数理解析研究所講究録
第 1658 巻 2009 年 265-273

ゲージ群のエネルギー表現の代数構造について

安藤 浩志

京都大学理学研究科 数理解析研究所

概要

本稿では無限次元 Lie 群の 1 種であるゲージ群 $C_c^\infty(M,G)$ の Boson Fock 空間上へのユニタリ表現を扱います。この表現は $C_c^\infty(M,G)$ を (S) 型と呼ばれる指数型ベクトルの形を保つユニタリ作用素で表現するもので、 Weyl CCR をその一部に含む特有の交換関係を満たします。 (S) 型作用素の交換関係を利用して、この表現には交換子が 'ほとんどない' ことを示します。 また、 Weyl ユニタリの生成する局所 von Neumann 環ネットとの違いを明らかにしたいと思います。 はじめに §1 で簡単に Boson Fock 空間上の (S) 型作用素の性質および群のユニタリ表現のコホモロジーについて述べます。§2 でゲージ群の表現を定義し、§3 で得られた結果を述べます。 最後に、 コサイクルの非有界性と (S) 型交換子の自明性に関する一般的な考察を述べます。

1 準備

1.1 Boson Fock 空間と (S) 型表現

Hilbert 空間 H から作られる Boson Fock 空間 $\Gamma(H)=\bigoplus_{n\geq 0}H^{\hat{\otimes}n}$ を考える. $\Gamma(H)$ において、指数ベクトル $\left\{\mathrm{Exp}\ (h)=\left(1,h,\frac{h^{\hat{\otimes}2}}{\sqrt{2!}},\cdots,\frac{h^{\hat{\otimes}n}}{\sqrt{n!}},\cdots\right)\in\Gamma(H);h\in H\right\}$ 達は 1 次独立であり、かつ $\Gamma(H)$ の total set (1 次結合全体が稠密部分空間をなす) となる。この指数ベクトル達の集合 $\{\lambda\mathrm{Exp}\ (h);\ \lambda\in\mathbb{C},\ h\in H\}$ を保つようなユニタリ作用素を (S) 型の作用素という。このような作用素達は 3 つのパラメータで完全に特徴付けられる。すなわち、$(A,b,c)\in\mathcal{U}(H)\times H\times S^1$ に対して ($\mathcal{U}(H)$ は H のユニタリ作用素全体)、

$$U_{A,b,c}\mathrm{Exp}\ x:=c\cdot e^{-\frac{1}{2}\|b\|^2-\langle Ax,b\rangle}\mathrm{Exp}\ (Ax+b),$$

によってユニタリ作用素 $U_{A,b,c}$ を定義すると、これは明らかに (S) 型であるが、実は次が成り立つ。

Theorem 1 (cf. [11]) 任意の (S) 型作用素 Ξ は $\Xi=U_{A,b,c}$ と唯一通りに書ける。さらに交換関係

$$U_{A,b,c}U_{A',b',c'}=\exp\left(i\mathrm{Im}\langle b,Ab'\rangle\right)U_{AA',b+Ab',cc'},$$

を考慮すると、(S) 型作用素全体は強位相によって位相群とみなすとき、$\mathcal{U}(H)\times H\times\mathbb{T}$ に積

$$(A,b,c)(A',b',c'):=(AA',b+Ab',cc'\exp\left(i\mathrm{Im}\langle b,Ab'\rangle\right)).$$

を入れたものに位相群として同型である。ただし $\mathcal{U}(H)$ には強位相を入れる。 □

(S) 型作用素の 1 次結合全体は $\mathbb{B}(\Gamma(H))$ で弱 (強) 稠密である [2]。したがって (S) 型作用素は豊富に存在する。

1.2 群のコホモロジー

位相群 $\mathcal{G}$ の Hilbert 空間 H 上へのユニタリ表現 V が与えられたとき、$\beta:\Gamma\to H$ が $\mathcal{G}$ の V に関する 1-コサイクルであるとは、

$$\beta(g_1g_2)=\beta(g_1)+V(g_1)\beta(g_2)\quad(g_1,g_2\in\mathcal{G})$$

を満たすことと定義する。これらはベクトル空間をなす。$c:\mathcal{G}\to\mathbb{T}$ を $c(g_1g_2)=c(g_1)c(g_2)\exp\left(i\mathrm{Im}\langle\beta(g_1),V(g_1)\beta(g_2)\rangle\right)$ を満たす写像とする。V,β,c が与えられると、荒木先生の方法 [14] によって $\Gamma(H)$ 上に (S) 型のユニタリ表現 $\mathrm{Exp}_{\beta,c}$ が次のように構成される: $\mathrm{Exp}_{\beta,c}V(g):=U_{V(g),\beta(g),c(g)}$、すなわち

$$\mathrm{Exp}_{\beta,c}V(g)\mathrm{Exp}\ x=c(g)\exp\left(-\frac{1}{2}||\beta(g)||^2-\langle V(g)x,\beta(g)\rangle\right)\mathrm{Exp}\ (V(g)x+\beta(g)).$$

