

# 量子エネルギーテレポーテーション

東北大学大学院理学研究科 堀田昌寛 (Masahiro Hotta)  
Graduate School of Science,  
Tohoku University

量子テレポーテーションは量子通信をはじめ量子情報処理において重要な基礎プロトコルになっている。空間的に離れた2者AとBが量子的にもつれた状態を共有している時、任意の量子状態を局所的操作及び古典通信 (local operations and classical communication 以下ではLOCCと略す) で転送することができる。しかしこれまでのプロトコルでは、励起状態を転送する場合に受信側は励起エネルギーと同じ量のエネルギーを用意し、局所的操作によって量子系に注入する必要があった。局所的エネルギー保存則が大きく働き、従来型のプロトコルはエネルギーを転送することはできない構造になっている。これに対して、最近新しいタイプのテレポーテーションプロトコル [1]-[3] が提案された。それは量子エネルギーテレポーテーション (quantum energy teleportation 以後 QET と略す) と呼ばれ、LOCCで実質的にエネルギー転送を行なうことができる。

ある量子多体系の基底状態におけるサイト  $n_A$  における量子揺らぎの局所的測定を考える。例外的な測定を除いて測定後の状態のエネルギーは正となる。測定時間が十分に短ければ、そのエネルギーはサイト  $n_A$  近傍の部分系のみ集中している。このサイト  $n_A$  近傍に局在しているエネルギーを、サイト  $n_A$  近傍の部分系に対する任意の局所的量子操作を用いて系から完全に抜き去ることができるかを考えてみる。解析をするとすべてのエネルギーを取り去ることは一般的にはできないことが示せる [2]。これは基底状態に施した局所的測定が、サイト  $n_A$  から離れたサイト  $n_B$  の部分系との間の量子もつれを壊してしまうことに起因する。測定後の励起状態からもとの基底状態に戻すには、この壊した量子もつれを修復しなければならない。しかし量子もつれは大局的操作でしか生成できないため、サイト  $n_A$  近傍の部分系に対する局所的操作だけでは、量子もつれを復元することができない。この局所的に使用不可能なエネルギーはサイト  $n_A$  のスピンとの量子もつれを壊された遠方のサイト  $n_B$  において一部使用できることが示せる。この具体的プロトコルがQETである。

以下では最近接相互作用をする2準位スピン鎖系を用いてQETを説明する。スピン鎖系のハミルトニアンはエネルギー密度演算子  $T_n$  のサイト和で以下のよう

$$H = \sum_n T_n.$$

ここで一般性を失わずに、最低エネルギー固有値が零になるように  $T_n$  を定数だけずらすことができる。従って基底状態  $|g\rangle$  に対して  $H|g\rangle = 0$ ,  $\langle g|T_n|g\rangle = 0$  ととることが可能である。次にスピン鎖系に現れる負エネルギー密度状態の存在をみておく。もし全ての  $T_n$  が互いに可換であれば、それらは同時対角化が可能となる。その時、基底状態は各  $T_n$  の最低固有値に対応する固有状態となり、 $T_n$  の固有値は負の値をとらない。しかし一般的なスピン鎖系では  $T_n$  は非可換となっており、またその基底状態は各量子ビットが複雑に絡んでいる状態となっている。このような場合には以下でみるように  $T_n$  には一般に負の固有値が存在する。まずある  $T_n$  に対してスペクトラル分解を施す。

$$T_n = \sum_{\nu, k_\nu} \epsilon_\nu |\epsilon_\nu, k_\nu\rangle \langle \epsilon_\nu, k_\nu|$$

またその基底ベクトルを用いて基底状態を以下のように分解する。

$$|g\rangle = \sum_{\nu, k_\nu} g_{\nu, k_\nu} |\epsilon_\nu, k_\nu\rangle.$$

ここで  $\langle g|T_n|g\rangle = 0$  から

$$\sum_{\nu, k_\nu} \epsilon_\nu |g_{\nu, k_\nu}|^2 = 0$$

という関係を得る。この結果は少なくとも  $T_n$  の最低固有値  $\epsilon_-$  が負であることを示している。

$$\epsilon_- = -|\epsilon_-| < 0.$$

従って、一般に

$$\langle \psi|T_n|\psi\rangle < 0$$

となるような量子状態が存在することがわかる。この負エネルギー密度をもつ量子状態の存在が Q E T において重要な働きをする。

始めに A と B は多数のスピン鎖基底状態  $|g\rangle$  を共有しているとしよう。Q E T プロトコルは以下の3つのステップで構成される。ここで  $H$  が生成する全体系の時間発展に比べて量子測定や古典通信に掛かる時間は十分に短く、Q E T の操作中には系の時間発展は無視できるとする。また Q E T におけるエネルギー送信者 A はサイト  $n_A$  におり、受信者 B は  $|n_A - n_B| \geq 5$  を満たす十分離れたサイト  $n_B$  にいるとする。

(I) 基底状態  $|g\rangle$  において、A はある方向のスピン成分  $\sigma_A = \vec{u}_A \cdot \vec{\sigma}_{n_A}$  を測定する。この測定値は  $s = \pm 1$  のどちらかの値をとる。

(II) A は測定結果  $s$  を古典通信で B に知らせる。

(III) B は測定結果  $s$  に応じた下記のユニタリ変換を自分のスピンに対して施す。

$$V_B(s) = I \cos \theta + i s \sigma_B \sin \theta, \quad (\sigma_B = \vec{u}_B \cdot \vec{\sigma}_{n_B}) \quad (1)$$

