数理解析研究所講究録
第 1662 巻 2009 年 231-260

Mellin 変換と接続問題

岸岡 広幸・野海 正俊
神戸大学・大学院理学研究科

序

常微分方程式の解の接続問題は, 複素領域の微分方程式の理論の中心的な課題の一つであると思うが, アクセサリ・パラメータを持たない特別なクラスの微分方程式の場合を除くと, 一般の接続問題に関して, どの程度のまとまった理論的考察がなされているのかよく分からない. 本稿では, 表題に掲げた Mellin 変換を主題として, Mellin 変換が接続問題において果たしうる役割を考察しつつ, Mellin 変換を通じて見えてくる接続問題の一側面を論じたいと思う. ここで述べることは, いわゆる大久保・河野理論 [6], [11], [12] や横山利章氏の研究 [14, 15, 16] 等に実質的に含まれている主題ではあると思うが, Mellin 変換のそのもののもつ, 接続問題における普遍的な意味については, これまであまり強調されてこなかったように思う. 前半で, Mellin 変換と接続問題についての一般的な考え方を述べ, 後半では, 典型例として, Mellin 変換の観点から一般超幾何函数 ${}_nF_{n-1}$ の接続問題を眺め直すことにしたい. 特に,「一般超幾何函数の $z=1$ での値をパラメータの函数と見たもの」の果たす役割に注目してほしい.

目次

1 Mellin 変換と接続問題

1.1 Mellin 変換

本稿で考察する Mellin 変換は, 複素領域での Fourier-Laplace 変換 ([4], [8] 等) において, 座標函数の片方を指数函数に取替えたものと思う方が分かりやすい. そこでまず, Fourier-Laplace 変換の形で主張を定式化し, それを Mellin 変換の言葉に翻訳する.

$f(z)$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の「横」の帯状領域 $\mathbb{R}+i[\alpha,\beta]$ で定義された複素数値連続函数で, 内部で正則なものとし, $\mu<\nu$ なる実数の組 (μ,ν) に対して, 次の評価を持つとする: ある正定数 $C>0$ があって

$$|f(z)| \leq Ce^{\mu x_+ + \nu x_-} \qquad (z=x+iy \in \mathbb{R}+i[\alpha,\beta]). \tag{1.1}$$

ここで, $x_+=\max\{x,0\}$, $x_-=\min\{x,0\}$ と記した. この記法は正方向と負方向の 2 種類の評価

$$|f(z)| \leq Ce^{\mu x} \quad (x \geq 0; y \in [\alpha,\beta]); \quad |f(z)| \leq Ce^{\nu x} \quad (x \leq 0; y \in [\alpha,\beta]) \tag{1.2}$$

をまとめて表すための便法である. そこで, $\gamma \in [\alpha,\beta]$ を任意に選び, $f(z)$ の Fourier-Laplace 変換 $\widehat{f}(\zeta)$ を

$$\widehat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}+i\gamma} f(z)\, e^{-z\zeta} dz \qquad (\zeta \in (\mu,\nu)+i\mathbb{R}) \tag{1.3}$$

で定義する. $\zeta \in (\mu,\nu)+i\mathbb{R}$ のとき, この積分は $\gamma \in [\alpha,\beta]$ の取り方によらず, $\widehat{f}(\zeta)$ は ζ 平面の「縦」の帯状領域 $(\mu,\nu)+i\mathbb{R}$ 上の正則函数を定義する. このとき, 次の反転公式が成立する: $\kappa \in (\mu,\nu)$ を任意に選ぶとき,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa+i\mathbb{R}} \widehat{f}(\zeta)\, e^{z\zeta} d\zeta \qquad (z \in \mathbb{R}+i(\alpha,\beta)). \tag{1.4}$$

この Fourier-Laplace 変換は, 次のような函数空間で考えるのが合理的である. 今 $\alpha<\beta$, $\mu<\nu$ なる実数の組 (α,β), (μ,ν) に対して, 正則函数の空間 $\mathrm{Exp}(\mathbb{R}+i(\alpha,\beta);(\mu,\nu))$ を次の条件を満たす正則函数 $f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}+i(\alpha,\beta))$ の全体として定義する: 任意の閉区間 $[\alpha',\beta'] \subset (\alpha,\beta)$, $[\mu',\nu'] \subset (\mu,\nu)$ の組に対して, 正定数 $C>0$ があって

$$|f(z)| \leq Ce^{\mu' x_+ + \nu' x_-} \qquad (z=x+iy \in \mathbb{R}+i[\alpha',\beta']). \tag{1.5}$$

これと双対的に, 次の条件を満たす $\varphi(\zeta) \in \mathcal{O}((\mu,\nu)+i\mathbb{R})$ の全体を $\mathrm{Exp}((\mu,\nu)+i\mathbb{R};(\alpha,\beta))$ で表す: 任意の閉区間 $[\mu',\nu'] \subset (\mu,\nu)$, $[\alpha',\beta'] \subset (\alpha,\beta)$ の組に対して, 正定数 $C>0$ があって

$$|\varphi(\zeta)| \leq Ce^{\alpha'\eta_+ + \beta'\eta_-} \qquad (\zeta=\xi+i\eta \in [\mu',\nu']+i\mathbb{R}). \tag{1.6}$$

2 つの函数空間 $\mathrm{Exp}(\mathbb{R}+i(\alpha,\beta);(\mu,\nu))$, $\mathrm{Exp}((\mu,\nu)+i\mathbb{R};(\alpha,\beta))$ は, 自然に Fréchet-Schwartz 空間の構造を持つ.