特に V が $\mathcal{G}$ の実 Hilbert 空間 H_0 の直交表現として与えられているとき、これを複素化 $H=H_0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 上にユニタリに拡張することができ、この場合には $c(g)\equiv 1$ ととって表現 Exp_{β} を構成することができる。以下実際に考えるのは $\mathcal{G}=C_c^\infty(M,G)=\{\psi:M\overset{C^\infty}{\to}G;\mathrm{supp}(\psi)\ \text{is compact}\ \}$ の場合である。一方 $v\in H$ に対して、1-コバウンダリ $\partial v:\mathcal{G}\to H$ を $\partial v(g):=V(g)v-v.$ と定義する。$\partial v\in Z^1(\mathcal{G},V)$ である。1-コバウンダリ全体 $B^1(\mathcal{G},V)$ は $Z^1(\mathcal{G},V)$ の部分空間なので、その商空間が考えられる。$H^1(\mathcal{G},V)=Z^1(\mathcal{G},V)/B^1(\mathcal{G},V)$ を 1-コホモロジー群という。2 つの 1-コサイクル U_{V,β_i} $(i=1,2)$ から荒木構成によって得られた表現の同値類は、そのコホモロジー類のみによる。つまり、β_1 と β_2 が $\beta_2(g)=\beta_1(g)+V(g)v-v$ という関係を満たせば、

$$U_{I,-v,1}U_{V(g),\beta_1(g),1}=U_{V(g),\beta_2(g),1}U_{I,-v,1},$$

となり得られる表現はユニタリ同値である。ただし、コホモロジー類が異なっても表現が同値となる可能性はある。特にコバウンダリから得られる表現は可約である: $\beta=\partial v$ から作る表現 $\mathrm{Exp}_{V,\beta}$ は Exp_0V に同値で、これは例えば不変部分空間 $\mathbb{C}\mathrm{Exp}\ (0)$ を持つ。

2 ゲージ群 $C_c^\infty(M,G)$ の表現

以下、$\mathcal{G}=C_c^\infty(M,G)$ ととる。ただし M は Riemann 多様体でその体積測度を dv とし、G は連結コンパクト半単純 Lie 群、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$C_c^\infty(M,G)$ の群演算は、各点ごとの積とする。この群は (自明な) ファイバー束 $P\times_{\mathrm{Ad}}G,\ P=M\times G.$ の切断全体と同一視されるものである。この群に適当な位相を入れて核型 Lie 群 (単位元の近傍で、核型空間の 0 の近傍に同相となるようなものが存在) と考えることができる。$C_c^\infty(M,\mathfrak{g})$ はその Lie 環となる。$\mathfrak{g}$ には Killing 形式の反対符号で内積 $-B(\cdot,\cdot)$ を与え、空間 $C_c^\infty(M,\mathfrak{g})$ に内積を導入する:

$$\langle\omega_1,\omega_2\rangle:=\int_M\mathrm{tr}\left(\omega_1^*(x)\omega_2(x)\right)dv(x)$$

ただし、$\omega(x)^*$ を $\omega(x):T_x(M)\to\mathfrak{g}$ の随伴と考える。tr は $T_x(M)$ のトレースとする。この内積は $V(\psi)\omega(x):=(\mathrm{Ad}_{\psi(x)})_*(\omega(x)),\quad(x\in M,\omega\in\Omega_c^1(M,\mathfrak{g}),\psi\in C_c^\infty(M,G)).$ で与えられる直交表現 V に関して不変である。この内積による $C_c^\infty(M,\mathfrak{g})$ の完備化を H_0、その複素化を H とする。V は H のユニタリ表現に拡張される。次に表現 V に関する 1-コサイクルとして、Maurer-Cartan コサイクル

$$\beta(\psi)(x):=d\psi(x)\cdot\psi(x)^{-1}\left(=(R_{\psi(x)^{-1}})_{*\ \psi(x)}(d\psi_x(\cdot))\right):T_x(M)\to\mathfrak{g}$$

を定義する。これによって表現 $\Gamma(H)$ 上にユニタリ表現 $U(\psi)=U_{V(\psi),\beta(\psi)}$ が定義される。V のコサイクルの局所的性質として、次が成り立つ。

