数理解析研究所講究録
第1659巻 2009年 116-126

Functional independence and randomness of L-functions

名越弘文(Hirofumi Nagoshi), 成蹊大

1. はじめに

本稿では、Dirichlet級数たちのあるクラスに対して、値分布の観点から、ある独立性を与える。Dirichlet級数たちの独立性の研究は、下記に述べる1900年のHilbertの講演から始まったようであるが、今では様々な手法がある。本稿では、Voroninによって始まった値分布の観点からの手法を扱う。

L関数を別のL関数たちを用いて表わすという定理たちがある。基本的な例として、二次体/$\mathbb{Q}$のデデキント・ゼータ関数がリーマン・ゼータ関数とあるDirichlet L関数の積で書けるという結果がある。(よってこれは、後にTheorem 1で述べるような独立性が成り立たない例となっている。)一方で、標語的に言って『L関数たち(特に、$GL(n)/\mathbb{Q}$ $(n=1,2,\dots)$のcuspidalな保型表現に対するL関数たち)が、互いに独立・ランダムに振舞う』という感じの現象は、様々な定理に(implicitlyに)現れる。今では古典的な結果であるlarge sieve(のDirichlet L関数たちを使った証明)、また$SL(2,\mathbb{Z})$のスペクトル理論やそれから得られるlarge sieve型の不等式にはそのような雰囲気があろうし、最近ではランダム行列理論とL関数の族との関わりについての様々な研究結果が得られている(ただし、互いに独立という側面が存在する一方で、何らかの相関もあるという側面も存在する)。

2. 歴史 I

1900年にパリで開催された国際数学者会議で、Hilbertが有名な講演(23題の問題の講演)を行ったが、その中で、リーマン・ゼータ関数$\zeta(s)$について、algebraic-differential independence over $\mathbb{C}(s)$が成り立つ、すなわち、

$$P(s,\zeta(s),\zeta^{(1)}(s),\dots,\zeta^{(M)}(s))=0$$

がsについて恒等的に成り立つような$M+2$変数の多項式Pは零多項式以外にはない、ということを述べた。(ただし、Hilbertの興味は、独立性という観点よりも、$\zeta(s)$が代数的な微分方程式の解になりえるかどうか、すなわち、$\zeta(s)$がそのような意味で「超越的」かどうか、という観点からだったようである。)Hilbertの証明は、ガンマ関数が上記のようなalgebraic-differential independence over $\mathbb{C}(s)$というHölderの結果(1887年)と$\zeta(s)$の関数等式を使った証明であった。また、Hilbertはその講演で、ある一般化された問題を

提示したが、それはOstrowski [Os] によって（ヒルベルトによる先の証明とは別の証明方法により）さらにもっと一般的な形で証明された。

上記の独立性は、Dirichlet 級数 $D(s)$ を一つ取ってきて固定し、$D(s)$ とその derivatives たち $D^{(n)}(s)(n = 1, 2, \dots)$ に対する独立性であったが、おそらくもっと興味深いのは、複数個の Dirichlet 級数たち、特にL関数たちを取ってきて、それら（とそれらの derivatives）が独立であるかという問題であろう。このような問題に対する古典的な結果として、Artin [Ar] (see also [Ni]) による次の結果がある。有限次ガロア拡大 $K/\mathbb{Q}$ に対して、$\chi_1, \dots, \chi_r$ をガロア群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の irreducible characters とするとき、Artin は、Artin L 関数たち $L(s, \chi_1, K/\mathbb{Q}), \dots, L(s, \chi_r, K/\mathbb{Q})$ に対して multiplicative independence、すなわち、

$$L(s, \chi_1, K/\mathbb{Q})^{m_1} \cdots L(s, \chi_r, K/\mathbb{Q})^{m_r} = 1$$

が s について恒等的に成り立つ $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}$ は $m_1 = \cdots = m_r = 0$ 以外にはない、ということを示した。