$f(z) \in \mathrm{Exp}(\mathbb{R}+i(\alpha,\beta);(\mu,\nu))$ のとき, 任意に $\gamma \in (\alpha,\beta)$ を選ぶと

$$\mathcal{F}f(\zeta) = \int_{\mathbb{R}+i\gamma} f(z)\, e^{-z\zeta} dz \qquad (\zeta \in (\mu,\nu)+i\mathbb{R}) \tag{1.7}$$

は γ の取り方によらずに確定し, $\mathcal{F}f(\zeta)$ は $\mathrm{Exp}((\mu,\nu)+i\mathbb{R};(\alpha,\beta))$ に属す. 同様に, $\varphi(\zeta) \in \mathrm{Exp}((\mu,\nu)+i\mathbb{R};(\alpha,\beta))$ のとき, 任意に $\kappa \in (\mu,\nu)$ を選ぶと,

$$\mathcal{G}\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa+i\mathbb{R}} \varphi(\zeta)\, e^{z\zeta} d\zeta \qquad (z \in \mathbb{R}+i(\alpha,\beta)) \tag{1.8}$$

は κ の取り方によらずに確定し, $\mathcal{G}\varphi(z)$ は $\mathrm{Exp}(\mathbb{R}+i(\alpha,\beta);(\mu,\nu))$ に属す.

定理 1.1 上記の設定で, (1.7) で定義される Fourier-Laplace 変換は, 位相線型空間としての同型

$$\mathcal{F}:\ \mathrm{Exp}(\mathbb{R}+i(\alpha,\beta);(\mu,\nu)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}((\mu,\nu)+i\mathbb{R};(\alpha,\beta)) \tag{1.9}$$

を誘導し, (1.8) で定義される $\mathcal{G}$ がその逆変換を与える.

増大度の評価に関する部分は難しくないので, $\mathcal{G}$ が $\mathcal{F}$ の逆変換を与えることだけ確認しておく. 今 $f \in \mathrm{Exp}(\mathbb{R}+i(\alpha,\beta);(\mu,\nu))$ に対し, $g = \mathcal{G}\mathcal{F}f$ を考える. $w \in \mathbb{R}+i(\alpha,\beta)$ のとき, $g(w)$ の積分を

$$\begin{aligned} g(w) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa+i\mathbb{R}} d\zeta \int_{\mathbb{R}+i\gamma} f(z)e^{(w-z)\zeta}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa+i[0,\infty)} d\zeta \int_{\mathbb{R}+i\gamma} f(z)e^{(w-z)\zeta}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa+i(-\infty,0]} d\zeta \int_{\mathbb{R}+i\gamma} f(z)e^{(w-z)\zeta}dz \end{aligned} \tag{1.10}$$

と分解する. $\alpha < \alpha' < \mathrm{Im}(w) < \beta' < \beta$ なる $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ を任意に選び, 内側の積分路を移動して

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa+i[0,\infty)} d\zeta \int_{\mathbb{R}+i\alpha'} f(z)e^{(w-z)\zeta}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa+i(-\infty,0]} d\zeta \int_{\mathbb{R}+i\beta'} f(z)e^{(w-z)\zeta}dz \tag{1.11}$$

と書くと, それぞれの項で積分の順序を交換できる. 従って

$$\begin{aligned} g(w) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}+i\alpha'} \frac{f(z)e^{(w-z)\kappa}}{z-w}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}+i\beta'} \frac{f(z)e^{(w-z)\kappa}}{z-w}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\mathbb{R}+i\alpha'} - \int_{\mathbb{R}+i\beta'}\right) \frac{f(z)e^{(w-z)\kappa}}{z-w}dz \end{aligned} \tag{1.12}$$

となるが, Cauchy の積分公式によってこれは $f(w)$ に等しい.

$\beta - \alpha \leq 2\pi$ のときには, 函数空間 $\mathrm{Exp}(\mathbb{R}+i(\alpha,\beta);(\mu,\nu))$ を, 開角領域 $\exp(\mathbb{R}+i(\alpha,\beta))$ 上の函数空間に翻訳することができる.

今, $\alpha < \beta$ かつ $\beta - \alpha \leq 2\pi$ なる実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して, 角領域の記号

$$A(\alpha,\beta) = \mathbb{R}_{>0}\exp(i(\alpha,\beta)) = \{\ z \in \mathbb{C}^* \mid \alpha < \arg z < \beta\ \} \tag{1.13}$$

を用いる. $\mu < \nu$ に対して, 正則函数 $f(z) \in \mathcal{O}(A(\alpha,\beta))$ で次の条件を満たすもの全体を $\mathcal{O}(A(\alpha,\beta);(\mu,\nu))$ で表す: 任意の閉区間 $[\alpha',\beta'] \subset (\alpha,\beta)$, $[\mu',\nu'] \subset (\mu,\nu)$ の組に対して, 正数 $C>0$ があって, $z \in A[\alpha',\beta'] = \mathbb{R}_{>0}\exp(i[\alpha',\beta'])$ のとき

$$|f(z)| \leq C|z|^{\mu'} \quad (|z| \geq 1), \qquad |f(z)| \leq C|z|^{\nu'} \quad (|z| \leq 1). \tag{1.14}$$

このような $f(z)$ に対して, $\gamma \in (\alpha,\beta)$ のとき, 積分

$$\mathcal{M}f(\zeta) = \int_{\mathbb{R}_{>0}e^{i\gamma}} f(z) z^{-\zeta-1} dz \qquad (\zeta \in (\mu,\nu) + i\mathbb{R}) \tag{1.15}$$

は γ の取り方によらず確定し, $\mathcal{M}f$ は $\mathrm{Exp}((\mu,\nu)+i\mathbb{R};(\alpha,\beta))$ に属す. この Mellin 変換の逆変換は, 任意の $\kappa \in (\mu,\nu)$ に対して

$$\mathcal{N}\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa+i\mathbb{R}} \varphi(\zeta)\, z^{\zeta} d\zeta \qquad (z \in A(\alpha,\beta)) \tag{1.16}$$

で与えられる.