Proposition 2 [18]
$\gamma\in Z^1(C_c^\infty(M,G),V)$ とし、P_ψ^V を部分空間 $\{\omega\in H;\ V(\psi)\omega=\omega\}$ への直交射影とする。$\psi,\psi_1,\psi_2,\psi_3\in C_c^\infty(M,G)$ とすると、次が成り立つ。
(1) $\mathrm{supp}(\gamma(\psi))\subset\mathrm{supp}(\psi)$.
(2) 1-コサイクルの値は局所的に決まる：ψ_1とψ_2 が開集合 $U\subset M$ 上一致すれば、$\gamma(\psi_1)$ と$\gamma(\psi_2)$ も U 上一致する。
(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\gamma(\psi_1\psi_2^n\psi_3)=V(\psi_1)P_{\psi_2}^V\gamma(\psi_2)$. つまり左辺の極限は存在し、かつ ψ_3 によらない。

証明は Lie 環 $\mathfrak{g}$ の中心が半単純性によって $\{0\}$ であることに基づく。(3) が最も右側の変数 ψ_3 に依存しないのは表現のコサイクルが左加群構造を反映するためである。

2.1 Boson Fock 空間と $L^2(E',\mu)$ の同型

上述のように表現は Boson Fock 空間上に定義されるが、この表現はもう一つの同値な構成法が存在する。E を実核型 LF 空間とする。(LF: Fréchet 空間の帰納極限) E 上に正定値内積 Q が与えられると、Bochner-Minlos の定理 [5] によって、双対空間 E' 上に Gauss 測度 μ が、次を満たすように存在する。

$$\int_{E'} e^{i\langle\chi,F\rangle}d\mu(\chi) = \exp\left(-\frac{1}{2}Q(F,F)\right).$$

H_0 を E の Q に関する完備化、$H := H_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ をその複素化とする。このとき標準的な同型 θ : $\Gamma(H) \to L^2(E',\mu;\mathbb{C})$ が存在する：

$$\theta \mathrm{Exp}\ x = e^{\frac{1}{2}||x||^2 + i\langle\cdot,x\rangle}.$$

V が位相群 $\mathcal{G}$ の E 上への Q に関する強連続直交表現であるとき、それは H 上のユニタリ表現に拡張できる。さらに E' 上に双対作用を定義することができる：

$$\langle V(\gamma)\chi, F\rangle := \langle\chi, V(\gamma)^{-1}F\rangle, F\in E, \chi\in E'.$$

このようにして $\Gamma(H)$ 上の表現 Exp $_\beta$ を同型 θ と双対作用を通して $L^2(E',\mu)$ 上の表現にうつすことができる。具体的には

$$[\mathrm{Exp}\ _\beta V(\gamma)\Phi](\chi) = e^{i\langle\chi,b(\gamma)\rangle}\Phi(V(\gamma)^{-1}\chi).$$

となる。ゲージ群の表現 U に関しては約 40 年の研究の歴史があり、70 年代に Gelfand-Graev-Veršic [6] ($\mathcal{G} = SL(2,R), R=$ 関数環) と、Ismagilov [1] ($G = SU(2)$ の場合) によって初めて考察された。上に提示した形の Fock 空間上の定義は Gelfand-Graev-Veršic [3] に初めて現れ、その後この表現の既約性をめぐって多くの研究がなされた。現在までに得られている結果によると既約性は高次元 $\dim(M) \geq 3$ では常に成り立ち ([3, 4, 8, 10, 16])、$\dim(M) = 2$ ではルート系のサイズが十分大きい時に既約 [4, 8, 10]、$\dim(M) = 1$ では可約 [7] となっている。[*1] 2 次元の場合 (脚注のように、恐らく 1 次元も) 完全には解決されていない。

3 Local net $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{O})''$ の構造

(S) 型の交換子は交換関係

$$U_{A,b,c}U_{A',b',c'} = \exp\left(i\ \mathrm{Im}\langle b, Ab'\rangle\right)U_{AA',b+Ab',cc'},$$

を満たす。これは自由場の代数を生成する Weyl のユニタリ

$$W(h)W(k) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathrm{Im}\ \langle h,k\rangle\right)W(h+k)$$

と類似の交換関係であり、両者の代数構造の間にも類似点があると考えられる。この表現の生成する局所 von Neumann 環のネット $\mathcal{M}(\mathcal{O})'' := \mathrm{Lin}\{U(\psi); \mathrm{supp}(\psi)\subset\mathcal{O}\}''$ と自由場のネットを比較することとした。
Reeh-Schlieder の定理によると、局所観測量の net $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$(真空ベクトル Ω) がスペクトル条件と弱加法性と呼ばれる条件を満たすとき、任意の時空の開領域 $\mathcal{O}$ について $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ は Ω に対して巡回・分離的である。ここに Ω が $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ に対して巡回的とは $\mathcal{A}(\mathcal{O})\Omega$ が H で稠密である事、分離的とは $Q\in\mathcal{A}(\mathcal{O})$ に対して $Q\Omega = 0 \Leftrightarrow Q = 0$ が成り立つ事を言う。特に自由場がこのような性質を満たすことは [13] によって証明され、