$\vec{u}_B$  は3次元実単位ベクトルであり、実角度変数  $\theta$  は B が最も多くのエネルギーを得られるように決定する。ここで  $\sigma_A$  のスペクトラル分解

$$\sigma_A = \sum_{s=\pm 1} s P_A(s) \quad (2)$$

を導入しておく。 $P_A(s)$  は固有値  $s$  に対する固有ベクトル空間への射影演算子である。(I) の後で、スピン鎖系のエネルギーの期待値は

$$E_A = \sum_{s=\pm 1} \langle g|P_A(s) H P_A(s)|g\rangle$$

と計算され、そのエネルギーは A 近傍に局在している。 $E_A$  は一般的には零にならず正の値をとる。前に議論したようにこの  $E_A$  自体は A の目の前にも拘らず、量子もつれ破壊のためにその一部は A にとって使用不可能なエネルギーである。(III) の直後では、各測定結果の現れる確率で平均された量子状態は、系の時間発展を無視して

$$\rho = \sum_{s=\pm 1} V_B(s) P_A(s) |g\rangle \langle g| P_A(s) V_B^\dagger(s) \quad (3)$$

という混合状態で書ける。最近接相互作用を考慮して B 周辺に局在するエネルギー演算子を  $H_B = T_{n_B-1} + T_{n_B} + T_{n_B+1}$  で定義すると、(III) の後の B 周辺のスピン鎖のエネルギー期待値は  $\text{Tr}[\rho H_B]$  で与えられる。(1)-(3) 式を使って、直接計算をすると

$$\text{Tr}[\rho H_B] = \frac{\xi}{2} (1 - \cos(2\theta)) + \frac{\eta}{2} \sin(2\theta) \quad (4)$$

という結果を得る。ここで  $\xi$  は  $\xi = \langle g | \sigma_B^\dagger H \sigma_B | g \rangle$  で与えられる非負の実数である。また  $\eta$  は A と B の (準) 局所的演算子による基底状態での 2 点相関関数  $\eta = \langle g | \sigma_A \dot{\sigma}_B | g \rangle$  で与えられる。ここで  $\dot{\sigma}_B$  は  $\dot{\sigma}_B = i[H_B, \sigma_B]$  で与えられる準局所的演算子である。 $\sigma_A$  と  $\dot{\sigma}_B$  というエルミート演算子は A の地点と B の地点が空間的に離れているために互いに可換である。このことから相関関数  $\eta$  の実数性も導かれる。また基底状態  $|g\rangle$  が A と B 近傍のスピンの中の量子もつれをもつとき、一般的には  $\eta$  が零ではないことが示せる。逆に  $|g\rangle$  が量子もつれを持たないときは常に  $\eta = 0$  となる。 $\eta \neq 0$  のときに  $\theta$  の値をうまくとると必ず  $\text{Tr}[\rho H_B]$  が負になる。最も小さくなる  $\theta$  は

$$\cos(2\theta) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad \sin(2\theta) = -\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

を満たす場合である。この結果を (4) 式に代入すると  $\eta \neq 0$  のとき

$$\text{Tr}[\rho H_B] = \frac{1}{2} \left[ \xi - \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \right] < 0 \quad (5)$$

という結果を得る。(III) の前に B 周辺のスピン鎖部分ではエネルギー密度が零だったにも拘らず、(III) の過程終了後に負のエネルギー密度を持っているということは、その差分の正のエネルギーが外部に放出されたことを意味する。具体的には (III) のユニタリ変換を施す装置にスピン鎖が正の仕事を行ったことになる。その正のエネルギー  $E_B = -\text{Tr}[\rho H_B]$  を B は回収して自由に使うことができる。

最後に A 近傍に残ったエネルギー  $E_A$  について述べておく。このプロトコルの最後のステップの後でも、A 近傍の量子ビットにステップ (I) で注入した  $E_A$  が残っている。A はこのエネルギーを局所的操作だけで系から引き出すことができるであろうか。もしこれが可能であれば、B が得たエネルギー  $E_B$  はなんの代償もなく得られることになってしまう。しかしこれはできないことが以下の議論からわかる。A がもし局所的操作で  $E_A$  全部を系から引き出せたならば、スピン鎖に残るエネルギーは  $-E_B$  だけとなる。これは負の値であるが、全エネルギーであるハミルトニアン  $H$  が非負であることから、これはあり得ない。この議論から少なくとも局所的操作だけで A が引き出せるエネルギーは  $E_A - E_B$  以上にはなり

得ないことがわかる。この引き出せないエネルギーの存在の物理的理由は、既に述べたように、Aの測定による量子もつれ破壊である。自分の近傍でエネルギー密度が零であるもとの状態をAが取り戻すには、壊した量子もつれを再生する必要がある。しかし一般的に量子もつれは局所的操作だけで再生されないため、どうしてもA近傍には残留エネルギーができてしまう。Q E Tでは、この取り出せない残留エネルギーの一部をスピン鎖から前借してBは得ていると解釈される。

## References

- [1] M. Hotta, J.P.S.J.78(2009)034001 .
- [2] M. Hotta, Phys.Lett.A372(2008)5671.
- [3] M. Hotta, Phys.Rev.D78(2008)045006.