定理 1.2 $\beta - \alpha \leq 2\pi$ のとき, (1.15) で定義される Mellin 変換は, 位相線型空間としての同型

$$\mathcal{M}:\ \mathcal{O}(A(\alpha,\beta);(\mu,\nu)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}((\mu,\nu)+i\mathbb{R};(\alpha,\beta)) \tag{1.17}$$

を誘導し, (1.16) で定義される $\mathcal{N}$ がその逆変換を与える.

なお, 開角領域 $A(\alpha,\beta)$ 上の正則函数であって, 原点 $z=0$ の近傍に正則に延長できるものを扱う場合には, Mellin 変換を「正則化」して考えるのが有効である. (この稿ではあらわには用いないので, 「正則化」に関する部分は適宜読み飛ばして下さい.)

1.2 Mellin 変換の正則化

開角領域 $A(\alpha,\beta)$ 上の正則函数であって, 原点 $z=0$ の近傍に正則に延長できるものを扱う場合には, 以下のように Mellin 変換を正則化して考えるのが有効である. 前項に引き続き $\alpha<\beta$, $\beta-\alpha \leq 2\pi$ とする. 今 $r>0$ とし, 前方後円領域

$$\Omega(\alpha,\beta;r) = \{\ z \in \mathbb{C} \mid |z| < r \text{ または } \arg z \in (\alpha,\beta)\ \} \tag{1.1}$$

を考える. また, 負の実数 $\mu \in \mathbb{R}, \mu < 0$ に対して, 正則函数 $f(z) \in \mathcal{O}(\Omega(\alpha,\beta;r))$ であって次の条件を満たすもの全体を $\mathcal{O}(\Omega(\alpha,\beta;r);\mu)$ で表す: 任意の $[\alpha',\beta'] \subset (\alpha,\beta)$, 任意の正数 $r'<r$, 任意の $\mu'>\mu$ に対して, 正数 $C>0$ があって

$$|f(z)| \leq C|z|^{\mu'} \qquad (|z| \geq r', \arg z \in [\alpha',\beta']). \tag{1.2}$$

$f(z)\in\mathcal{O}(\Omega(\alpha,\beta);\mu)$ のとき, 上のような $[\alpha',\beta']$, $r'<r$ に対して, $\Omega(\alpha',\beta';r')$ の境界を正方向に向付けたものを $C(\alpha',\beta';r')=\partial\Omega(\alpha',\beta';r')$ で表し, 積分

$$\widetilde{f}(\zeta)=\widetilde{\mathcal{M}}f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(\alpha',\beta';r')}f(z)z^{-\zeta-1}dz \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta>\mu) \tag{1.3}$$

を考える. 但し, z の偏角は $\arg z=\beta'$ から入り, $\arg z=\alpha'+2\pi$ に出て行くものとする.

ζ が帯領域 $\mu<\mathrm{Re}\,\zeta<0$ にある場合には, 上記の積分で特に $\alpha'=\beta'=\gamma$ ととることにより

$$\widetilde{f}(\zeta)=-\frac{\sin\pi\zeta}{e^{\pi i\zeta}\pi}\int_{\mathbb{R}_{>0}e^{i\gamma}}f(z)z^{-\zeta-1}dz=-\frac{\sin\pi\zeta}{e^{\pi i\zeta}\pi}\,\widehat{f}(\zeta) \tag{1.4}$$

を得る. ここで $\widehat{f}=\mathcal{M}f$ は前項の意味の Mellin 変換を表す. 従って, $\mu<\kappa<0$ なる κ をとれば, $z\in A(\alpha,\beta)$ のとき $f(z)$ は

$$f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa+i\mathbb{R}}\widetilde{f}(\zeta)e^{\pi i\zeta}z^{\zeta}\frac{\pi d\zeta}{\sin\pi\zeta}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa+i\mathbb{R}}\widetilde{f}(\zeta)(-z)^{\zeta}\frac{\pi d\zeta}{\sin\pi\zeta} \tag{1.5}$$

と再現される. (右は $-z$ の冪函数を 偏角の条件 $\arg(-z)\in(\alpha+\pi,\beta+\pi)$ で指定したもの).

$\widehat{f}(\zeta)$ は帯領域 $\mu<\mathrm{Re}\,\zeta<0$ 上の正則函数であるが, $\widetilde{f}(\zeta)$ の方は半平面 $\mathrm{Re}\,\zeta>\mu$ 上の正則函数であって (1.4) から

$$\widehat{f}(\zeta)=-\frac{e^{\pi\zeta}\pi}{\sin\pi\zeta}\,\widetilde{f}(\zeta). \tag{1.6}$$

つまり, $f(z)$ が $z=0$ で正則な場合には, $\widehat{f}(\zeta)$ は, 右半平面 $\mathrm{Re}\,\zeta>\mu$ に有理型に解析接続され, $\zeta=0,1,2,\ldots$ にのみ高々 1 位の極を持つことを意味する. この意味で, $\widetilde{f}(\zeta)$ は Mellin 変換 $\widehat{f}(\zeta)$ の「正則化」である.

$f(z)$ が $z=0$ の近傍で一価正則なので, $\zeta=k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ に対して

$$\widetilde{f}(k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r'}f(z)z^{-k-1}dz \tag{1.7}$$

は $f(z)$ の $z=0$ での Taylor 展開の k 次の係数を表す. 従って開円板 $|z|<r$ においては

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{f}(k)z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{Res}\left(\widetilde{f}(\zeta)\frac{(-z)^{\zeta}\pi d\zeta}{\sin\pi\zeta};\ \zeta=k\right) \tag{1.8}$$

が成立する. $\widehat{f}(\zeta)$ の言葉で言えば, Mellin 変換 $\widehat{f}(\zeta)$ は $\zeta=0,1,2,\ldots$ において高々 1 位の極をもち, $f(z)$ がそこでの留数を用いて

$$f(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{Res}(\widetilde{f}(\zeta)z^{\zeta}\,d\zeta;\ \zeta=k)=-\sum_{k=0}^{\infty}z^k\,\mathrm{Res}\left(\widehat{f}(\zeta)\,d\zeta;\ \zeta=k\right) \tag{1.9}$$

と展開されることを意味する.

