数理解析研究所講究録
第 1661 巻 2009 年 29-38

K-安定性, Chow norm および漸近的 Bergman 核

大阪大学大学院理学研究科 満渕俊樹

2009 年 5 月 25 日

1 Donaldson による K-安定性

K-安定性の概念はもともと Tian [9] によって定義されたものであるが, Donaldson は [3] に於いて Tian の K-安定性の概念を見直し, 以下のような非常に扱いやすい定義を与えた.

定義 1: 対 $(\mathcal{M},\mathcal{L})$ が, 偏極代数多様体 (M,L) の **test configuration** であるとは, complex variety 間の $\mathbb{C}^*$-同変な射影射 $\pi:\mathcal{M}\to\mathbb{A}^1$ とその上の直線束 $\mathcal{L}$ が存在して, 次の 2 条件を満たすものを言う.

1) ファイバーへの制限で $(\mathcal{M}_s,\mathcal{L}_s)\cong(M,L^\ell)$, $s\neq 0$.

2) $\mathcal{M}$ への $\mathbb{C}^*$-作用が, $\mathcal{L}$ への $\mathbb{C}^*$-作用にリフトする.

ただし $\mathbb{C}^*$ は $\mathbb{A}^1:=\{s\in\mathbb{C}\}$ へ複素数の積で作用し, 一方直線束への $\mathbb{C}^*$-作用は, 常にファイバーをファイバーに線形に写すものとする. また ℓ は test configuration $(\mathcal{M},\mathcal{L})$ の指数とよばれる. さて direct image sheaf を用いて $\mathbb{A}^1$ 上のベクトル束 E_m を

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(E_m):=\pi_*\mathcal{L}^m,\qquad m=1,2,\ldots,$$

によって定義する．このとき $\mathbb{C}^*$ はファイバー $(E_m)_0$ に作用するが，それから誘導される $\det(E_m)_0$ への $\mathbb{C}^*$-作用の重みを w_m とする．またファイバー $(E_m)_0$ の次元を N_m とおく．このとき，$m \gg 1$ に対して

$$
(1.1) \qquad \begin{cases} N_m &= a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_0, \\ w_m &= b_{n+1} m^{n+1} + b_n m^n + \cdots + b_0. \end{cases}
$$

をみたす有理数 a_i, b_j が m と独立にとれる．特に $a_n = \ell^n c_1(L)^n[M]/n!$ は正数であることに注意する．よって

$$
(1.2) \qquad \frac{w_m}{mN_m} = F_0 + F_1 m^{-1} + F_2 m^{-2} + \dots
$$

と書ける．ここで係数 $F_i = F_i(\mathcal{M}, \mathcal{L})$, $i = 0, 1, 2, \dots,$ は m とは独立にとれる有理数で $F_1 = F_1(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ は特に test configuration $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ の**二木不変量**とよばれる．以下 (M, L) を偏極代数多様体とする．

定義 2: (1) (M, L) が **K-半安定**であるとは，$F_1(\mathcal{M}, \mathcal{L}) \leq 0$ が (M, L) のすべての test configuration $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ に対して成り立つときにいう．

(2) K-半安定な (M, L) が **K-安定**であるとは，いかなる $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ に対しても，$F_1(\mathcal{M}, \mathcal{L}) = 0$ であることと $\mathbb{A}^1$ 上の complex variety $\mathcal{M}$ が trivial（つまり $\mathcal{M} \cong M \times \mathbb{A}^1$）であることが同値であるときにいう．

ただし (2) の triviality は作用は込めないとする．つまり $\mathcal{M}$ への $\mathbb{C}^*$-作用が，同型を通して M への trivial な作用を誘導するとは限らないとする．

Tian の導入した K-安定性は 1-パラメター群に沿っての K-enegy の漸近挙動で定義されるが，我々のアプローチでは K-enegy の代わりに Chow norm を用い，K-安定性のみならず上記の不変量 $F_i(\mathcal{M}, \mathcal{L})$, $i = 1, 2, \dots,$ も特徴付けた．一つには Chow norm の臨界点たる balanced 計量が漸近的 Bergman 核関数の定数性で特徴付けられ，かつそのような計量の存在が (M, L) の Chow 漸近弱安定性にも対応しているのでこうしたアプローチをとった．

2 Tian による K-安定性

第 1 章で考えた $\mathbb{A}^1$ 上のベクトル束 E_m に対して，$\mathbb{A}^1$ の原点および $z=1$ の上のファイバーを，それぞれ $(E_m)_0$，$(E_m)_1$ とする．このとき Quillen による Serre 予想解決の同変版として次が成り立つ (cf. [4]).