3. 歴史 II

1973 年頃になって Voronin によって、Section 2 で述べた Hilbert の結果に対して $\zeta(s)$ の値分布の観点からの別証明が得られた。それに関することを以下に述べる。

実数 σ が $\sigma > 1$ であるとき、任意の実数 t に対して、

$$|\zeta(\sigma + it)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+it}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \tag{3.1}$$

となりまた和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}$ は収束するので、$\zeta(s)$ の $\mathrm{Re}\, s = \sigma$ 上の値全体 $\{\zeta(\sigma + it) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ は、半径 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}$ の円内または円上に収まり $\mathbb{C}$ で dense ではない。

しかし 1914 年に Bohr と Courant [BC] が、σ を $1/2 < \sigma \leq 1$ となる実数とするとき、$\zeta(s)$ の $\mathrm{Re}\, s = \sigma$ 上の値全体

$$\{\zeta(\sigma + it) \in \mathbb{C} \,|\, t \in \mathbb{R}\} \tag{3.2}$$

は $\mathbb{C}$ で dense である、ということを証明した。（ちなみに $\{\zeta(1/2 + it) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ が $\mathbb{C}$ で dense であるかどうかは今でも未解決である。）

その後 1972 年になって、Voronin [V1] が、Bohr のアイデアの他に関数解析的な事実を導入することなどにより、σ を $1/2 < \sigma \leq 1$ となる実数とし M を自然数とするとき、

$$\left\{\left(\zeta(\sigma + it), \zeta^{(1)}(\sigma + it), \dots, \zeta^{(M)}(\sigma + it)\right) \in \mathbb{C}^{M+1} \,|\, t \in \mathbb{R}\right\}$$

が $\mathbb{C}^{M+1}$ で dense である、ということを証明した。

この結果を使って、Voronin は $\zeta(s)$ とその derivatives に対するある独立性を示したが、それを述べるために次の定義を与える。

Definition 1. (*functional independence* の定義) $g_1(s), \ldots, g_r(s)$ が *functionally independent* であるとは、次のことが成り立つこととする: m を任意の自然数とする。もしも連続関数 $F_0, \ldots, F_m : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}$ が

$$\sum_{k=0}^{m} s^k F_k(g_1(s), \ldots, g_r(s)) = 0$$

を(ある領域で) s について恒等的に満たすならば、すべての $0 \leq k \leq m$ で F_k は恒等的に 0 である関数である。

Voronin [V2] [KV, p. 254] は、先の denseness result (特に σ として $\sigma = 1$ のときだけで十分であるが) から、任意の自然数 M に対して $\zeta(s), \zeta^{(1)}(s), \ldots, \zeta^{(M)}(s)$ が functionally independent であることを証明した。これは、Section 2 で述べた Hilbert の結果の別証明を与えているだけでなく、さらにもっと強い主張を与えている。その証明については、Section 7 も参照されたい。

Voronin による $\zeta(s)$ に対する上記の仕事の後、Dirichlet L 関数 (実は Section 4 に述べるようにもっと強く複数個で) [V3]、$SL(2, \mathbb{Z})$ の holomorphic Hecke eigen cusp form の L 関数 [LM1]、$SL(2, \mathbb{Z})$ の Maass form の L 関数 (Ramanujan 予想を仮定せずに) [N1]、ある一般のクラスに属する Dirichlet 級数 [St] [NS] などに対して、類似の denseness の結果が得られ、よって、それら各級数とその derivatives に対する functional independence が得られている。それらについては [St] を参照されたい。Section 2 で述べた Artin の結果は、実際にはもっと強く functional independence まで言える。