正則化した Mellin 変換の増大度を記述するために, 次のような函数空間を導入する. $\mu\in\mathbb{R}$, $(a,b;r)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_{>0}$ に対して, 半平面 $\mathrm{Re}\,\zeta>\mu$ 上の正則函数 $\psi(\zeta)\in\mathcal{O}((\mu,\infty)+i\mathbb{R})$ であって,

次の評価を満たすもの全体を $\mathrm{Exp}((\mu,\infty)+i\mathbb{R};(a,b;r))$ で表す: 任意の $\mu'>\mu$, $a'>a$, $b'<b$, $0<r'<r$ に対して, 正数 $C>0$ があって

$$|\psi(\zeta)|\leq C(r')^{-\xi}e^{a'\eta_{+}+b'\eta_{-}} \qquad (\zeta=\xi+i\eta;\ \xi\geq\mu'). \tag{1.10}$$

この記法の下で次の定理が成立する.

定理 1.3 $-1\leq\mu<0$, $\alpha<\beta$, $\beta-\alpha\leq 2\pi$, $r>0$ とする. このとき, (1.3) で定義した Mellin 変換の正則化 $\widetilde{\mathcal{M}}$ は位相線型空間としての同型

$$\widetilde{\mathcal{M}}:\ \mathcal{O}(\Omega(\alpha,\beta;r);\mu)\ \xrightarrow{\sim}\ \mathrm{Exp}((\mu,\infty)+i\mathbb{R};(\alpha+2\pi,\beta;r)) \tag{1.11}$$

を誘導する.

$\psi(\zeta)\in\mathrm{Exp}((\mu,\infty)+i\mathbb{R};(\alpha+2\pi,\beta;r))$ のとき, 逆変換 $\widetilde{\mathcal{N}}\psi(z)\in\mathcal{O}(\Omega(\alpha,\beta;r);\mu)$ は, 角領域側では $z\in A(\alpha,\beta)$ に対して

$$\widetilde{\mathcal{N}}\psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa+i\mathbb{R}}\psi(\zeta)\,e^{\pi i\zeta}z^{\zeta}\frac{\pi d\zeta}{\sin\pi\zeta}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa+i\mathbb{R}}\psi(\zeta)\,(-z)^{\zeta}\frac{\pi d\zeta}{\sin\pi\zeta} \tag{1.12}$$

$(\mu<\kappa<0)$, 原点の近傍では

$$\widetilde{\mathcal{N}}\psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi(k)z^{k} \qquad (|z|<r) \tag{1.13}$$

なる函数として特徴付けられる. なお, 上記の定理 1.3 は, 森本・吉野 [9] の結果を Mellin 変換の言葉で言い換えたものなっている.

この定理は次の Carlson の定理を含んでいる.

定理 1.4 (Carlson の定理) $\mu<0$ とし, 半平面 $\mathrm{Re}\,\zeta>\mu$ 上の正則函数 $\psi(\zeta)$ について, 正数 $0<k<\pi$, $r>0$ と $C>0$ があって, 次の評価が成立するとする:

$$|\psi(\zeta)|\leq Cr^{-\xi}e^{k|\eta|} \qquad (\zeta=\xi+i\eta;\ \xi>\mu). \tag{1.14}$$

このとき, $\psi(k)=0$ $(k=0,1,2,\ldots)$ ならば $\psi(\zeta)$ は恒等的に 0 である.

実際, $\psi(\zeta)$ は $\mathrm{Exp}((\mu,\infty)+i\mathbb{R};(k,-k;r))$ $(\alpha=k-2\pi,\beta=-k)$ に属すので, $f(z)=\widetilde{\mathcal{N}}\psi(z)\in\mathcal{O}(\Omega(k-2\pi,-k;r);\mu)$ である. このとき $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi(k)z^{k}$ だから $\psi(k)=0$ $(k=0,1,2,\ldots)$ の下では $f(z)$ は恒等的に 0. これは $\psi(\zeta)$ 自身が恒等的に 0 であることを意味する.

1.3 $\mathbb{P}^1$ の2点を結ぶ Mellin 変換

今までの議論では $z=0$ と $z=\infty$ を結ぶ半直線 $\mathbb{R}_{>0}e^{i\gamma}$ 上の Mellin 変換 (1.15) とその正則化 (1.3) を考察した．これに1次分数変換による座標変換を施せば，$\mathbb{P}^1$ 上の任意の2点 $z=a$, $z=b$ $(a\neq b)$ を結ぶ円弧に沿う Mellin 変換が得られる．この場合，角領域は $z=a$ と $z=b$ を通る2つの円弧で挟まれた三日月型領域に置換えればよい．

今，$\mathbb{P}^1$ 上の相異なる3点 t_0,t_1,t_∞ に対し，$z=0,1,\infty$ をそれぞれ $w=t_0,t_1,t_\infty$ に移す1次分数変換は

$$z=\frac{(t_1-t_\infty)(w-t_0)}{(t_1-t_0)(w-t_\infty)}=\frac{w-t_0}{t_\infty-w}\left(\frac{t_1-t_0}{t_\infty-t_1}\right)^{-1}. \tag{1.15}$$

で与えられる．1 に対応する t_1 は，偏角 0 を指定するための基準点であるが，以下では，$a=t_0$, $b=t_\infty$, $c=(t_\infty-t_1)/(t_1-t_0)\in\mathbb{C}^*$ とおいて t_1 を隠蔽し，

$$z=c\,\frac{w-a}{b-w},\qquad \frac{dz}{z}=\frac{(b-a)dz}{(z-a)(b-z)} \tag{1.16}$$