事実 1: ベクトル空間 $(E_m)_1$ のエルミート計量 H_1 に対し，正則ベクトル束 E_m の $\mathbb{C}^*$-同変な trivialization

$$E_m \;\cong\; \mathbb{A}^1 \times (E_m)_0 \tag{2.1}$$

が存在し，この同型で H_1 から誘導される $(E_m)_0$ のエルミート計量 H_0 は，$\mathbb{C}^*$ の極大コンパクト部分群 $(\cong S^1)$ の作用で不変となる．

1 の原始 N_m 乗根を ζ と書き $\Pi := \{\zeta^j\, \mathrm{id}_{(E_m)_0}; j=1,2,\ldots,N_m\}$ とする．$(E_m)_0$ への $\mathbb{C}^*$-作用の定める準同型 $\psi_m : \mathbb{C}^* \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}((E_m)_0)$ に対し

$$\psi_m^{\mathrm{SL}}(s) \;:=\; \frac{\psi_m(s)}{(\det \psi_m(s))^{1/N_m}} \in \mathrm{SL}((E_m)_0), \qquad s \in \mathbb{C}^*,$$

と行列式を正規化する．ただしこの $\psi_m^{\mathrm{SL}}(s)$ は Π の乗法を法として考える．$m \gg 1$ のとき $\mathbb{C}^*$-同変な trivialization (2.1) および小平埋め込みによって

$$\mathcal{M} \;\hookrightarrow\; \mathbb{P}^*(E_m) \;=\; \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^*((E_m)_0)$$

を得る．また $\mathcal{M}_s \subset \{s\} \times \mathbb{P}^*((E_m)_0) \cong \mathbb{P}^*((E_m)_0)$ によって $\mathcal{M}_s$ を複素射影空間 $\mathbb{P}^*((E_m)_0)$ の複素部分多様体とみなすと，

$$\mathcal{M}_s \;=\; \psi_m^{\mathrm{SL}}(s) \cdot \mathcal{M}_1, \qquad s \neq 0, \tag{2.2}$$

が成り立つ．また ω_{FS} を $\mathbb{P}^*((E_m)_0)$ の Fubini-Study 計量とする．複素射影空間 $\mathbb{P}^*((E_m)_0)$ 内の $\mathcal{M}_1\ (= M)$ 上でコホモロジー類 $\ell c_1(L)_{\mathbb{R}}$ に属する Kähler 計量全体を $\mathcal{K}$ とし，対応する K-energy を $\kappa : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ と書き

$$\nu(t) \;:=\; \kappa(\psi_m^{\mathrm{SL}}(s)^*(m^{-1}\omega_{\mathrm{FS}|\mathcal{M}_s})), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

とおく．ただし $s=e^t$ とし $\dot{\nu}(t) := (d/dt)\nu(t)$ とおく．Tian が実際に扱ったのは $L = K_M^{-1}$ のときであるが，**一般化された二木不変量** (cf. [9]) を

$$\tilde{F}_1(\mathcal{M}, \mathcal{L}) := \lim_{s \to -\infty} \dot{\nu}(s) \tag{2.4}$$

で定める．偏極代数多様体 (M, L) に対し，test configuration $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ をいかにとっても $\tilde{F}_1(\mathcal{M}, \mathcal{L}) \leq 0$ が成り立つとき，(M, L) を **Tian の意味で K-半安定**であるという．さらに，そうした K-半安定の (M, L) が **Tian の意味で K-安定** (cf. [9]) であるとは，いかなる $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ に対しても，$\tilde{F}_1(\mathcal{M}, \mathcal{L}) = 0$ であることと，$\mathbb{A}^1$ 上の complex variety $\mathcal{M}$ が（必ずしも作用はこめず）trivial であることが同値であるときにいう．

3 The Chow norm

M の複素次元を n とし，$\mathcal{M}_1 = M$ の $\mathbb{P}^*((E_m)_1)$ への小平埋め込みによる像の次数を d とする．(2.1) の $\mathbb{C}^*$-同変 trivialization によって

$$(E_m)_1 \;\cong\; (E_m)_0 \tag{3.1}$$

なる $\mathbb{C}^*$-同変な同型が得られることに注意する．また $(E_m)_0$ に，第2章の事実1で得られたのエルミート計量 H_0 を与える．ベクトル空間 $(E_m)_0$ のちょうど dm 回対称テンソルをとった積空間を $S^{dm}((E_m)_0)$ とし，これにさらに $n+1$ 回テンソル積をとってベクトル空間 $W_m = W_m((E_m)_0)$ を