4. 歴史 III

前 section では、一つの L 関数を固定してそれとその derivatives に対する functional independence を述べたが、以下に述べるように、Voronin [V3] は、複数個の Dirichlet L 関数たちとそれらの derivatives に対して functional independence を示した。今、$\chi_1, \ldots, \chi_r$ を mod q の異なる Dirichlet 指標たちとし、$L(s, \chi_j)$ を χ_j に対する Dirichlet L 関数とする。σ を $1/2 < \sigma < 1$ となる実数とする。そのとき、まず、Voronin [V3] [KV, p. 270] は、集合

$$\Big\{ \Big(L(\sigma + it, \chi_1), \ldots, L(\sigma + it, \chi_r), L^{(1)}(\sigma + it, \chi_1), \ldots, L^{(1)}(\sigma + it, \chi_r), \\ \ldots\ldots, L^{(M)}(\sigma + it, \chi_1), \ldots, L^{(M)}(\sigma + it, \chi_r) \Big) \in \mathbb{C}^{r(M+1)} \Big| \ t \in \mathbb{R} \Big\}$$

が $\mathbb{C}^{r(M+1)}$ で dense であることを証明した。(この結果は、同時期に独立に Bagchi [Ba] と Gonek によっても得られた。) そして、Voronin [V3] [KV, p. 271] は、$\zeta(s)$ の場合と同様の議論によりこの denseness result から、$L(s, \chi_j)$ たちとそれらの derivatives に対する functional independence を得た。

その denseness result の証明であるが、Dirichlet 指標 χ_j たちの持つ次の二つの性質が重要となる：周期性

$$\chi_j(p) = \chi_j(a) \qquad \text{if } p \equiv a \bmod q, \tag{4.1}$$

と直交性

$$\sum_{1 \le n \le q, (n,q)=1} \chi_j(n)\overline{\chi_l}(n) = \begin{cases} \#\{1 \le n \le q \mid (n,q)=1\} & \text{if } \chi_j = \chi_l, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.2}$$

その後、例えば、$SL(2,\mathbb{Z})$ の holomorphic Hecke eigen cusp form f を一つ固定して Dirichlet 指標たち $\chi_1, \ldots, \chi_r$ で twist してできる L 関数たち $L(s, f, \chi_1), \ldots, L(s, f, \chi_j)$ について ([LM2]) や、χ_j たちで twist してできるもっと一般的な L 関数たち ([St, Chapter 12]) について同様な結果が得られた。ただし、それらの証明にも、χ_j たちが持つ上記の周期性 (4.1) と直交性 (4.2) が重要となる。

複数個の L 関数たちの functional independece に関してこれまで知られていた結果は、上記のようなタイプのみであり、よって、例えば、$SL(2,\mathbb{Z})$ の holomorphic Hecke eigen cusp forms $f_1, \ldots, f_r$ に対しては上記の周期性 (4.1) と直交性 (4.2) のような性質は期待できないので、L 関数たち $L(s, f_1), \ldots, L(s, f_r)$（とそれらの derivatives）に対する functional independence は知られていなかった。しかし今回、この functional independence やもっと一般の結果を、Selberg's orthogonality と呼ばれる直交性を使うことによって得ることができたので、それを次の section で与える。

5. 主結果

今回得られた主結果 (Theorem 1) とそれを得るための値分布に関する結果 (Theorem 2) を述べる。

記号 $\mathcal{L}$ で、次の二つの条件を満たす Dirichlet 級数たち

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

全体の集合を表すとする：

(I) (Euler product) $\mathrm{Re}\, s$ が十分大きいときに、

$$L(s) = \prod_p \prod_{r=1}^{d_L} \left(1 - \frac{\alpha_L(p,r)}{p^s}\right)^{-1} \tag{5.1}$$

となる自然数 d_L と複素数たち $\alpha_L(p,r)$ ($1 \le r \le d_L$, p は素数）が存在する。ここで、d_L と $\alpha_L(p,r)$ たちは $L(s)$ に寄る。

(II) (Ramanujan bound) 各 $\alpha_L(p,r)$ ($1 \le r \le d_L$, p は素数）が

$$|\alpha_L(p,r)| \le 1$$

を満たす。

$L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}$ が $\mathcal{L}$ の元であるとき、条件 (II) より $a(n)\ll n^{\varepsilon}$ となる (see [St, Lemma 2.2]) ので、$L(s)$ は $\mathrm{Re}\, s>1$ で絶対収束する。$\mathcal{L}$ について $\mathrm{Re}\, s\le 1$ への解析接続は仮定していないことを注意しておく。