[*1] [7] によれば、Albeverio 達は、この表現の真空ベクトル Exp (0) の巡回部分表限が III 型であることを示した。しかし真空の巡回性は示されておらず、この点は未解決のままのように思われる。一見すると真空の巡回性は $U(\psi)$Exp $(0) = e^{-\frac{1}{2}||\beta(\psi)||^2}$Exp $(\beta(\psi))$ なので β の totality から従うように見えるが、Exp $(\beta(\psi_1)+\beta(\psi_2))$ の形のベクトルが巡回部分空間内に存在することはこれだけでは言えない。従って β の totality 以上の考察が必要になると思われる。また論文 [16] では M がコンパクトの時に全次元での既約性を示した、とあるが、論文中で使われている $\beta(e^\varphi) = d\varphi,\ \varphi\in C_c^\infty(M,\mathfrak{g})$ は一般に φ が可換環に値をとらない限り正しくない。(長谷部高広君の指摘) しかし [16] で行われた White Noise Analysis の Fock 展開を用いる手法自体は重要と思われる。

後に [15] で、自由場の持つモジュラー構造とシンプレクティック構造の密接な関係が富田竹崎理論を通じて明らかにされた。*2しかしながら、ゲージ群のエネルギー表現から得られるネットは上述の性質をほとんど満たさない。
以下の定理が成り立つことを証明した。$U_{A,b} := U_{A,b,1}$、$\mathcal{A} = \mathrm{Lin}\{U_{A,b}; (A,b) \in \mathcal{U}(H) \times H\}$ とする。$\mathcal{O} \subset M$ を開集合とし、von Neumann 環のネット $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{O})''$ を考える。また同時に (S) 型作用素の生成する*-環

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}) := \mathrm{Lin}\{U_{A,b}; A|_{H(\mathcal{O}')} = \mathrm{Id}_{H(\mathcal{O}')},\ A_i H(\mathcal{O}) \subset H(\mathcal{O}),\ \mathrm{Int}(\mathrm{supp}(b) \cap \mathcal{O}') = \phi\}$$

も考える。このとき、次が成り立つ。

Theorem 3 [18]
(1) $\mathcal{M}(\mathcal{O})' \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{O}')$. 特に $\mathcal{M}' \cap \mathcal{A} = \mathbb{C}1$. $\mathcal{M} := \mathcal{M}(M)$.
(2) 局所環のネット $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{O})''$ は次の性質を満たす:

$$\begin{cases} \text{単調性}:\ \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{O}_1)'' \subset \mathcal{M}(\mathcal{O}_2)''. \\ \text{局所性}:\ \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2' \Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{O}_1)'' \subset \mathcal{M}(\mathcal{O}_2)'. \\ \text{加法性}:\ M = \bigcup_i \mathcal{O}_i \Rightarrow \mathcal{M}'' = \left(\bigcup_i \mathcal{M}(\mathcal{O}_i)\right)''. \end{cases}$$

しかし Fock 真空 $\Omega := \mathrm{Exp}\ (0)$ は、任意の局所環 $\mathcal{M}(\mathcal{O})''$ $(\mathcal{O} \neq \phi, M)$ に対して巡回的でない。さらに表現が既約ならば Ω は $\mathcal{M}(\mathcal{O})''$ に対して分離的でもない。□

(2) は容易で、(1) は議論が必要になる。

証明の概略
(1) (S) 型交換子 $\Xi \in \mathcal{M}(\mathcal{O})' \cap \mathcal{A}$ を $\Xi = \sum_{i=1}^N \lambda_i U_{A_i,b_i}$ と書く。(各 (A_i, b_i) は異なり、$\lambda_i \neq 0, \forall i$ とする。)
仮定から $U(\psi)\Xi U(\psi)^{-1} = \Xi$, $\mathrm{supp}(\psi) \subset \mathcal{O}$ なので、(S) 型交換関係を書き下すと、

$$\begin{aligned}
\sum_i \lambda_i U(\psi) U_{A_i,b_i} U(\psi)^{-1} &= \sum_i \lambda_i U_{V(\psi),\beta(\psi)} U_{A_i,b_i} U_{V(\psi)^{-1},-V(\psi)^{-1}\beta(\psi)} \\
&= \sum_i e^{i\mathrm{Im}\langle\beta(\psi),V(\psi)b_i\rangle} \lambda_i U_{V(\psi)A_i,\beta(\psi)+V(\psi)b_i} U_{V(\psi)^{-1},-V(\psi)^{-1}\beta(\psi)} \\
&= \sum_i e^{i\theta(\psi,A_i,b_i)} \lambda_i U_{V(\psi)A_iV(\psi)^{-1},\beta(\psi)+V(\psi)b_i-V(\psi)A_iV(\psi)^{-1}\beta(\psi)} \\
&= \sum_i \lambda_i U_{A_i,b_i},
\end{aligned}$$

