある話題になるだろう。

§ 3. 三角形の合同・相似についての教材研究の指導について

by 青山陽一

学生が附属中学校における教育実習で行う授業を参観して、学生に取組んで貰いたいと考えた教材研究の仕方を、思い付くままに書き綴ったような形で述べさせて頂く。従ってこの節はまだまだ不完全なものであるが、その粗略さを利用してプロジェクトへの取組の構想を提起するものとしたい。

材料は、三角形の合同と相似に関することである。

先ず、学生の予備知識について述べておこう。その方が以下の分析等の背景が判り易くなると思われるので。

教育学部入学生の殆んどが、高校において数学Ⅲ,Cを履修していない。筆者が属する数理基礎教育専攻においても、多くがそうってきている。当専攻における代数学・幾何学・解析学のカルキュラム(概要)は次の通りである。

・代数学(筆者が担当): 線型代数学(1年次前期後期各2単位, 必修4単位),
代数学(2年次前期後期各2単位, 必修2単位)。

- ・幾何学：幾何学 I (1 年次後期 2 単位, 必修), 幾何学 II (2 年次前期後期各 2 単位, 必修 2 単位), 位相幾何学 (3 年次前期 2 単位, 必修).
- ・解析学：微分積分学 I (1 年次前期後期各 2 単位, 必修 2 単位), 微分積分学 II (2 年次前期 2 単位, 必修), 関数論 (2 年次後期 2 単位, 必修).

すべてを必修にしても知識不足の感がある。(教員免許法変更による教科専門必要単位数の激減による影響は深刻である。しかも, 2009 年度から学部学生の殆んどが‘ゆとり教育’世代(「おゆとりさん」と呼ぶらしい)であり, この状態が何年か続く訳である。)従って, 持てる知識でかなりの教材研究が行われることは期待出来ない。教材研究をするために, 講義内容をさらに広く深く学びながら進めて行くという方法を採用する必要がある。

学生の授業を見ながらの感想文の雰囲気 ———

図形の合同を直行行列の観点から見て欲しい。教える側は座標幾何(高校まででも習った筈)の視点を持っているべきであり, そのことにより生徒が行う多様な方法を把握して指導することが出来るのですよ。そして, 相似はスカラー行列を附加して考えるのですよ。平行移動も忘れずにね。線型代数学で行列の話しはやったでしょ。遺っている操作は, 行列の計算ですよ。『だけどそんな風には習わなかったですけど,...』と言われれば確かにそうだけれど, では, 直行行列等の話しをするときには, 図形の合同・相似等の事柄をはっきりと講義内容に含めるようにしないといけない訳だ。そうして, 合同・相似に関する事柄を線型代数の知識を駆使して教材として準備することも, 座標系の変更に伴う座標成分の変化(図形は動かない)と座標系を固定して図形を動かすときの座標成分の変化との間に混乱を起こさないようにして下さい。単純ではない図形から注目する部分を抽出する場合, 全くそのままの形で抽出して, それから考えるという手順を踏みましょう。ちょっと先を読んで扱い易くするためか, 或いは意識せずにか, 考え等の一部を挿入してしまい, 元と異なる位置関係等にしてしまうのは好ましいことではありません。生徒にとってはかなりギャップを感じてしまう場合があるのです。全くそのまま写し取ることは, 結構頭を使う仕事です。美術の授業では, 椅子を逆さに置いて, それを写生させることがあると聞いたことがあります。とても難しいと思います。先ず何を考察の対象とするのかを明確にし, その部分をそのまま取り出し, 考える状況を整えましょう。それから考えましょう。その当たりを明瞭に行うことが出来る先生が‘教えるのが上手な’先生と思うのですが, 式の変形についても同様なことが言えます。式の変形は説明(証明)になっていないといけないのです。暗算が出来ることを見せようとしてもするかのように飛ばそうとするのは困りものです。これは好ましいことではありません。計算の過程を丁寧に示すことにより, どの法則が如何に使われているか等を教示する必要があります。何個かを並べるとき, 最初の二つを書いてあとを... と続けるワンパターンでは困ります。規則性に变化がある場合は, 変化する処をキチンと押えないといけませんよ。そういうことをしないで, 生徒に考えさせて答えさそうとするのは, 教育上好ましくありませんでしょ。自分が知っている以外の方法で生徒が解いたとき, 自分が持っているのと比べて判断することをしないで, 生徒の方法が正しいかどうかを判