そのとき、次の Theorem 1 が成り立つ。ちなみに、Theorem 1 は、集会で与えた定理を改良したものであり、集会で扱った Dirichlet 級数たちのクラスよりも広いクラスに対して functional independence を示している。

Theorem 1. *Let $L_1(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_1(n)n^{-s},\ldots,L_N(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_N(n)n^{-s}$ be distinct functions in the class $\mathcal{L}$ satisfying*

$$\sum_{p\le x}\frac{a_j(p)\overline{a_k(p)}}{p}=\begin{cases}\kappa_j\log\log x+o(\log\log x) & \text{if } j=k\\ o(\log\log x) & \text{if } j\ne k,\end{cases}\tag{5.2}$$

as $x\to\infty$, where each κ_j is some positive constant. Let M be any positive integer. Then $L_1(s),\ldots,L_N(s)$, $L_1^{(1)}(s),\ldots,L_N^{(1)}(s),\ldots\ldots,L_1^{(M)}(s),\ldots,L_N^{(M)}(s)$ are functionally independent.

式 (5.2) が、Selberg's orthogonality と呼ばれる直交性である (see [KP], [Se], [LWY])。Selberg's orthogonality の応用がいくつか知られているが、Theorem 1 に関連したものとして、ある unique factorization が成り立つことが知られている (see [St, Theorem 6.3])。

また、関連する論文として、[KMP] と [Ni] を挙げておく。

Theorem 1 より下記の corollary が成り立つ。$\mathcal{R}(GL(n),\mathbb{Q})$ で集合

$$\{\pi\mid\pi \text{ is an irreducible cuspidal automorphic representation with unitary central character for } GL(n) \text{ over } \mathbb{Q}\}$$

を表すとし、

$$\mathcal{R}(GL,\mathbb{Q}):=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}(GL(n),\mathbb{Q})$$

とする。$\pi\in\mathcal{R}(GL,\mathbb{Q})$ に対して、

$$L(s,\pi)=\prod_{p<\infty}\prod_{r=1}^{d}\left(1-\frac{\alpha_\pi(p,r)}{p^s}\right)^{-1}$$

を π の L 関数とする ([GJ], [RS])。π に対する Ramanujan 予想とは、各 $r=1,\ldots,d$ に対して、

$$|\alpha_\pi(p,r)|=1\quad (p \text{ が unramified のとき}),$$
$$|\alpha_\pi(p,r)|\le 1\quad (p \text{ が ramified のとき})$$

が成り立つという予想である。この予想が成り立つとき、$L(s,\pi)$ は $\mathcal{L}$ に属する。Rankin-Selberg L 関数を用いることにより、$\mathcal{R}(GL,\mathbb{Q})$ に対しては Selberg's orthogonality が成り立つことが知られている ([LWY], [IK, Theorem 5.13])。よって、Theorem 1 より、次が成り立つ。

Corollary 1. *Let $\pi_1, \ldots, \pi_N$ be non-equivalent automorphic representations in $\mathcal{R}(GL, \mathbb{Q})$. Assume that the Ramanujan conjecture holds for every π_j. Let $M \in \mathbb{N}$. Then $L(s, \pi_1), \ldots, L(s, \pi_N)$, $L^{(1)}(s, \pi_1), \ldots, L^{(1)}(s, \pi_N), \ldots\ldots, L^{(M)}(s, \pi_1), \ldots, L^{(M)}(s, \pi_N)$ are functionally independent.*