なる一次分数変換で座標変換したものを考える．

改めて $a,b\in\mathbb{C}$ $(a\neq b)$, $c\in\mathbb{C}^*$ として，$z=a,b$ が有限な点の場合を考えよう．(必要がなければ $c=1$ でもよい.) D を a,b をつなぐ三日月型の領域とし，(μ,ν) を $\mu<\nu$ なる実数の組をとする．D 上の正則函数 $f(z)\in\mathcal{O}(D)$ で，$\mathbb{P}^1\backslash\{a,b\}$ 内の任意の三日月型閉領域 $L\subset D$ と，任意の $\varepsilon>0$ に対して，正数 $C>0$, $r>0$ があって

$$\begin{aligned}|f(z)|&\le C\,|z-a|^{\nu-\epsilon} && (z\in L;\ |z-a|\le r),\\ |f(z)|&\le C\,|z-b|^{-\mu-\epsilon} && (z\in L;\ |z-b|\le r)\end{aligned} \tag{1.17}$$

なる評価が成立するとする．このとき，Mellin 変換 $\widehat{f}(\zeta)$ を

$$\widehat{f}(\zeta)=\int_\gamma f(z)\left(c\,\frac{z-a}{b-z}\right)^{-\zeta}\frac{(b-a)dz}{(z-a)(b-z)}=c^{-\zeta}(b-a)\int_\gamma f(z)(z-a)^{-\zeta-1}(b-z)^{\zeta-1}dz$$

で定義する．ここで，γ は a から b に至る D 内の任意の円弧である．$\mu<\mathrm{Re}(\zeta)<\nu$ の下では，$\widehat{f}(\zeta)$ は積分路 γ によらず確定し，$\widehat{f}(\zeta)\in\mathcal{O}((\mu,\nu)+i\mathbb{R})$ に属す．(c を特定して偏角を指定すれば，適当な $\alpha<\beta$ に対して $\mathrm{Exp}((\mu,\nu)+i\mathbb{R};(\alpha,\beta))$ に属す.) Mellin 変換の逆変換は，$\kappa\in(\mu,\nu)$ なる κ を用いて，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa+i\mathbb{R}}\widehat{f}(\zeta)\left(c\,\frac{z-a}{b-z}\right)^{\zeta}d\zeta \tag{1.18}$$

で与えられる．

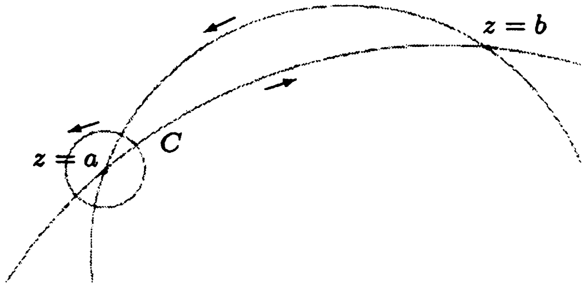
Mellin 変換の正則化についても，次の形の積分変換を考えればよい．

$$\widetilde{f}(\zeta)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C f(z)\left(c\,\frac{z-a}{b-z}\right)^{-\zeta}\frac{(b-a)dz}{(z-a)(b-z)}. \tag{1.19}$$

逆変換は

$$f(z) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\kappa+\sqrt{-1}\mathbb{R}} \widetilde{f}(\zeta) \left(-c\frac{z-a}{b-z}\right)^{\zeta} \frac{\pi\, d\zeta}{\sin(\pi\zeta)} \tag{1.20}$$

と表される.



$f(z)$ としては, $z = a$ を中心とする小さい円の内部と $z = a$ と $z = b$ に懸かる三日月型領域の和集合で定義された正則函数を考え, $z = b$ の近傍では,

$$|g(z)| \leq C|z-b|^{-\mu-\epsilon} \quad (-1 \leq \mu < 0)$$

の形の評価を持つとする. このとき, (1.19) で正則化した Mellin 変換 $\widetilde{f}(\zeta)$ は, 右半平面 $\mathrm{Re}\,\zeta > \mu$ で正則な函数であり, 三日月型領域では上記の逆変換 (1.20) で, また $z = a$ の近傍では級数展開

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{f}(k) \left(c\frac{z-a}{b-z}\right)^{k} \tag{1.21}$$

で, $\widetilde{f}(\zeta)$ から $f(z)$ が復元される.

1.4　接続問題への応用：漸近展開定理

$\mathbb{P}^1$ 上の一般の 2 点の $z = a$, $z = b$ での接続問題は, 必要に応じて 1 次分数変換で変換して考えれば良いので, この節では $z = 0$ から $z = \infty$ への接続の問題を考察する.

以下, 条件 $\alpha < \beta$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$, $\mu < \nu$ を満たす実数 $\alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ を固定し, $f(z) \in \mathcal{O}(A(\alpha,\beta); (\mu,\nu))$ とする. 即ち, $f(z)$ は開角領域 $A(\alpha,\beta)$ 上の正則函数であり, 大まかに言えば, $|z| \to \infty$ のとき $A(\alpha,\beta)$ 内で高々 $|z|^{\mu+\epsilon}$ 程度, $|z| \to 0$ のとき高々 $|z|^{\nu-\epsilon}$ 程度の増大度をもつとする. このとき (1.15) で定義される Mellin 変換 $\varphi(\zeta) = \widehat{f}(\zeta)$ は, 開帯領域 $\mu < \mathrm{Re}(\zeta) < \nu$ で正則である. この設定で,

> $f(z)$ が大域的な線型常微分方程式を満たすとき, それを利用して Mellin 変換 $\varphi(\zeta)$ を, ζ 平面全体まで 1 価有理型に解析接続し, その極の情報から角領域 $A(\alpha,\beta)$ の端点 $z = 0$ と $z = \infty$ の周りでの $f(z)$ の漸近展開を決定する

というのが, 以下の議論の概要である.