ただし、$\theta(\psi, A_i, b_i) := \mathrm{Im}\{\langle\beta(\psi), V(\psi)b_i\rangle - \langle\beta(\psi) + V(\psi)b_i, V(\psi)A_iV(\psi)^{-1}\beta(\psi)\rangle\}$ とする。簡単な議論でこの位相因子は 0 であることがわかるので以降省略する。
まず (A_i, b_i) の近傍 W_i があって、$W_i \cap W_j = \phi (i \neq j)$ ととれる。 $\psi \mapsto U(\psi)$ の連続性から定数関数 $1 \in C_c^\infty(M, G)$ の近傍 N_0 があって、任意の $\psi \in N_0(\mathcal{O}) := \{\psi \in N_0; \mathrm{supp}(\psi) \subset \mathcal{O}\}$ に対して $(A_i^\psi, b_i^\psi) \in W_i$ が成り立つ。ここで

$$\begin{cases} A_i^\psi & := V(\psi)A_iV(\psi)^{-1}, \\ b_i^\psi & := \beta(\psi) + V(\psi)b_i - V(\psi)A_iV(\psi)^{-1}\beta(\psi) \end{cases}$$

とした。("点"を分離した) (S) 型作用素は一次独立であることが証明できるので、これから $\psi \in N_0(\mathcal{O})$ については $(A_i^\psi, b_i^\psi) = (A_i, b_i)$ が言える。よって、

$$V(\psi)A_iV(\psi)^{-1} = A_i, \tag{♭}$$

$$\beta(\psi) + V(\psi)b_i - V(\psi)A_iV(\psi)^{-1}\beta(\psi) = b_i. \tag{♮}$$

*2 モジュラー構造とシンプレクティック構造の対応については、例えば [20] で詳しく議論されている。

となるから (♭) を (♮) に代入すると、

$$\beta(\psi) + V(\psi)b_i - A_i\beta(\psi) = b_i. \tag{$\sharp$}$$

次に、任意に $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ をとり、$\varphi \in C_c^\infty(M, \mathfrak{h})$, $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathcal{O}$ を考える。$\psi := e^{s\varphi} (s \in \mathbb{R})$ は十分小さい $|s|$ に対して $\psi \in N_0(\mathcal{O})$ を満たす。$\mathfrak{h}$ が可換なので、$\beta(\psi) = sd\varphi$ となるから、($\sharp$) に代入すると

$$sd\varphi + V(e^{s\varphi})b_i - sA_i d\varphi = b_i \Leftrightarrow (A_i - I)d\varphi = \frac{V(e^{s\varphi}) - I}{s - 0} b_i.$$

$s \to 0$ として

$$(A_i - I)d\varphi = [\varphi, b_i] \ \forall\varphi \in C_c^\infty(M, \mathfrak{h}), \ \mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathcal{O}. \tag{$\spadesuit$}$$

となる。$\mathfrak{g}$ の任意の点はあるカルタン部分代数に含まれるので、等式の線形性から ($\spadesuit$) は **all** $\varphi \in C_c^\infty(M, \mathfrak{g})$, $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathcal{O}$ で正しい。
次に $\mathrm{Int}(\mathrm{supp}(b) \cap \mathcal{O}) = \phi$ を示す。$\mathfrak{g}$ の複素化をルート分解する:

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha.$$

交換関係 $V(\psi)A_i = A_i V(\psi)$ から、A_i はルート空間を保つことが示される。

$$\begin{cases} C_c^\infty(M, \mathfrak{h}) \xrightarrow{A_i} C_c^\infty(M, \mathfrak{h}), \\ C_c^\infty(M, \mathfrak{g}_\alpha) \xrightarrow{A_i} C_c^\infty(M, \mathfrak{g}_\alpha). \end{cases}$$