Theorem 1 は、下記の Theorem 2 という denseness result から得られる。$\zeta(s)$ に関して、(3.1) で述べたように $\sigma > 1$ のとき $\mathrm{Re}\, s = \sigma$ 上の値たちは有界となる。しかし、(3.2) で述べたように $\mathrm{Re}\, s = 1$ 上の値たちは $\mathbb{C}$ で dense となるから、絶対収束領域 $\mathrm{Re}\, s > 1$ 上の値たち $\{\zeta(\sigma + it) \mid \sigma > 1, t \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{C}$ で dense となることが分かる。また、このことは、[Ti, p. 300] にあるように、$\mathrm{Re}\, s = 1$ 上の denseness の事実を使わずに直接的に証明できる。これらのことに注目して、Theorem 2 では $\mathrm{Re}\, s > 1$ 上の値分布を扱う。そして実は Theorem 1 を導くにはそれで十分である。Theorem 2 の証明では、$\mathrm{Re}\, s \leq 1$ への解析接続などは必要はなく、$\mathcal{L}$ の条件は比較的緩い条件となった。ちなみに、集会で扱ったのは $\mathrm{Re}\, s = 1$ 上の値分布の結果であったが、そのためには、扱う Dirichlet 級数について $\mathcal{L}$ の条件よりもきつい条件が必要であった。

Theorem 2. *Let $L_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_1(n) n^{-s}, \ldots, L_N(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_N(n) n^{-s}$ be distinct functions in the class $\mathcal{L}$ satisfying*

$$\sum_{p \leq x} \frac{a_j(p)\overline{a_k(p)}}{p} = \begin{cases} \kappa_j \log\log x + o(\log\log x) & \textit{if } j = k \\ o(\log\log x) & \textit{if } j \neq k, \end{cases}$$

as $x \to \infty$, where each κ_j is some positive constant. Let M be a positive integer. Then for any numbers $z_{jm} \in \mathbb{C}$ $(1 \leq j \leq N, 1 \leq m \leq M)$ and any $\varepsilon > 0$, there exists a number $\sigma_0 > 1$ such that

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \mathit{meas}\Big\{ t \in [0, T] \;\Big|\; \Big| L_j^{(m)}(\sigma_0 + it) - z_{jm} \Big| < \varepsilon \quad \textit{for all } 1 \leq j \leq N, 1 \leq m \leq M \Big\} > 0,$$

where $\mathit{meas}\{\cdots\}$ denotes the Lebesgue measure of the set $\{\cdots\}$.

6. Theorem 2 の証明の概略

Theorem 2 の証明の詳細については [N2] を参照されたいが、Theorem 2 の証明では、下記の Lemma 2 が最も重要となり、この Lemma の証明で Selberg's orthogonality が使われる。Lemma 2 の証明のために、次の Lemma 1 を用いる。Lemma 1 は既に知られていたものであり関数解析の話 (separation theorem) を使って証明される。Lemma 1 と少し違う形のものが Voronin の論文 [V1] では使われている。

Lemma 1. *Let H be a complex Hilbert space with inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ and norm $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. Let $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence in H satisfying the following two conditions:*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty$,
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle u_n, u\rangle| = \infty$ *for any non-zero element $u \in H$.*

Let any $m \in \mathbb{N}$ be fixed. Then the set $\{\sum_{n=m}^{m'} c_n u_n \mid m' \geq m,\ c_n \in \mathbb{C}, |c_n| = 1$ for $m \leq n \leq m'\}$ is dense in H.

Lemma 2. *Let $L_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_1(n)n^{-s}, \ldots, L_N(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_N(n)n^{-s}$ be distinct functions in $\mathcal{L}$ satisfying*

$$\sum_{p\leq x} \frac{a_j(p)\overline{a_k(p)}}{p} = \begin{cases} \kappa_j \log\log x + o(\log\log x) & \text{if } j = k \\ o(\log\log x) & \text{if } j \neq k, \end{cases} \tag{6.1}$$

as $x \to \infty$, where each κ_j is some positive constant. Let M be a positive integer. For every prime p, we define $\boldsymbol{F}_p \in \mathbb{C}^{N(M+1)}$ by

$$\boldsymbol{F}_p := \Bigl(\frac{a_1(p)}{p}, \frac{(-\log p)a_1(p)}{p}, \ldots, \frac{(-\log p)^M a_1(p)}{p}, \ldots\ldots, \frac{a_N(p)}{p}, \frac{(-\log p)a_N(p)}{p}, \ldots, \frac{(-\log p)^M a_N(p)}{p}\Bigr).$$

