数理解析研究所講究録
第 1659 巻 2009 年 216-222

How many Fourier coefficients determine a holomorphic modular form ?

京都大学大学院理学研究科　山名俊介 (Shunsuke Yamana)
Graduate school of mathematics, Kyoto University

1　序

本稿の目的は, 次の問題の新しい解答を報告することである.

“正則保型形式はどれだけのフーリエ係数により特定されるか?”

先ずは, これまでに知られてる結果を紹介する.

例えば, リーマン–ロッホの定理を用いれば, 次の事実が容易に分かる. 重さ k の一変数保型形式 $f\in M_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ のフーリエ展開を

$$f(\tau)=\sum_{t=0}^{\infty}a(t)e^{2\pi\sqrt{-1}t\tau}$$

とするとき, もしも, $a(0)=a(1)=\cdots=a([\frac{k}{12}])=0$ ならば, $f=0$ である. ここで, $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す. この結果は帰納法を用いて, 高次元に以下のように拡張される (証明は例えば, [4] の 3 章 2 節を参照): 具体的に計算可能な定数 c_n が存在して, 重さ κ の任意のジーゲル保型形式

$$F(Z)=\sum_h A(h)e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(hZ)}\in M_\kappa(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$$

は, もしも $\mathrm{tr}(h)\leq c_n\kappa$ を満たす全ての h に対して $A(h)=0$ ならば, $F=0$ である. 特に, ジーゲル保型型式は有限個のフーリエ係数だけで決定されることが分かる. この結果は C. Poor と D. Yuen [7] により遥かに改良されている.

これらの結果は, 空間 $M_\kappa(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ の次元の (粗い) 見積もりなども与えるが, 具体的なフーリエ係数の集合それ自身は技術的なものであり, 理論的な興味は薄い. そこで次の問題を考えたい.

問題 1.1. Γ を $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ の合同部分群, $\chi:\Gamma\to\mathbb{C}^\times$ を Γ の指標とする. このとき, 次の性質を持つ n 次の対称行列の簡単かつ小さい集合 $S=S_{\Gamma,\chi}$ を見つけよ: 任意の自然数 κ に対して, 重さ κ の任意のジーゲル保型形式

$$F(Z)=\sum_h A(h)e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(hZ)}\in M_\kappa(\Gamma,\chi)$$

は, 全ての $h\in S$ に対して $A(h)=0$ ならば, $F=0$ である.

注意 1.2. (1) S は無限集合である.

(2) 例えば $\Gamma = \Gamma_0^n(N)$ のときには, 任意の $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ に対して,

$$A({}^tGhG) = \chi(\mathrm{diag}[G, {}^tG^{-1}])(\det G)^\kappa A(h)$$

が成り立つ. 従って, 以下の条件を S に課すことも合理的であろう: 任意の $h \in S$ と任意の $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ に対して, ${}^tGhG \in S$.

こうした問題が最近まで研究されなかった理由は, 一変数保型形式の場合に興味深い解答がなく, 高次の場合には特異保型形式のような多くのフーリエ係数が消えている保型形式が実在するためかと思う. しかし, 一変数保型形式がヘッケ同時固有形式である場合には, フーリエ係数がヘッケ理論と直接的に結び付いているため, 保型形式のフーリエ係数に関する豊富な情報が得られる. 例えば, 簡単なことだが, 一変数のヘッケ同時固有形式 f は $a(1)$ と全ての素数 p に対して $a(p)$ が定まれば, f は一意的に決定される. 高次の場合もヘッケ作用素の作用はフーリエ係数の関係式により具体的に表されるが, あまり簡単ではなく, 例えば重複度一定理のような結果は n が 2 以上のときは知られていない. それでも, ヘッケ作用素の尖点的な固有形式は, そうしたフーリエ係数とヘッケ固有値の関係式から, 幾分少ないフーリエ係数だけで定まることが想像される. 実際, 次の結果が $n = 2$ の場合は S. Breulmann と W. Kohnen [1] により, 一般の場合は桂田 [3] により証明された.