定して下さい。生徒の方法が正しいかどうか判らず、自分が知っている方法で遣らせようとするのは困ったものだ。また、生徒の方法が正しいかどうか判らずオタオタするのは嘆かわしい。間違っている頭から否定するようなことはしないで下さい。生徒の考え方で解くためにはどうすれば良いかを考え、方法を変える必要があるときにはそのことの説明をしてあげましょう。答の表し方を統一するときには、その必要性を説明しましょう。でも、解き方まで統一することはしないようにね。蛮行になりますよ。闇雲に定理なんかを覚えさせたり、暗唱させたりするのは、どうかと思います。事例集やマニュアルを欲しがらなければいけません。それより、数学を勉強しましょう。

—— 以上、ネガティブなものばかりを羅列した。

(このプロジェクトの起因ということから。(それとも愚痴のオンパレードか。))

(注：僅かだが話にならない程酷いものもある。そして強調しておきたいが、「よく準備したな」・「生徒の考えを上手に引き出したな」・「ウーン、そういう手があったか」・「うまく収斂させたな」等々、ポジティブなものも、ネガティブなものより少なくはあるが、結構ある。)

さて、教材研究の指導についてだが。

まず、平面と空間におけるベクトルについてから取り掛かろう。これは、軽く確認する程度で良いと思うが、一般のベクトル空間の原型であることと、ベクトル空間論の具体例であることは認識して貰おう。次に、2次と3次の行列について、図形の合同・相似を扱う立場から詳しく復習させよう。(教科専門科目の単位数が減らされる前の時代には、一部を講義内容に含めていた。)平面または空間の合同変換とそれらがなす合同変換群の概念を身に付けさせよう。2次と3次の直交行列の定義と特徴付け、'標準形'に関する事柄の学習をする。これらに加え、図形の背景に座標と変換を見、一方、それらを隠して図形の操作をする訓練をする。但し、'完璧'を目指してはいけない。そういう感覚を養う練習の必要性を認識させることが第一と思うことである。

このようなことは、わざわざここに書く程のことではないと言われれば、全くその通りです。が、現状はこういうことを書かせてしまうようなものではないのかと云う事なのです。

一般的な話はこの位にして。

中学校で扱われる三角形の合同条件は、「三辺」・「二辺挟角」・「二角挟辺」の三つである。相似条件は、対応して「三辺」・「二辺挟角」・「二角」の三つである。通常、二つから始め幾つかの三角形を考察の対象として扱う。ここでは、三角形全部を合同あるいは相似によって分類し考察することに取組んで貰うことを試みる。

まず、三角形を合同関係・相似関係によって分類し、合同類(合同という同値関係による同値類)・相似類に分ける。学生にとっては、合同類・相似類、一般に同値関係とそれによる同値類、という考え方がかなり心理的に抵抗を感じる処であるらしい。従って、それに慣れさせることにも配慮しながら行う必要があると思われる。

(ここから文調が変化します。各々の文調から対象者を掴んで下さい。)