Let y be a positive real number. Then the set

$$\left\{ \sum_{y\leq p\leq\nu} c_p \boldsymbol{F}_p \,\middle|\, \nu \geq y, c_p \in \mathbb{C}, |c_p| = 1 \text{ for every prime } p \text{ with } y \leq p \leq \nu \right\}$$

is dense in $\mathbb{C}^{N(M+1)}$.

＜Lemma 2の証明の概略＞　Lemma 1において、$H = \mathbb{C}^{N(M+1)}$, $u_n = \boldsymbol{F}_{p_n}$ (ここでp_nはn番目の素数) と取ったときに条件(i)、(ii)が言えれば、Lemma 1からLemma 2が従う。

そのように取ったとき、条件(i)は容易に分かる。以下、条件(ii)、すなわち、

$$\boldsymbol{w} = \Bigl(w(1,0), \ldots, w(1,M), \ldots\ldots, w(N,0), \ldots, w(N,M)\Bigr) \in \mathbb{C}^{N(M+1)}$$

を任意の零ベクトルでないベクトルとしたときに

$$\sum_{p\leq x} |\langle \boldsymbol{F}_p, \boldsymbol{w}\rangle| \to \infty \qquad (\text{as } x \to \infty) \tag{6.2}$$

が成り立つことを示す。

$\boldsymbol{w}$ は零ベクトルでないことに注意して、$M_0 := \max\{0 \leq m \leq M \,|\, w(j,m) \neq 0 \text{ for some } j\}$ とすると、

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{F}_p, \boldsymbol{w} \rangle &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=0}^{M} \frac{(-\log p)^m a_j(p)}{p} \overline{w(j,m)} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \frac{(-\log p)^{M_0} a_j(p)}{p} \overline{w(j,M_0)} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=0}^{M_0-1} \frac{(-\log p)^m a_j(p)}{p} \overline{w(j,m)}\end{aligned}$$

となる。これと $\mathcal{L}$ の条件 (II) などを使うと、任意の正の実数 ε に対して、ある素数 $p_0 = p_0(\varepsilon, L_1, \ldots, L_N, M, \boldsymbol{w})$ があって、$p > p_0$ となるすべての素数 p に対して、

$$|\langle \boldsymbol{F}_p, \boldsymbol{w} \rangle| \geq \frac{(\log p)^{M_0}}{p} \left(\left| \sum_{j=1}^{N} a_j(p) \overline{w(j,M_0)} \right| - \varepsilon \right) \tag{6.3}$$

が成り立つ。

各 $1 \leq j \leq N$ に対して $w_j := w(j, M_0)$ と書くとする。M_0 の定義より、ある j に対しては $w_j \neq 0$ になることに注意して、小さな正の実数 μ に対して $\mathcal{Q}_\mu = \mathcal{Q}(\mu, L_1, \ldots, L_N, w_1, \ldots, w_N)$ で $\left|\sum_{j=1}^N a_j(p)\overline{w_j}\right| > \mu$ を満たすすべての素数 p たち全体を表すとする。そのとき、Selberg's orthogonality (6.1) と $\mathcal{L}$ の条件 (II) を使って、和

$$\sum_{p \leq x} \frac{\left|\sum_{j=1}^N a_j(p)\overline{w_j}\right|^2}{p}$$

を

$$\begin{aligned}\sum_{p \leq x} \frac{\left|\sum_{j=1}^N a_j(p)\overline{w_j}\right|^2}{p} &= \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathcal{Q}_\mu}} \frac{\left|\sum_{j=1}^N a_j(p)\overline{w_j}\right|^2}{p} + \sum_{\substack{p \leq x \\ p \notin \mathcal{Q}_\mu}} \frac{\left|\sum_{j=1}^N a_j(p)\overline{w_j}\right|^2}{p} \\ &\leq \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathcal{Q}_\mu}} \frac{\left(\sum_{j=1}^N D\,|w_j|\right)^2}{p} + \sum_{\substack{p \leq x \\ p \notin \mathcal{Q}_\mu}} \frac{\mu^2}{p}\end{aligned}$$