定理 1.3 (Breulmann–Kohnen, 桂田). n 次の半整数対称行列 $h = (h_{ij})$ に対して,

$$\epsilon(h) = \gcd\{h_{ii}, 2h_{jk} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j < k \leq n\}$$

とおく. 二つの $S_\kappa(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ の関数

$$F(Z) = \sum_h A(h) e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(hZ)}$$

と

$$G(Z) = \sum_h B(h) e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(hZ)}$$

がともにヘッケ同時固有関数であるとする. もしも, $\epsilon(h)$ が平方因子を持たない全ての h に対して, $A(h) = B(h)$ ならば, $F = G$ である.

注意 1.4. S. Breulmann と W. Kohnen [1] はケヒアー・マース級数, スピン L 関数や今井の逆定理を用いる解析的証明を与え, 桂田 [3] は代数的かつ初等的な証明を与えた.

ところが, 2 次のジーゲル保型形式の場合には, 1981 年の時点で遥かに強い結果が D. Zagier により証明されていた. 特に $\epsilon(h) = 1$ となる h を原始的と呼ぶことにすれば, 驚くべきことに $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$ に関する (尖点的とも同時固有形式とも限らない) 任意のジーゲル保型形式は原始的な h のフーリエ係数のみで決定される. すなわち, 次の定理が成り立つ.

定理 1.5 (Zagier). $F \in M_\kappa(\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z}))$ が次のフーリエ展開を持つとする.

$$F(Z) = \sum_h A(h) e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(hZ)}.$$

もしも, 全ての原始的な h に対して $A(h) = 0$ ならば, $F = 0$ である.

注意 1.6. 最近, B. Heim [2] も以下の結果を本質的に同じ方法で証明した. 自然数 m に対して, $\omega(m)$ により m の素因数の個数を表す. 偶数 κ に対して,

$$\Bbbk = \max\left\{ \dim_{\mathbb{C}} S_{\kappa+2\left[\frac{\kappa}{10}\right]-2}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})),\ \dim_{\mathbb{C}} S_{\kappa+2\left[\frac{\kappa}{10}\right]}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \right\}$$

とおき, さらに次の原始的な半整数行列の集合の部分集合を考える:

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a \text{ と } c \text{ は平方因子を持たず, 互いに素かつ } \omega(a),\ \omega(c) \leq \Bbbk \right\}$$

(T は注意 1.2 (2) の条件を満たさないことに注意する). このとき, $F \in S_\kappa(\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z}))$ が全ての $h \in T$ に対して $A(h) = 0$ を満たせば, $F = 0$ である.

定理 1.5 の簡単かつ非常に短い (僅かに 5 行である! [10, 387 頁] を参照) 証明は, 次の定理の証明中に隠れていたため, 長い間見逃されていたようである.

定理 1.7 (Zagier). $F \in M_\kappa(\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z}))$ が次のフーリエ展開を持つとする:

$$F(Z) = \sum_h A(h) e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(hZ)}.$$

このとき以下の条件は同値である.

(a) マース関係式が任意の $h(\neq 0)$ に対して成り立つ. すなわち,

$$A(h) = \sum_{d \mid \epsilon(h)} d^{\kappa-1} A(d^{-1}h).$$

(b) 任意の $A(h)$ は $\epsilon(h)$ と $\det h$ にしか依存しない.

(c) 任意の原始的な h に対して, $A(h)$ は $\det h$ にしか依存しない.

定理 1.5 は著者の論文 [9] により, 任意の次数 $n(\geq 2)$ の任意の $\Gamma_0(N)$ 型のレベルを持つ主要な (ジーゲル, エルミート, 四元数ユニタリ群や直交群上の) 正則保型形式に拡張された. 本稿では, 簡単のためにジーゲル保型形式の場合に限定して一般化を解説する. 主定理を約言すれば, $n \geq 2$, $\Gamma = \Gamma_0^n(N)$, χ が導手 $\mathfrak{f}_\chi$ のディリクレ指標により定義されるとき,

$$S = \{ h \mid \epsilon(h) \text{ は } N/\mathfrak{f}_\chi \text{を割り切る} \}$$

は問題 1.1 の条件を満たす集合である.