議論を明確にするために, 多項式係数の m 階の微分作用素

$$L = a_0(z)\partial_z^m + a_1(z)\partial_z^{m-1} + \cdots + a_m(z); \quad a_k(z) \in \mathbb{C}[z] \quad (k = 0, 1, \ldots, m) \tag{1.22}$$

(但し, $m \geq 1$, $a_0(z) \neq 0$ とする) があって, $f(z)$ が $Lf(z) = 0$ を満たすと仮定する. このとき, 必要に応じて z の整数冪を乗ずれば, L は次の形に表されるとしてよい. $\vartheta_z = z\partial_z$ で Euler の作用素を表すとき,

$$L = p_0(\vartheta_z) + z p_1(\vartheta_z) + \cdots + z^d p_d(\vartheta_z); \quad p_i(\zeta) \in \mathbb{C}[\zeta] \quad (i = 0, 1, \ldots, d). \tag{1.23}$$

係数の $p_i(\zeta)$ は高々 m 次の多項式であって, $p_0(\zeta)$ および $p_d(\zeta)$ は 0 でないとする. d を L の次数と呼ぶ.

今, 微分方程式 $Lf(z) = 0$ が $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{\rho+k}$ $(u_0 \neq 0)$ の形の形式解をもつとすると, その係数は差分方程式

$$\sum_{i+j=k} p_i(\rho + j)\, u_j = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.24}$$

を満たす. 特に主要項の冪指数 ρ は $p_0(\zeta)$ の根でなくてはいけない. 同様に, 今, 微分方程式 $Lf(z) = 0$ が $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^{\lambda-k}$ $(v_0 \neq 0)$ の形の形式解をもつとすると, 冪指数 λ は $p_d(\zeta)$ の根でなくてはいけない. その意味で, $p_0(\zeta)$ および $p_d(\zeta)$ は, それぞれ $z = 0$, $z = \infty$ での形式冪級数解の冪指数の指標であり, その意味の「特性多項式」である.

微分作用素 L の Mellin 変換

$$\begin{aligned} \widehat{L} &= p_0(\zeta) + T_\zeta^{-1} p_1(\zeta) + \cdots + T_\zeta^{-d} p_d(\zeta) \\ &= p_0(\zeta) + p_1(\zeta - 1) T_\zeta^{-1} + \cdots + p_d(\zeta - d) T_\zeta^{-d} \end{aligned} \tag{1.25}$$

を考えよう. ここで T_ζ は, $T_\zeta \varphi(\zeta) = \varphi(\zeta + 1)$ で定義される 1 シフトの作用素である. このとき, $f(z)$ の Mellin 変換 $\varphi(\zeta) = \widehat{f}(\zeta)$ の満たすべき差分方程式は $\widehat{L}\varphi(\zeta) = 0$, 即ち

$$p_0(\zeta)\varphi(\zeta) + p_1(\zeta - 1)\varphi(\zeta - 1) + \cdots + p_d(\zeta - d)\varphi(\zeta - d) = 0 \tag{1.26}$$

である. 今, Mellin 変換 $\varphi(\zeta) = \widehat{f}(\zeta)$ の正則域 $\mu < \mathrm{Re}\zeta < \nu$ について, その幅が微分方程式の次数 d よりも大きいと仮定しよう: $\nu - \mu > d$. このとき, $\varphi(\zeta - i)$ $i = 0, 1, \ldots, d$ は共通の定義域 $\mu + d < \mathrm{Re}\zeta < \nu$ をもち, そこで上記の差分方程式が成立する. 同じことだが $\mu < \mathrm{Re}(\zeta) < \nu - d$ において, 差分方程式

$$p_0(\zeta + d)\varphi(\zeta + d) + \cdots + p_{d-1}(\zeta + 1)\varphi(\zeta) + p_d(\zeta)\varphi(\zeta) = 0 \tag{1.27}$$

が成立する.

今, $z = 0$ 側の特性多項式 $p_0(\zeta)$ の相異なる根のうち, 閉右半平面 $\mathrm{Re}\zeta \geq \nu$ 内にあるものを, $\rho_1, \ldots, \rho_r$ とする:

$$\{\rho \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,\rho \geq \nu,\ p_0(\rho) = 0\} = \{\rho_1, \ldots, \rho_r\}. \tag{1.28}$$

($i \neq j$ に対しては $\rho_i \neq \rho_j$ とする.) このとき, $\varphi(\zeta)$ は関係式 (1.26) によって右半平面 $\mathrm{Re}\zeta > \mu$ に有理型に解析接続され, その極は高々

$$\zeta = \rho_i + k \quad (i = 1, \ldots, r;\ k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.29}$$

のみに現れる. 同様に $p_d(\zeta)$ の相異なる根のうち閉半平面 $\mathrm{Re}\zeta \leq \mu$ 内にあるものを $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ とすると, $\varphi(\zeta)$ は関係式 (1.27) によって左半平面 $\mathrm{Re}\zeta < \nu$ に有理型に解析接続され, その極は高々

$$\zeta = \lambda_j - k \quad (j = 1, \ldots, l;\ k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.30}$$

のみに現れる. 結局 $\varphi(\zeta) = \widehat{f}(\zeta)$ は, 帯領域 $\mu < \mathrm{Re}\zeta < \nu$ から ζ 平面 $\mathbb{C}$ 全体に有理型に解析接続され, 極の生じる可能性のある (1.29), (1.30) 以外の点では正則となる.