$$W_m((E_m)_0) \;:=\; \{S^{dm}((E_m^*)_0)\}^{\otimes n+1}$$

で定義する．さらに W_m^* を W_m の双対空間とすると $G_m := \mathrm{SL}((E_m)_0))$ は W_m^* に自然に作用する．次に，同型 (3.1) および小平埋め込みにより M を射影空間 $\mathbb{P}^*((E_m)_0)$ の複素部分多様体とみなす：

$$M \;\subset\; \mathbb{P}^*((E_m)_1) \;=\; \mathbb{P}^*((E_m)_0). \tag{3.2}$$

この M に対し，W_m^* の元 $\hat{M} \neq 0$ が存在して，その射影化 $[\hat{M}] \in \mathbb{P}^*(W_m)$ が，ちょうど $\mathbb{P}^*((E_m)_0)$ 上の既約な代数的サイクル M の Chow point となるようにとれる．そこで W_m^* 上の Chow norm（Zhang [10] 参照）

$$W_m^* \ni w \longmapsto \gamma(w) := \|w\|_{\mathrm{CH}(H_0)} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{3.3}$$

を軌道 $G_m \cdot \hat{M}$ 上に制限した関数 $\gamma : G_m \cdot \hat{M} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を考える．このとき γ が臨界点をもつのは，軌道 $G_m \cdot \hat{M}$ が W_m^* の閉集合すなわち $(M, L^{\ell m})$ が Chow 弱安定であるときまたそのときに限る．しかも $g \in G_m$ とすると，$g \cdot \hat{M}$ が γ の臨界点であることと $g^*\omega_{\mathrm{FS}}$ が balanced 計量（すなわち対応する漸近的 m 次ベルグマン核関数が定数）であることの同値性に注意せよ．さらに $s = e^t$ とおいて，たとえば，

$$\nu_m(t) := \log \gamma(\psi_m^{\mathrm{SL}}(s) \cdot \hat{M}), \qquad s \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

とおくと凸関数になっていることが容易に確かめられるが，これは Tian の意味の K-安定性を定義する際に用いた関数 ν の代わりとなるもので，両者の違いは，ν の定義では K-energy の漸近挙動が本質的である一方，ν_m の定義では Chow norm の漸近挙動が本質的であるという点にある．

4 主定理

この章の目的は次の主定理を示すことにある（関連して [7] 参照）：

主定理： $\displaystyle\lim_{s \to -\infty} \dot{\nu}_m(s) = (n+1)! a_n (F_1 m^n + F_2 m^{n-1} + F_3 m^{n-2} + \dots).$

この定理によって Donaldson の K-安定性に Tian 流の energy-theoretic な解釈を与えることが可能になった．その結果，定スカラー曲率ケーラー計量をもつ偏極代数多様体 (M, L) が K-安定であることの見通しの良い証明が得られるが，その大まかな方針については次章で述べ，この章では主定理の証明だけにとどめる．

証明： 座標 $\tilde{s}$ を $\tilde{s}^{N_m} = s$ で導入し，不分岐有限被覆 $\mathbb{C}^* \ni \tilde{s} \mapsto s \in \mathbb{C}^*$ を考える．このとき代数群の準同型 $\tilde{\psi}_m : \mathbb{C}^* \to \mathrm{SL}((E_m)_0)$ を

$$\tilde{\psi}_m(\tilde{s}) \;:=\; \frac{\psi_m(s)}{\det \psi_m(\tilde{s})}, \qquad \tilde{s} \in \mathbb{C}^*, \tag{4.1}$$

で定めると $\tilde{\psi}_m(\tilde{s})$ と $\psi_m^{\mathrm{SL}}(s)$ は Π の積を法として一致する．この不分岐被覆を通して $\mathbb{C}^*$ が $(E_m)_0$ に作用する．この $\mathbb{C}^*$-作用で，$\mathbb{P}^*((E_m)_0)$ 上の代数的サイクル $\mathcal{M}_0$ は（重複度もこめて）保存されるので，対応する Chow point $[\hat{\mathcal{M}}_0] \in \mathbb{P}^*(W_m)$ は固定される．よって，ある整数 q_m が存在して

$$\tilde{\psi}_m(\tilde{s}) \cdot \hat{\mathcal{M}}_0 \;=\; \tilde{s}^{q_m} \hat{\mathcal{M}}_0. \tag{4.2}$$

ところで $\mathbb{C}^*$-作用は対角化可能なので，ある自然数 r について $\hat{M} \in W_m^*$ は $\Sigma_{j=1}^r w_j$ と書け，各 $0 \neq w_j \in W_m^*$ は

$$\tilde{\psi}_m(\tilde{s}) \cdot w_j \;=\; \tilde{s}^{\beta_j} w_j, \qquad \tilde{s} \in \mathbb{C}^*, \tag{4.3}$$