2 主定理

主定理を正確に述べるために, 少し記号を準備する. n 次のジーゲル上半空間を

$$\mathfrak{H}_n = \{Z \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z,\ \mathrm{Im}(Z) > 0\}$$

と定義する. n 次のジーゲルモジュラー群

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) = \left\{\gamma \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Z}) \,\middle|\, {}^t\gamma \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

は $\mathfrak{H}_n$ に

$$\gamma Z = (aZ+b)(cZ+d)^{-1}, \qquad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}), \qquad Z \in \mathfrak{H}_n$$

により不連続的に作用する. レベル N の合同部分群として, 以下では,

$$\Gamma_0^n(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \,\middle|\, c \equiv \mathbf{0}_n \pmod{N} \right\}$$

を扱う. χ を N を法とするディリクレ指標とすれば, $\chi(\gamma) = \chi(\det d)$ により $\Gamma_0^n(N)$ の指標が定まる. κ を任意の整数とする. n が 2 以上のとき, $\mathfrak{H}_n$ 上の正則関数 F は, 全ての $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0^n(N)$ に対して,

$$F(\gamma Z) = \chi(\gamma)\det(cZ+d)^{\kappa} F(Z)$$

を満たすとき, $\Gamma_0^n(N)$ と χ に関する重さ κ のジーゲル保型形式と呼ばれる. $n=1$ のときには尖点での正則性が必要である. これらの保型形式の空間を $M_\kappa(\Gamma_0^n(N),\chi)$ と書く. ケヒアー原理により, $F \in M_\kappa(\Gamma_0^n(N),\chi)$ は次のようなフーリエ展開を持つ:

$$F(Z) = \sum_h A(h) e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(hZ)}.$$

ここで, h は半正値な半整数対称行列全体を渡る. このとき, 主定理は以下の通り.

定理 2.1. χ の導手を $\mathfrak{f}_\chi$ として,

$$S = \{h \mid \epsilon(h) \text{ は } N/\mathfrak{f}_\chi \text{を割り切る}\}$$

とおく. n が 2 以上, κ が自然数のとき,

$$F(Z) = \sum_h A(h) e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(hZ)} \in M_\kappa(\Gamma_0^n(N),\chi)$$

が, 全ての $h \in S$ に対して $A(h) = 0$ を満たせば, $F = 0$ である.

同様の定理は重さ半整数の保型形式に対しても証明できる. 重さ半整数のジーゲル保型形式の定義を簡単に復習する. N を 4 の倍数, ℓ を半整数 (すなわち, $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$) とする. $\gamma \in \Gamma_0^n(N)$ に対して, 半整数の保型因子 $j(\gamma, Z)$ を

$$j(\gamma,Z) = \Theta(\gamma Z)/\Theta(Z), \qquad \Theta(Z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}^n} \mathbf{e}({}^t rZr), \qquad Z \in \mathfrak{H}_n$$

と定める. $\Gamma_0^n(N)$ と χ に関する重さ ℓ のジーゲル保型形式の空間を以下のように定義する

$$M_\ell(\Gamma_0^n(N),\chi) = \{F : \mathfrak{H}_n \to \mathbb{C} \text{ 正則} \mid \text{全ての}\gamma \in \Gamma_0^n(N) \text{ に対して}$$
$$F(\gamma Z) = \chi(\gamma) j(\gamma, Z)^{2\ell} F(Z) \text{ を満たし, かつ全ての尖点で正則 }\}.$$

さらに,

$$\mathfrak{F}_\chi = \gcd\{\mathfrak{f}_{\chi\psi} \mid \text{ディリクレ指標}\psi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C},\ \psi^2 = 1,\ \psi(-1) = \chi(-1)\}$$

とおく. このとき, 次の定理が証明できる.