(ここで、$D := \max\{d_{L_j} \,|\, 1 \leq j \leq N\}$, d_{L_j} は (5.1) にある自然数）と

$$\sum_{p \leq x} \frac{\left|\sum_{j=1}^N a_j(p)\overline{w_j}\right|^2}{p} = \sum_{p \leq x} \frac{\left(\sum_{j=1}^N a_j(p)\overline{w_j}\right)\left(\overline{\sum_{j=1}^N a_j(p)\overline{w_j}}\right)}{p}$$

$$= \sum_{p \le x} \frac{1}{p} \left(\sum_{j=1}^{N} |a_j(p)|^2 \, |w_j|^2 + \sum_{1 \le j \ne l \le N} a_j(p) \overline{w_j} \overline{a_l(p)} w_l \right)$$

の二通りで評価する。そうすることによって、μ と ε を十分小さく取る ($\mu > \varepsilon$ を満たして) と

$$\sum_{\substack{p \le x \\ p \in \mathcal{Q}_\mu}} \frac{1}{p} \gg \log\log x \qquad (\text{as } x \to \infty)$$

が成り立つことが分かる。

これと (6.3) より

$$\begin{aligned} \sum_{p \le x} |\langle \boldsymbol{F}_p, \boldsymbol{w} \rangle| \ge \sum_{\substack{p_0 < p \le x \\ p \in \mathcal{Q}_\mu}} |\langle \boldsymbol{F}_p, \boldsymbol{w} \rangle| \ &\ge \ (\mu - \varepsilon) \sum_{\substack{p_0 < p \le x \\ p \in \mathcal{Q}_\mu}} \frac{(\log p)^{M_0}}{p} \\ &> (\mu - \varepsilon) \sum_{\substack{p_0 < p \le x \\ p \in \mathcal{Q}_\mu}} \frac{1}{p} \quad \longrightarrow \infty \qquad (\text{as } x \to \infty) \end{aligned}$$

となり、(6.2) が示され、よって Lemma 2 が得られた。

7. THEOREM 2 から THEOREM 1 の導出

Voronin による $\zeta(s)$ の場合と同様な議論により、Theorem 2 を使って Theorem 1 は証明されるのだが、その証明を述べる。

Theorem 2 を得るには、「m を任意の自然数とするとき、もしも連続関数たち $F_0, \ldots, F_m : \mathbb{C}^{N(M+1)} \to \mathbb{C}$ が、ある F_j は恒等的に 0 でない関数ならば、

$$\text{(7.1)} \qquad \sum_{j=0}^{m} s^j F_j\big(L_1(s), \ldots, L_N(s), \ldots\ldots, L_1^{(M)}(s), \ldots, L_N^{(M)}(s)\big) \ne 0$$

となる s が存在する」ことを言えばよい。

今、$n := \max\{0 \le j \le m \mid F_j \not\equiv 0\}$ とする。そのとき、F_n は連続なので、

$$|F_n(\boldsymbol{w})| > c \qquad \text{for all } \boldsymbol{w} \in U.$$

となる定数 $c > 0$ と有界開集合 $U \subset \mathbb{C}^{N(M+1)}$ がある。

Theorem 2 によれば、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_j := \big(&L_1(\sigma_0 + it_j), \ldots, L_N(\sigma_0 + it_j), \\ &\ldots\ldots, L_1^{(M)}(\sigma_0 + it_j), \ldots, L_N^{(M)}(\sigma_0 + it_j)\big) \in U. \end{aligned}$$