このことから、カルタン部分代数を取り替えて同じ議論を繰り返すことにより $\mathrm{Int}(\mathrm{supp}(b) \cap \mathcal{O}) = \phi$ がわかる。従って、

$$(A_i - I)d\varphi = [\varphi, b_i] = 0,$$

つまり $A_i d\varphi = d\varphi$ がわかるので、$\psi \in N_0(\mathcal{O})$, に対しては

$$A_i V(\psi)d\varphi = V(\psi)A_i d\varphi = V(\psi)d\varphi.$$

が成り立つ。Lie 環の半単純性より、$\{V(\psi)d\varphi;\ \psi \in MG,\ \varphi \in C_c^\infty(M, \mathfrak{g})\}$ の形のベクトルは H で total であることが証明できるので、

$$A_i V(\psi)d\varphi = V(\psi)d\varphi \ \ \underline{\textbf{for all}}\ \psi \text{ with } \mathrm{supp}(\psi) \subset \mathcal{O}. \tag{$\heartsuit$}$$

を示せば $A_i|_{H(\mathcal{O})} = \mathrm{Id}_{H(\mathcal{O})}$ が示される。上までの議論で ($\heartsuit$) は $\psi \in N_0(\mathcal{O})$ に対しては証明できている。N_0 の制限をはずすために、次の補題を利用する：$K := \mathrm{supp}(\psi)$ の開被覆 $\{V_k\}_{k=1}^N$ と関数族 $\{\psi_j^k\}_{0\le j\le n_k<\infty,\ 1\le k\le N} \subset N_0(\mathcal{O})$, $\{\varphi_k\}_{1\le k\le N} \subset C_c^\infty(M, \mathfrak{g})$, $\mathrm{supp}(\varphi_k) \subset V_k$ があって、

$$\begin{cases} \psi|_{V_k} &= \psi_{n_k}^k \psi_{n_k-1}^k \cdots \psi_0^k|_{V_k},\ \forall k, \\ d\varphi &= \displaystyle\sum_{k=1}^N d\varphi_k \text{ on } K. \end{cases}$$

を満たす。この関数たちによって、

$$\begin{aligned}A_iV(\psi)d\varphi &= \sum_{k=1}^{N} A_iV(\psi)d\varphi_k \\ &= \sum_{k=1}^{N} A_iV(\psi_l^k)\cdots V(\psi_0^k)d\varphi_k \\ &= \sum_{k=1}^{N} V(\psi_l^k)\cdots V(\psi_0^k)A_id\varphi_k \\ &= \sum_{k=1}^{N} V(\psi_l^k)\cdots V(\psi_0^k)d\varphi_k \\ &= V(\psi)d\varphi,\end{aligned}$$

となり、目標の $A_i|_{H(\mathcal{O})} = I_{H(\mathcal{O})}$. が示された。残りの性質も Lie 環の半単純性と関数の台の性質を議論することにより示される。 □

4 追記

上の定理では、(S) 型交換子の自明性をゲージ群特有の Lie 環的テクニックにより証明した。 その後、 (S) 型交換子が自明になるという現象はかなり一般的に成り立つことが判明した。 具体的には次のようになる:

Theorem 4 G を連結 Hausdorff 位相群、 $(1_G \not\subset)V$ を G の Hilbert 空間 H 上へのユニタリ表現、 $\beta \in Z^1(G,V)$ を非自明な実連続 1-コサイクルで、 $\beta(G)$ が H の total set であるようなものとする。 このとき、$\mathrm{Exp}_\beta(V)$ の (S) 型交換子は自明である。

証明は実コサイクルの非自明性とコサイクルの非有界性が同値であるという B. Johnson の定理 [21] に基づく。 このとき $U_\beta = \mathrm{Exp}_\beta(V)$ はほとんど交換子を持たないが、 U_β が因子的かどうかは判定できていない。因子である可能性は高いと予想される。

証明の概略
前半はゲージ群の場合の議論をなぞるが, 実は Lie 環的テクニックは不要なことがわかる。
(S) 型交換子 $C = \sum_i \lambda_i U_{A_i,b_i}$ が存在したとする。 $(A_i, b_i) \neq (A_j, b_j)$ $(i \neq j)$ 交換関係

$$U_{A,b}U_{A',b'} = e^{i\mathrm{Im}\langle b,Ab'\rangle}U_{AA',b+Ab'}$$

に注意して計算する。
$U(g)CU(g)^{-1} = C$ から、 ゲージ群の場合のようにして

$$\sum_i \lambda_i U_{V(g)^{-1}A_iV(g),-V(g)^{-1}\beta(g)+V(g)^{-1}b_i+V(g)^{-1}A_i\beta(g)} = \sum_i \lambda_i U_{A_i,b_i}.$$

が成り立つ。 よってコサイクルの連続性、Hausdorff 性と $\{U_{A,b}\}$ の 1 次独立性から、ある 1 の近傍 $N_0 \subset G$ に対しては

$$\begin{cases} V(g)^{-1}A_iV(g) = A_i \cdots (\heartsuit), \\ -V(g)^{-1}\beta(g) + V(g)^{-1}b_i + V(g)^{-1}A_i\beta(g) = b_i \cdots (\diamondsuit) \end{cases}$$