を満たす．ただし各 β_j は整数で $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_r$ と仮定できる．よって $\hat{\mathcal{M}}_0 = w_1$ とおけるので，$0 < \tilde{s} \ll 1$ なる各 $\tilde{s} \in \mathbb{R}$ に対し

$$\tilde{\psi}_m(\tilde{s}) \cdot \hat{M} \;=\; \tilde{s}^{\beta_1} \left(\hat{\mathcal{M}}_0 + O(|\hat{s}|)\right). \tag{4.4}$$

さて (4.3) 式で $j = 1$ とし $w_1 = \hat{\mathcal{M}}_0$ を代入したものを，(4.2) 式と比較することによって $\beta_1 = q_m$ が得られる．よって (4.4) より

$$\psi_m^{\mathrm{SL}}(s) \cdot \hat{M} \;=\; s^{q_m/N_m} \left(\hat{\mathcal{M}}_0 + O(|\hat{s}|)\right)$$

が Π の作用を法として成り立つ．よって $s = e^t$ に注意して (3.4) 式より

$$\nu_m(t) \;=\; \log \gamma(\psi_m^{\mathrm{SL}}(s) \cdot \hat{M}) \;=\; \log \gamma \left(e^{q_m t/N_m} \left(\hat{\mathcal{M}}_0 + O(|\hat{s}|)\right)\right)$$
$$= \frac{q_m}{N_m} t \;+\; \log \gamma \left(\hat{\mathcal{M}}_0 + O(e^{t/N_m})\right) \;=\; \frac{q_m}{N_m} t \;+\; \log \gamma(\hat{\mathcal{M}}_0) + O(e^{t/N_m}).$$

ここで両辺を t で微分し，$t \to -\infty$ とすることによって

(4.5) $$\lim_{t \to -\infty} \dot{\nu}_m(t) = \frac{q_m}{N_m}$$

を得る．次に $\tilde{\psi}_m$ を通して $\mathbb{C}^*$ の作用する graded algebra

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} (E_{km})_0$$

を考えると，$\det(E_{km})_0$ への $\mathbb{C}^*$-作用の重みを p_k とすると，$m \gg 1$ のとき Mumford [6] により

(4.6) $$p_k = -\frac{q_m}{(n+1)!} k^{n+1} + O(k^n).$$

さて $\tilde{\psi}_m(\tilde{s})$ と $\psi_m^{\mathrm{SL}}(s)$ が Π の積を法として一致するので，式 (4.1) により，与えられた $\tilde{s}$ に対し $\tilde{\psi}_m(\tilde{s})$ の作用は，$\psi_m(s)$ の作用および $(E_m)_0$ へのちょうど $(\det \psi_m(\tilde{s}))^{-1}$ 倍のスカラー積に分解する．$m \gg 1$ のとき自然な写像

(4.7) $$S^k((E_m)_0) \to (E_{km})_0$$

は全射なので，$\psi_m(\tilde{s})$ の作用は $(E_{km})_0$ への $\psi_{km}(\tilde{s})$ の作用を誘導するので，こちらの方からの重み p_k への寄与分は（$\tilde{s}$ を基準にすると）

(4.8) $$N_m w_{km}.$$

次に上に述べたスカラー積の重みへの寄与分を計算してみる．ところで $(\det \psi_m(\tilde{s}))^{-1} = \tilde{s}^{-w_m}$ によって，全射 (4.7) から，スカラー積はベクトル空間 $(E_{km})_0$ の $\tilde{s}^{-kw_m}$ 倍を誘導するが，$(E_{km})_0$ の次元は N_{km} なので，スカラー積から誘導される $\det(E_{km})_0$ への作用が重み p_k への寄与する分は

(4.9) $$-kw_m N_{km}.$$

ここで p_k は (4.8) および (4.9) の和となり，(1.2) を考え併せて

$$\begin{aligned} p_k = N_m w_{km} - k w_m N_{km} &= (km) N_m N_{km} \left\{ \frac{w_{km}}{(km)N_{km}} - \frac{w_m}{mN_m} \right\} \\ &= (km) N_m N_{km} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} F_i (km)^{-i} - \sum_{i=0}^{\infty} F_i m^{-i} \right\} \\ &= -kN_m N_{km} \{ O(1/k) + F_1 + F_2 m^{-1} + F_3 m^{-2} + \dots \} \end{aligned}$$