合同条件「三辺が等しい」の視点から考えましょう。

三辺の長さで三角形が決まるので、三辺の長さを a, b, c とすれば 正の実数の組 (a, b, c) と三角形の合同類が対応する。だけど、 $(3, 4, 5), (4, 5, 3), (5, 3, 4), (5, 4, 3), (4, 3, 5), (3, 5, 4)$ はどれも同じ三角形を決めるから、並べ方を考慮しないといけないよね。大きい順に並べることにして。 (a, b, c) with $a \geq b \geq c > 0$ を考えれば良いか。三角形になるには、二辺の長さの和が残りの辺の長さを超えないといけないから、さらに $b+c > a$ なる条件が必要だ。 $a \geq b \geq c > 0$ としているから、この条件だけで大丈夫だよ。従って、三角形の合同類と実数の組 (a, b, c) with $a \geq b \geq c > 0, b+c > a$ が一対一に対応することが判った。ヨシ出来た。そう、これで考察する準備が出来たね。集合 { 三角形の合同類 } と \mathbb{R}^3 の部分集合 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq y \geq z > 0, y+z > x\}$ との間の一対一対応が付けられた訳だ。合同類というのは、合同な三角形を集めたもの即ち集合である。その集合である合同類を集めて更に集合を作るのか。いやー ややこしいなあ。だけど、合同類と上のような実数の組を対応させたから、良く知っている 3次元空間の一部として見る事が出来るようになってるよ。では手始めに、 \mathbb{R}^3 において $T = \{(x, y, z) \mid x \geq y \geq z > 0, y+z > x\}$ はどのような姿をしているか調べてみましょう。特に工夫しなくても判る人は、どんな形か説明して下さい。そうでない人は、座標平面に平行な平面で切断して考えてみましょう。 xy -平面に平行な平面 $z=c$ で切ったとき、 T の断面がどうなっているか図を描きましょう。 c を 0 から大きくして行って T の形を想像しましょう。 xz -平面に平行な平面 $y=b$ で切ったとき、 T の断面がどうなっているか図を描きましょう。 b を 0 から大きくして行って T の形を想像しましょう。 yz -平面に平行な平面 $x=a$ で切ったとき、 T の断面がどうなっているか図を描きましょう。 a を 0 から大きくして行って T の形を想像しましょう。違う平面で切断することも試してみましようね。これで T の概形が判ってきたようだ。それでは次に、名前が付けられている三角形について、 T の中でどの部分になるかを見て行こう。正三角形は $x=y=z$ となるものだから、判り易い。二等辺三角形は、 $x=y > z$ か $x > y=z$ に $x=y=z$ もだ。各々の T の中でどの部分を見てみよう。先程作った切断平面でも見よう。平面によって様子が違うことを見ておこう。直角三角形はどうなるだろうか。三平方の定理が想起されないと困るよ。 $x \geq y \geq z > 0$ としてあるから、 $x^2 = y^2 + z^2$ を満たすものだ。この方程式で表わされる \mathbb{R}^3 における曲面はどんなものだったかを思い出そう。 T との共通部分が直角三角形の部分だ。切断平面でも見ておこう。他にはどんなものがあったかな。鋭角三角形や鈍角三角形はどうだろう。 x, y, z の満たす式(不等式)を求めて考えよう。‘形’で見て来たけれど、今度は面積が与えられた値になるものについて考えてみるというものもある。三辺の長さから面積を求める方法があったよね。 . . . 逆に、 T の中に与えた部分に対応する三角形はどのような形になるかも考えることをしてみましょうね。そして、 T 内の点を動かしたとき、対応する三角形がどういう風に変化して行くかを見てみましょうね。

さて今度は、‘大きさ’は気にしないことにして、‘形’が同じという考え、即ち相似、で見ることを遣ってみよう。大きさは無視するので対象は長さそのものではなく、三辺の

長さの‘比’に注目することになる訳だ。大学で数学を勉強するのだから3個以上の比を使いましょう。射影幾何における斉次座標の考えです。小中高の算数・数学では三連比は考えないが、先生は知っておくべきです。むしろ三角形の相似は三連比で認識するのが妥当ではないでしょうか。三連比から対応する二辺の比を取り出していることを把握しておけば、生徒の色々な表し方を統一をもって見ることが出来るし、三辺をまとめて書こうとする生徒が居るかも知れず、そのときの対応の仕方も身に付けることが可能ですよ。 $(a, b, c), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ に対し、 $\exists t \in \mathbb{R} \text{ s.t. } ta = x, tb = y, tc = z$ のとき、 $(a, b, c) \sim (x, y, z)$ と定める。この \sim 関係は $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ における同値関係である。これによる同値類の集合を $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ と記し(\mathbb{R}^3 の原点を通る直線を要素とする集合とも思える)、 (x, y, z) を含む同値類(原点と (x, y, z) を通る直線が対応する)を $(x : y : z)$ で示す。(一般に $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ も同じやり方である。これで判って呉れないと困るなー。)三辺の長さが a, b, c ($a \geq b \geq c > 0, b + c > a$) である三角形に相似なものを集めた相似類に対応するのが $(a : b : c) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ だ。 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ を把握するためによく用いられるのが半球面だ。即ち、球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の対頂点を同一視し、その上の点 (a, b, c) とその点と原点を通る直線に対応する $(a : b : c)$ を同一視する訳である。文章で理解しようとすると面倒かも知れないが、空間 \mathbb{R}^3 で考えると楽だろう。で、今まで合同で考えてきた三角形についての事柄をその半球面上で考察しようという訳である。面積云々のところは考えられない。半球面として捉える方法だけではない。 $z = 1, y = 1, x = 1$ などの座標平面に平行な平面上で考察することも出来るし、 $x + y + z = 1$ のような平面上で考察することも可能な訳だ。色々と遣ってみて、各々の様相を確かめて欲しい。種々の方法で試してみることにより、考察対象によりどう捉えるのがより判り易いかなどの感覚を養って貰いたいのである。