が成り立つ。 ところで $\forall g \in G$ は有限個の N_0 の元の積でかけるから、 $(\heartsuit)$ は全ての g について成り立つ。従って $A_i \in V(G)'$. このとき $(\diamondsuit)$ より

$$(A_i - I)V(g)^{-1}\beta(g) = (I - V(g^{-1}))b_i, \ g \in N_0$$

が成り立つ。 コサイクル条件より $\beta(g^{-1}) = -V(g)^{-1}\beta(g)$ だったので、 $N_0 = N_0^{-1}$ ととってよいことから、

$$(A_i - I)\beta(g) = (V(g) - I)b_i = \partial b_i(g), \ g \in N_0$$

が成り立つ。 $C_i := A_i - I$ は V の交換子であることに注意する。 すぐにわかるように次が成り立つ。

Lemma 5 V の交換子 C とその任意のコサイクル β, γ に対して、 ある 1 の近傍上 $C\beta(g) = \gamma(g)$, $g \in N_0$ が成り立てば同じ式が G 上成り立つ。

【証明】
$g \in G$ を $g = g_1 g_2 \cdots g_k$, $g_l \in N_0$ と書いてコサイクル条件と C が V と交換することを用いると明らか □
よって $C_i\beta(g) = \partial b_i(g)$, $g \in G$ が成り立つ。 次の補題により $C_i = 0$, $b_i = 0$ であるから題意は示された □

Lemma 6 $A \in V(G)'$ をユニタリ作用素、$C = A - I$ とするとき、$C\beta(g) = \partial b(g)$, $(\beta \notin B^1(G,V),\ b \in H)$ が成り立てば $C = 0 \Leftrightarrow A = I$、 従って $b = 0$ である。

【証明】
背理法で示す。 $C \neq 0$ とすると、 $\beta(G)$ の totality と β の連続性からある $g_0 \in G$ と $1 \in G$ の近傍 N が存在して $C\beta(hg_0) \neq 0$, $(h \in N)$ が成り立つ。 $C \in V(G)'$ より、 スペクトル定理から

$$C = \int_0^{2\pi} (e^{i\lambda} - 1) dE(\lambda).$$

と $V(G)'$ に属する PVM によってスペクトル分解される。 仮定よりある $\varepsilon > 0$ が存在して、$E[\varepsilon,\ 2\pi - \varepsilon]H = H_0 \neq \{0\}$ かつ $\beta(hg_0) \in H_0$ $(h \in N)$。
PVM が交換子に属すので、 H_0 は $V(G)$ 不変な閉部分空間であることに注意する。 任意の $g \in G$ は N の元の有限個の積でかけるので、ある $h_1, h_2, \cdots h_l \in N$ が存在して $g = h_1 h_2 \cdots h_l g_0$ とかける。 このときコサイクル条件を用いると

$$\begin{aligned}
\beta(g) &= \beta(h_1 h_2 \cdots h_l g_0) \\
&= \beta(h_1 g_0 (g_0^{-1} h_2 g_0)(g_0^{-1} h_3 g_0) \cdots (g_0^{-1} h_l g_0)) \\
&= \beta(h_1 g_0) + \pi(g_0^{-1} h_1 g_0)\beta((g_0^{-1} h_2 g_0) \cdots (g_0^{-1} h_l g_0))) \\
&= \beta(h_1 g_0) + \pi(g_0^{-1} h_1 g_0)\beta(g_0^{-1} h_2 g_0) + \pi(g_0^{-1} h_1 h_2 g_0)\beta((g_0^{-1} h_3 g_0) \cdots (g_0^{-1} h_l g_0)) \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

となり、$h \in N$ に対して

$$\begin{aligned}
\beta(g_0^{-1} h g_0) &= \beta(g_0^{-1}) + \pi(g_0^{-1})\beta(hg_0) \\
&= \pi(g_0^{-1})(\beta(hg_0) - \beta(g_0)) \in H_0
\end{aligned}$$

であることから、 $\beta(g) \in H_0$ がわかる。 Johnson の定理から β が非有界だったので、任意の $L > 0$ に対して、$||\beta(g)|| > L$ となる $g \in G$ が存在する。 しかしスペクトル表示を見ると

$$\begin{aligned}
||C\beta(g)||^2 &= \int_0^{2\pi} |e^{i\lambda} - 1|^2 d||E(\lambda)\beta(g)||^2 \\
&= \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} 2(1 - \cos\lambda) d||E(\lambda)\beta(g)||^2 \\
&\geq \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} 2(1 - \cos\varepsilon) d||E(\lambda)\beta(g)||^2 \\
&\geq \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} \varepsilon^2 d||E(\lambda)\beta(g)||^2 \\
&= \varepsilon^2 ||\beta(g)||^2
\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} L < ||\beta(g)|| &< \frac{1}{\varepsilon}||C\beta(g)|| \\ &= \frac{1}{\varepsilon}||(V(g) - I)b|| \\ &\leq \frac{2}{\varepsilon}||b|| \end{aligned}$$