を得る．一方 (1.1) より $N_{km} = (km)^n \{a_n + O(1/k)\}$．これを上式に代入することにより次式を得る．

$$p_k = -k^{n+1} a_n N_m \{ O(1/k) + F_1 m^n + F_2 m^{n-1} + F_3 m^{n-2} + \dots \}$$

これと (4.5) 式を比較し，さらに (4.5) 式と考え併せて

$$\lim_{t \to -\infty} \dot{\nu}_m(t) = \frac{q_m}{N_m} = (n+1)! a_n (F_1 m^n + F_2 m^{n-1} + F_3 m^{n-2} + \dots).$$

5 Concluding Remarks

偏極代数多様体 (M, L) に対し，$\ell c_1(L)_{\mathbb{R}}$ に属するケーラー形式 ω を考え，L のエルミート計量 h で $\omega = \ell c_1(L; h)_{\mathbb{R}}$ となるものをとる．このとき，ベクトル空間 $(E_m)_1 = H^0(M, \mathcal{O}(L^{m\ell}))$ 上のエルミート計量 $H(h)$ を

$$H(h)(\sigma, \tau) := \int_M (\sigma, \tau)_h \, \omega^n \in \mathbb{C}, \qquad \sigma, \tau \in (E_m)_1,$$

で定義する．ここで $(\ ,\ )_h$ は，$L^{m\ell}$ の h による fiberwise なエルミート内積とする．$H(h)$ による $(E_m)_1$ の直交基底 $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N_m}\}$ をひとつ選び

$$B_m(\omega) := \frac{n!}{m^n} \sum_{i=1}^{N_m} (\sigma_i, \sigma_i)_h$$

とおき，これを第 m 漸近的 Bergman 核関数とよぶ．Zhang [10] により，この関数の定数性と $(M, L^{m\ell})$ の弱 Chow 安定性が同値であることが知られて

いる．さて $c_1(L)_{\mathbb{R}}$ が定スカラー曲率ケーラー計量をもつと仮定しよう．ここでは簡単のため，正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(M, L)$ が離散的な場合を考えよう．この場合には Donaldson [2] により $m \gg 1$ のとき $(M, L^{m\ell})$ が Chow 安定となるので $B(\omega_m)$ が定数となるような balanced 計量 ω_m が偏極類 $\ell c_1(L)_{\mathbb{R}}$ の中に存在する．一般に balanced 計量（を Fubini-Study 計量とみなせるような埋め込み方に対応する $g \cdot \hat{M}$）が Chow norm の臨界点となっているので，(3.4) で定義された関数 $\nu_m(t)$ が $t = 0$ で，

$$\dot{\nu}_m(0) \;=\; 0$$

を満たす．ところが関数 $\nu_m(t)$ は凸関数なので，

$$\lim_{t \to -\infty} \dot{\nu}_m(t) \;\leq\; 0$$

が成り立つが，第4章の主定理から $F_1 \leq 0$ を得る．これから (M, L) は K-半安定となる．この議論をもう少し精密にすると，さらに $F_1 < 0$ が示され，(M, L) の K-安定性も得られるのである．議論がかなり複雑になるが $\mathrm{Aut}(M, L)$ が離散的でない場合にも同様に K-安定性が得られる．([5] 参照．定スカラー曲率ケーラー計量存在の下での偏極代数多様体の K-安定性や K-半安定性の話題は [1],[4],[8] も参照．)

参考文献

[1] X. X. Chen & G. Tian, Geometry of Kähler metrics and foliations by holomorphic discs, Publ. Math. IHES, 107 (2008), 1–107.

[2] S.K. DONALDSON: Scalar curvature and projective embeddings, I, J. Differential Geom. 59 (2001), 479–522.

[3] S.K. DONALDSON: Scalar curvature and stability of toric varieties, J. Differential Geom. 62 (2002), 289–349.

[4] S.K. DONALDSON: Lower bounds on the Calabi functional, J. Differential Geom. 70 (2005), 453–472.

[5] T. Mabuchi: K-stability of constant scalar curvature polarization, arXiv: math.DG/0812.4093v2.

[6] D. Mumford Stabilities of projective varieties, L'Enseignment Math. 23 (1977), 39–110.

[7] D.H. Phong and J. Sturm: Lectures on stability and constant scalar curvature, arXiv: math.DG/0801.4179v2.

[8] J. Stoppa: K-stability of constant scalar curvature Kähler manifolds, arXiv: math.AG/0803.4095.

[9] G. Tian: Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature, Invent. Math. 130 (1997), 1–37.

[10] S. Zhang: Heights and reductions of semi-stable varieties, Compos. Math. 104 (1996), 77–105.