ここでちょっと考え方(思想)に触れておきましょう。

三辺の長さが a, b, c ($a \geq b \geq c$) の三角形 D と x, y, z ($x \geq y \geq z$) の三角形 W について、 $'D \equiv W \iff a = x, b = y, c = z'$, $'D \infty W \iff a : x = b : y = c : z \iff a : b = x : y, b : c = y : z'$ ($a : b : c = x : y : z$ という表現は使用しない) というのが中学校における扱い方で、幾つかの三角形が与えられる毎にチェックすることになる。今行っていることは次の様に解釈するものである。三辺の長さが s, t, u ($s \geq t \geq u$) である三角形に対し、 $(s, t, u) \in \mathbb{R}^3, (s : t : u) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ を対応させる。対応する三角形が存在する部分が、前に述べた $T(\subset \mathbb{R}^3)$ であり、 T に対応する $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ の部分集合である。こういう設定をしておいたとき、 $'D \equiv W \iff (a, b, c) = (x, y, z)$ (i.e. $a = x, b = y, c = z$)', $'D \infty W \iff (a : b : c) = (x : y : z)$ (i.e. $\exists r \text{ s.t. } ra = x, rb = y, rc = z$)' が成立するという訳だ。(ベクトル空間に対し次元が定義される。そして、‘ベクトル空間が同型 \iff 次元が等しい’が成立する。こういうのを習ったでしょ。これと同じ或いは似たような感覚です。高等学校までの教科‘数学’のイメージから飛躍して欲しい。それによって、小中高の算数・数学をより本質的に理解することが出来るのです。)

ところで、三角形というと先ずどんなものを思い浮かべますか。上で考えた相似類の

考え方で見ると、正三角形は1点、二等辺三角形や直角三角形は線になっている。鋭角三角形や鈍角三角形に対応する部分は広がりを持っている。従って、こういう風に見ると、二等辺三角形や直角三角形は少数派ということになる。さらに正三角形は少数派の中でも少数派だ。線になる部分でも長さは違うようだし、広がりを持つ部分でもその割合は違うようだ。半球面で考えるかあるいはどの平面で考えるかによってその割合などは異なって現れる。さあー、どういう風に考えて行こうか。どの捉え方が妥当と思えるか。場合によって、'妥当'と思えるの基準は変わるか。．．． 話は延々と続く。先ずはどんなのでも良いから自分で考察対象を選んで色々と思案して欲しい。'答'があるのか、何を'答'とするのか等々、兎に角自分で考えよう。

さて、今までは「三辺」条件で考えて来た。今度は「二辺挟角」条件で考えてみよう。合同類と何が対応するか。二辺の長さとその間の角で決まるから、 (a, b, θ) , a, b は二辺の長さ、 θ は角の大きさ としよう。 $(2, \sqrt{3}, \pi/6)$, $(\sqrt{3}, 2, \pi/6)$, $(2, 1, \pi/3)$, $(1, 2, \pi/3)$, $(1, \sqrt{3}, \pi/2)$, $(\sqrt{3}, 1, \pi/2)$ は全て同じ(合同な)三角形だ。どういう方針で (a, b, θ) を定めるか。それを各自の遣り方で決めて、「三辺」条件で考えたのと同様なことを考察しよう。勿論相似についても。

また、「二角挟辺」合同条件・「二角」相似条件でも考えよう。

いやー、遣ることは一杯あるなー。

．．．．．

ここら辺りで、拙文を終わらせて頂きます。