となる $\sigma_0 > 1$ と数列 $\{t_j \mid j = 1, 2, \ldots\}$ ($\lim_{j\to\infty} t_j = \infty$ を満たす) が存在する。よって、$n \geq 1$ のとき、すべての連続関数 F_j は U 上有界であることに注意すると

$$\left|(\sigma_0 + it_j)^n F_n(\boldsymbol{w}_j) + (\sigma_0 + it_j)^{n-1} F_{n-1}(\boldsymbol{w}_j) + \cdots + F_0(\boldsymbol{w}_j)\right| \longrightarrow \infty$$

(as $j \to \infty$) が成り立つ。また、$n = 0$ のときは、$|F_0(\boldsymbol{w}_j)| > c$ である。以上より、n がいずれの場合にも、(7.1) が得られる。こうして Theorem 1 の証明が完了した。

References

[Ar] E. Artin, *Über eine neue Art von L-Reihen*, Hamb. Math. Abh. **3** (1923), 89–108.

[Ba] B. Bagchi, *A joint universality theorem for Dirichlet L-functions*, Math. Z. **181** (1982), 319–334.

[BC] H. Bohr, R. Courant, *Neue Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen auf die Riemannsche Zetafunktion*, J. Reine Angew. Math. **144** (1914), 249–274.

[GJ] R. Godement, H. Jacquet, *Zeta functions of simple algebras*, Lecture Notes in Mathematics, 260, Springer-Verlag, 1972.

[IK] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc., Colloquium Publications 53, 2004.

[KP] J. Kaczorowski, A. Perelli, *The Selberg class: a survey*, in "Number Theory in Progress", Proc. Conf. in Honor of A. Schinzel, ed. by K. Györy et al., pp. 953–992, de Gruyter 1999.

[KMP] J. Kaczorowski, G. Molteni, A. Perelli, *Linear independence of L-functions*, Forum Math. **18** (2006), 1–7.

[KV] A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann Zeta-Function*, Walter de Gruyter, 1992.

[LM1] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, *The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms*, Acta Arith. **98** (2001), 345–359.

[LM2] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, *The joint universality of twisted automorphic L-functions*, J. Math. Soc. Japan **56** (2004), 923–939.

[LWY] J. Liu, Y. Wang, Y. Ye, *A proof of Selberg's orthogonality for automorphic L-functions*, Manuscr. Math. **118** (2005), 135–149.

[Ni] F. Nicolae, *On Artin's L-functions. I*, J. reine angew. Math. **539** (2001), 179–184.

[N1] H. Nagoshi, *The universality of L-functions attached to Maass forms*, Adv. Stud. Pure Math., **49** (2007), 289–306.

[N2] H. Nagoshi, *Independence and orthogonality of L-functions*, in preparation.

[NS] H. Nagoshi, J. Steuding, *The universality of Dirichlet series in the Selberg class*, in preparation.

[Os] A. Ostrowski, *Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen*, Math. Zeitschr. **8** (1920), 241–298.

[RS] Z. Rudnick, P. Sarnak, *Zeros of principal L-functions and random matrix theory*, Duke Math. J. **81** (1996), 269–322.

[Se] A. Selberg, *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series*, Bombieri, E. (ed.) et al., Proceedings of the Amalfi conference on analytic number theory, 367-385 (1992).

[St] J. Steuding, *Value Distribution of L-functions*, Lecture Notes in Mathematics **1877**, Springer-Verlag, 2007.

[Ti] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Second Edition, Oxford University Press, 1986.

[V1] S. M. Voronin, *On the distribution of nonzero values of the Riemann zeta-function*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **128** (1972), 131–150; Proc. Steklov Inst. Math. **128** (1972), 153–175.

[V2] S. M. Voronin, *On differential independence of ζ-functions*, Sov. Math., Dokl. **14** (1973), 607–609.

[V3] S. M. Voronin, *The functional independence of Dirichlet L-functions*, Acta Arith. **27** (1975), 493–503. (Russian)