そこで, これらの極における留数を考えると

$$\begin{aligned} -\mathrm{Res}\left(\widehat{f}(\zeta)z^{\zeta}d\zeta;\, \zeta = \rho_i + k\right) &= z^{\rho_i+k}\, c_{i,k}(\log z) \qquad (i = 1, \ldots, r;\ k = 0, 1, \ldots), \\ \mathrm{Res}\left(\widehat{f}(\zeta)z^{\zeta}d\zeta;\, \zeta = \lambda_j - k\right) &= z^{\lambda_j-k}\, d_{j,k}(\log z) \qquad (j = 1, \ldots, l;\ k = 0, 1, \ldots) \end{aligned} \tag{1.31}$$

なる多項式 $c_{i,k}(s), d_{j,k}(s) \in \mathbb{C}[s]$ が決まる. これらの係数が, それぞれ, 角領域 $A(\alpha, \beta)$ 内の $z = 0$ の近傍, $z = \infty$ の近傍での $f(z)$ の漸近展開を記述する: $z \in A(\alpha, \beta)$ のとき,

$$\begin{aligned} f(z) &\sim \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{\infty} z^{\rho_i+k}\, c_{i,k}(\log z) \qquad (|z| \to 0), \\ f(z) &\sim \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=0}^{\infty} z^{\lambda_j-k}\, d_{j,k}(\log z) \qquad (|z| \to \infty). \end{aligned} \tag{1.32}$$

この漸近展開の正確な意味は次のとおり: 任意の $[\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$ と, 任意の $M \in \mathbb{R}$, $M \geq \nu$ に対してある定数 $C > 0$ と $M' > M$ があって.

$$\left| f(z) - \sum_{(i,k):\, \mathrm{Re}(\rho_i)+k \leq M} z^{\rho_i+k}\, c_{i,k}(\log z) \right| \leq C|z|^{M'} \qquad (z \in A[\alpha', \beta'];\ |z| \leq 1). \tag{1.33}$$

$|z| \to \infty$ の側も同様である.

定理 1.5 $\alpha < \beta$, $\mu < \nu$ とし角領域上の正則函数 $f(z) \in \mathcal{O}(A(\alpha, \beta); (\mu, \nu))$ を考える. 今 $f(z)$ が d 次の多項式係数の微分作用素 (1.23) に対して微分方程式 $Lf(z) = 0$ を満たし, 次数 d について $\nu - \mu > d$ が成立するとする. $p_0(\zeta)$ の根 ρ で $\mathrm{Re}\rho \geq \nu$ を満たすものを, $\rho_1, \ldots, \rho_r$, また $p_d(\zeta)$ の根 ρ で $\mathrm{Re}\rho \leq \mu$ を満たすものを, $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ とする. このとき, $f(z)$ の Mellin 変換 $\widehat{f}(\zeta) \in \mathrm{Exp}((\mu, \nu) + i\mathbb{R}; (\alpha, \beta))$ は全平面 $\mathbb{C}$ に 1 価有理型函数として解析接続され, その極は高々

$$\begin{aligned} \zeta &= \rho_i + k \qquad (i = 1, \ldots, r; k = 0, 1, 2, \ldots), \\ \zeta &= \lambda_j - k \qquad (j = 1, \ldots, l; k = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{1.34}$$

のみに現れる.

定理 1.6 定理 1.5 の設定の下で, $\hat{f}(\zeta)$ の解析接続を同じ記号で表し, その右半平面および左半平面の極での留数を用いて, (1.31) により, 多項式の族 $c_{i,k}(s), d_{j,k}(s) \in \mathbb{C}[s]$ を定義する. このとき, 角領域 $A(\alpha,\beta)$ において, $f(z)$ は, $|z| \to 0$ または $|z| \to \infty$ のとき, それぞれ

$$\begin{aligned} f(z) &\sim \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{\infty} z^{\rho_i+k}\, c_{i,k}(\log z) \qquad (|z| \to 0), \\ f(z) &\sim \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=0}^{\infty} z^{\lambda_j-k}\, d_{j,k}(\log z) \qquad (|z| \to \infty) \end{aligned} \tag{1.35}$$

と漸近展開される.

1 次分数変換を用いて座標変換すれば, $\mathbb{P}^1$ の一般の 2 点 a, b $(a \neq b)$ について, $z = a$ から $z = b$ に懸かる三日月型領域上の正則函数とその Mellin 変換についても漸近展開定理が得られる. 簡単のため $c = 1$ とすると, この場合の漸近展開は次の形のものである:

$$\begin{aligned} f(z) &\sim \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{\rho_i+k} c_{i,k}\left(\log\frac{z-a}{b-z}\right) \qquad (|z| \to a), \\ f(z) &\sim \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{\lambda_j-k} d_{j,k}\left(\log\frac{z-a}{b-z}\right) \qquad (|z| \to b). \end{aligned} \tag{1.36}$$

次節では, この節で述べた考え方の応用例として, 一般超幾何微分方程式の解の接続問題を考察する.

2 一般超幾何微分方程式の場合

複素パラメータ $\alpha_0, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{C}$ $(\beta_i \neq 0, -1, -2, \ldots)$ に対して, 一般超幾何級数

$${}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \\ \beta_1, \ \ldots, \ \beta_r\end{matrix}; z\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_0)_k(\alpha_1)_k\cdots(\alpha_r)_k}{k!\,(\beta_1)_k\cdots(\beta_r)_k} z^k \qquad (|z| < 1) \tag{2.1}$$

は, $|z| < 1$ 上の正則函数を定める. ここで, $(\alpha)_k = \Gamma(\alpha+k)/\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$. それを解析接続して得られる多価解析函数も同じ記号で表し, ${}_{r+1}F_r$ 型の一般超幾何函数と呼ぶ.