定理 2.2. n を 2 以上, ℓ を半整数とし, 集合 S を

$$S = \{h \mid \epsilon(h) \text{ は } N/4 \text{ と } N/\mathfrak{F}_\chi \text{をともに割り切る }\}$$

と定義する. このとき,

$$F(Z) = \sum_h A(h) e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(hZ)} \in M_\ell(\Gamma_0^n(N),\chi)$$

が, 全ての $h \in S$ に対して $A(h) = 0$ を満たせば, $F = 0$ である.

参考のために, 重さ半整数の一変数保型形式の決定に関する W. Luo と D. Ramakrishnan の結果 [5] を挙げておく.

定理 2.3 (Luo–Ramakrishnan). 重さが半整数 ℓ の新形式

$$f(\tau) = \sum_{t=0}^{\infty} a(t) e^{2\pi\sqrt{-1}t\tau} \in S_\ell^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(N))$$

が, ヘッケ同時固有形式でもあるとする. このとき, f は

$$\{a(|D|)^2 \mid D \text{ は } (-1)^{\ell-1/2}D > 0 \text{ を満たす基本判別式 }\}$$

の情報のみで符号を除いて決定される.

3 主定理の証明

簡単のために $\Gamma_0(N) = \Gamma_0^1(N)$ とおく. 次の補題は古典的である (証明は [6, 定理 4.6.8] と [8, 定理 1] を参照).

補題 3.1. l を自然数, $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ とする. $f \in M_k(\Gamma_0(N),\chi)$ のフーリエ展開を

$$f(\tau) = \sum_{t=0}^{\infty} a(t) e^{2\pi\sqrt{-1}t\tau}$$

とする. さらに, 次の条件を仮定する: l と互いに素な全ての t に対して, $a(t) = 0$. このとき, 以下が成り立つ.

(1) $k \in \mathbb{Z}$ のとき, l と $N/\mathfrak{f}_\chi$ が互いに素であれば, $f = 0$.

(2) $k \notin \mathbb{Z}$ のとき, l と $(N/4, N/\mathfrak{F}_\chi)$ が互いに素であれば, $f = 0$.

注意 3.2. $k \notin \mathbb{Z}$ のとき, もし $\chi(-1) = -1$ ならば, $f = 0$ である.

補題 3.1 は容易に次の補題に拡張できる (詳しくは [9] を参照).

補題 3.3. l を自然数, $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ とする.

(1) $k \in \mathbb{Z}$ のとき, もしも l と t の最大公約数が $N/\mathfrak{f}_\chi$ を割り切る全ての t に対して, $a(t) = 0$ ならば, $f = 0$.

(2) $k \notin \mathbb{Z}$ のとき, もしも l と t の最大公約数が $N/4$ と $N/\mathfrak{F}_\chi$ をともに割り切る全ての t に対して, $a(t) = 0$ ならば, $f = 0$.

注意 3.4. 言い換えると, $n = 1$, $\Gamma = \Gamma_0(N)$, χ が導手 $\mathfrak{f}_\chi$ のディリクレ指標のとき, 任意の自然数 l に対して, 集合

$$S = \{t \in \mathbb{N} \mid t \text{ と } l \text{ の最大公約数が } N/\mathfrak{f}_\chi \text{を割り切る}\}$$

は問題 1.1 の条件を満たす.