となる。L は任意だったので、これは不合理。ゆえに $C = 0$ であるから、$V(g)b = b$, $\forall g \in G$ となり、$1_G \not\subset V$ だったので、$b = 0$ となる □

謝辞

小嶋泉先生には研究の初期段階から重要な示唆を頂き、また何度も議論していただきました。(特に関数の台を調べるという手法は先生から頂いたアドバイスによるものです。) 論文作成にあたっても、最後まで懇切丁寧に指導していただきました。ここに深くお礼申し上げます。また、セミナー時に一緒に議論していただいた長谷部高広君、原田僚さん、岡村和哉君、西郷隼人さんに感謝いたします。

References

[1] R.S.Ismagilov : On unitary representations of the group $C_0^\infty(X, G), G = SU_2$., Math. USSR Sb. 29 105-117On (1976)

[2] R.S.Ismagilov : Representations of Infinite-Dimensional Groups (Translations of Mathematical Monographs), American Mathematical Society (1996)

[3] I.M.Gelfand, M.I.Graev, A.M.Veršic: Representations of the group of smooth mappings of a manifold X into a compact Lie group. Compositio Mathematica,tome **35**, n°3(1977), p.299-334.

[4] I.M.Gelfand, M.I.Graev, A.M.Veršic: Representations of the group of functions taking values in a compact Lie group. Compositio Mathematica,tome **42**, n°2(1980), p.217-243.

[5] I.M.Gelfand,N.Ya.Vilenkin: Generalized Functions Vol 4: Applications of Harmonic Analysis., Academic Press (1964)

[6] A.M.Veršik, I.M.Gelfand, and M.I.Graev : Representations of the group SL(2, R), where R is a ring of functions. (Russian) Uspehi Mat. Nauk **28** (1973), no. 5(173), 83-128.

[7] S.Albeverio et al: Noncommutative Distributions-Unitary Representation of Gauge Groups and Algebras,Monographs and textbooks in pure and applied mathematics.,vol 175, Marcel-Dekker(1993)

[8] S.Albeverio, R.Høgh-Krohn, D.Testard: Irreducibility and Reducibility for the Energy Representations of the Group of Mappings of a Riemannian Manifold into a Compact Semisimple Lie Group. J.Funct.Anal. **41**. 378-396 (1981)

[9] S.Albeverio, R.Hoegh-Krohn, D.Testard and A. Veršic : Factorial representations of path groups. J.Funct.Anal. **51** (1983), no.1, 115-131.

[10] Nolan R. Wallach: On the irreducibility and inequivalence of unitary representations of gauge groups. Compositio Mathematica,tome **64** n°.1 (1987),p.3-29.

[11] A.Guichardet: Symmetric Hilbert spaces and Related Topics,Lecture Notes in Math.,vol **261**, Springer, Berlin (1972)

[12] R. Haag : Local Quantum Physics-Fields, Particles and Algebras., Springer(1992)

[13] H. Araki : A Lattice of Von Neumann Algebras Associated with the Quantum Theory of a Free Bose Field., J.Math.Phys.**4**, 1343 (1963)

[14] H. Araki : Factorizable representations of current algebra. -Non commutative extension of the Lévy-Kinchin formula and cohomology of a solvable group with values in a Hilbert Space -., Publ. RIMS, Kyoto Univ. Vol. 5 (1969), pp. 361-422

[15] J. P. Eckmann, K Osterwalder : An application of Tomita' s theory of modular Hilbert algebras: Duality for free Bose fields., J.Funct.Anal (1973)

[16] Y. Shimada : On irreducibility of the energy representation of the gauge group and the white noise distribution theory., Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics vol **8**, issue **2**, pp153-177 (2005)

[17] F. Figliolini, D.Guido : On the Type of Second Quantization Factors, Journal of Operator Theory, **31** (1994), 229-252.
[18] H. Ando : On the local structure of the representation of a local gauge group, preprint (arXiv:0904.2222v1)
[19] T. Hasebe : White Noise Analysis on manifolds and irreducibility of the energy representation of a gauge group, preprint (arXiv:0805.1329v1)
[20] J. E. Roberts, P. Leyland, D. Testard : Duality for Quantum free fields, unpublished paper.
[21] B. Bekka, P. de la Harpe and A. Valette : Kazhdan's Property (T), Cambridge(2008)