これより定理 2.1 の証明を始める. F が定理 2.1 の仮定を満たし, かつ恒等的に 0 ではないと仮定して矛盾を導く. このとき, $n-1$ 次の対称行列 $T \neq 0$ を部分フーリエ展開の T での係数

$$F_T(\tau, w) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-1}} A\begin{pmatrix} T & \frac{r}{2} \\ \frac{{}^t r}{2} & t \end{pmatrix} e^{2\pi\sqrt{-1}(t\tau + {}^t r w)}$$

が恒等的に 0 でないように選ぶことができる. 次に

$$\lambda_\nu(\tau, w) = \frac{1}{\nu!} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-1}} (2\pi\sqrt{-1}\, {}^t r w)^\nu A\begin{pmatrix} T & \frac{r}{2} \\ \frac{{}^t r}{2} & t \end{pmatrix} e^{2\pi\sqrt{-1}t\tau}$$

とおくとき, F_T の $w = 0$ でのテイラー展開は

$$F_T(\tau, w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu(\tau, w)$$

と与えられる. この展開の最初に 0 でない項を $\lambda_{\nu_0}(\tau, w)$ とする. F_T は任意の $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ に対して, 変換式

$$F_T\left(\gamma\tau, \frac{w}{c\tau + d}\right) = \chi(d)(c\tau + d)^\kappa \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}c\, {}^t w T w}{c\tau + d}\right) F_T(\tau, w)$$

を満たすので, テイラー展開を代入すれば,

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \frac{\lambda_\nu(\gamma\tau, w)}{(c\tau + d)^\nu} = \chi(d)(c\tau + d)^\kappa \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}c\, {}^t w T w}{c\tau + d}\right)^j \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \lambda_\nu(\tau, w)$$

が得られる. さらに, 先頭項を比較すれば, 変換式

$$\lambda_{\nu_0}(\gamma\tau, w) = \chi(d)(c\tau + d)^{\kappa+\nu_0}\lambda_{\nu_0}(\tau, w)$$

を得る. 従って, $\lambda_{\nu_0}(\tau, w)$ は $M_{\kappa+\nu_0}(\Gamma_0(N), \chi)$ の元を係数とする w の ν_0 次斉次多項式である. 仮定より, それら各係数の t 番目のフーリエ係数は t と $\epsilon(T)$ の最大公約数が $N/\mathfrak{f}_\chi$ を割り切るときに消えるので, 補題 3.3 (1) より $\lambda_{\nu_0}(\tau, w) = 0$ であるが, これは ν_0 の取り方に反し, 矛盾である. 以上で証明は完了した. □

注意 3.5. 補題 3.3 の (2) を用いて上記の議論を適当に修正すれば, 定理 2.2 の証明も得られる.

References

[1] S. Breulmann and W. Kohnen, *Twisted Maass-Koecher series and spinor zeta functions*, Nagoya Math. J **155** (1999), 153–160.

[2] B. Heim, *Separators of Siegel modular forms of degree two*, Proc. Amer. Math. Soc, **136**, no. 12 (2008), 4167–4173.

[3] H. Katsurada, *On the coincidence of Hecke-eigenforms*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. **70** (2000), 77–83.

[4] A. Krieg, *Modular forms on half-spaces of quaternions*, Springer Lec. notes in Math. **1143** 1985.

[5] W. Luo and D. Ramakrishnan, *Determination of modular forms by twists of critical L-values*, Invent. Math. **130** (1997), 371–398.

[6] T. Miyake, *Modular Forms*, Springer, 1989.

[7] C. Poor and D. Yuen, *Linear dependence among Siegel modular forms*, Math. Ann. **318** (2000), 205–234.

[8] J. P. Serre and H. M. Stark, *Modular forms of weight* 1/2, Springer Lec. notes in Math. **627** (1977), 27–67.

[9] S. Yamana, *Determination of holomorphic modular forms by primitive Fourier coefficients*, to appear.

[10] D. Zagier, *Sur la conjecture de Saito-Kurokawa (d'prés H. Maass)*, Sém Deligne-Pisot-Poitou Paris 1979/1980, (éd. M.-J. Bertin), Progr. Math. **12**, Birkhauser, Boston (1981), 371–394.

Graduate school of mathematics, Kyoto University, Kitashirakawa, Kyoto, 606-8502, Japan
e-mail:yamana07@math.kyoto-u.ac.jp