同じ ${}_{r+1}F_r$ の記号で, 下段に $r+1$ 個のパラメータを記すときには, そのうちの 1 個は 1 であることを仮定する. 即ち, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{C}$ について, 何れかは 1 であって, $\beta_i \neq 0, -1, -2, \ldots$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$ のとき,

$${}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \\ \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_r\end{matrix}; z\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_0)_k(\alpha_1)_k\cdots(\alpha_r)_k}{(\beta_0)_k(\beta_1)_k\cdots(\beta_r)_k} z^k \qquad (|z| < 1) \tag{2.2}$$

と記す．β パラメータのうちの 1 を一個除外する煩雑さをさけるために，この記法も併用する．

一般超幾何函数と，一般超幾何微分方程式について基本的な事実を復習しておく．なお，一般超幾何函数については，特異点 $z=1$ の周りの非正則解の記述や，接続係数の決定の問題を含めて，既に E. Winkler [17] (1931 年) や N.E. Nørlund [10] (1955 年) の詳細な研究があることを喚起しておきたい．

2.1 微分方程式

$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ $(i=0,1,\ldots,r)$ を複素パラメータとし，$(r+1)$ 階の常微分作用素

$$L=\prod_{i=0}^{r}(\vartheta_z+\beta_i-1)-z\prod_{i=0}^{r}(\vartheta_z+\alpha_i) \tag{2.3}$$

を考える．ここで $\vartheta_z=z\partial_z$ は Euler 作用素を表す．この微分作用素 L は，$\mathbb{P}^1$ 上 $z=0,1,\infty$ に確定特異点をもち，それぞれの特性冪指数は

$$\begin{array}{lcl} z=0 & : & 1-\beta_0,\ 1-\beta_1,\ \ldots, 1-\beta_r \\ z=1 & : & 0,1,\ \ldots,\ r-1,\ \rho \\ z=\infty & : & \alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\alpha_r \end{array} \tag{2.4}$$

で与えられる．ここで，$\rho=\sum_{i=0}^{r}(\beta_i-\alpha_i)-1$ と記した．また，$z=1$ の特性冪指数 $0,1,\ldots,r-1$ については非対数的であって，$z=1$ の近傍で，微分方程式 $Lu=0$ の正則解の次元は r 以上である．常微分方程式 $Lu=0$ は，これらの条件で完全に特徴付けられる．

以下では，$\beta_0=1$ とし，非整数性の条件

$$\alpha_i-\alpha_j,\ \beta_i-\beta_j\notin\mathbb{Z}\quad(0\le i,j\le r;\ i\neq j);\qquad \rho=\sum_{i=1}^{r}\beta_i-\sum_{i=0}^{r}\alpha_i\notin\mathbb{Z} \tag{2.5}$$

を仮定する．このとき，各特異点 $z=a$ $(a=0,1,\infty)$ の周りで次のような解の基本系が存在する．

$$\begin{array}{lcll} z=0 & : & f_j^{(0)}(z)=z^{1-\beta_j}F_j^{(0)}(z) & (j=0,1,\ldots,r) \\ z=\infty & : & f_j^{(\infty)}(z)=z^{-\alpha_j}F_j^{(\infty)}(z) & (j=0,1,\ldots,r) \end{array} \tag{2.6}$$

ここで，$F_j^{(0)}(z)$, $F_j^{(\infty)}(z)$ は，それぞれ，$z=0$ または $z=\infty$ の周りで正則とする．$z=0$ 側では，$F_j^{(0)}(0)=1$ と規格化すると $F_j^{(0)}(z)$ は一意に定まり

$$F_j^{(0)}(z)={}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0-\beta_j+1,\ldots,\alpha_r-\beta_j+1\\ \beta_0-\beta_j+1,\ldots,\beta_r-\beta_j+1\end{matrix};z\right] \tag{2.7}$$

となる (下段の第 j 成分は 1)．念のため通常の記法で書けば

$$\begin{aligned} F_0^{(0)}(z)&={}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ldots,\beta_r\end{matrix};z\right], \\ F_j^{(0)}(z)&={}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0-\beta_j+1,\alpha_1-\beta_j+1,\ldots,\alpha_0-\beta_j+1\\ 2-\beta_j,\beta_1-\beta_j+1,\ldots,\widehat{\beta_j-\beta_j+1},\ldots,\beta_r-\beta_j+1\end{matrix};z\right]\quad(j=1,\ldots,r). \end{aligned} \tag{2.8}$$

また $z=\infty$ 側では, $F_j^{(\infty)}(\infty)=1$ という規格化で

$$F_j^{(\infty)}(z)={}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_j-\beta_0+1,\ldots,\alpha_j-\beta_r+1\\ \alpha_j-\alpha_0+1,\ldots,\alpha_j-\alpha_r+1\end{matrix};z^{-1}\right] \tag{2.9}$$

となる (上段の第 0 成分は α_j, 下段の第 j 成分は 1).

$z=1$ の周りでは, 解の基本系として

$$f_j^{(1)}(z)=F_j^{(1)}(z)\quad(j=0,\ldots,r-1);\quad f_r^{(1)}(z)=(z-1)^\rho F_r^{(1)}(z) \tag{2.10}$$

で, $F_j^{(1)}(z)$ は $z=1$ の近傍で正則なものがとれる. 例えば,

$$\begin{aligned}&F_j^{(1)}(z)=\tfrac{1}{j!}(z-1)^j+O((z-1)^r)\qquad(j=0,1,\ldots,r-1);\\&F_r^{(1)}(z)=1+O((z-1))\quad\text{即ち}\quad F_r^{(1)}(1)=1\end{aligned} \tag{2.11}$$

とすれば, これらの正則函数は一意に決まる. $z=1$ の周りの解の記述については後述する.

2.2 積分表示

パラメータの実部に関する条件 $\mathrm{Re}\,\beta_i>\mathrm{Re}\,\alpha_i>0$ $(i=1,\ldots,r)$ の下で, 一般超幾何級数 ${}_{r+1}F_r$ は Euler 積分表示

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^r\frac{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i-\alpha_i)}{\Gamma(\beta_i)}\,{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_r\end{matrix};z\right]\\&=\int_{(0,1)^r}(1-u_1\cdots u_rz)^{-\alpha_0}\prod_{i=1}^r u_i^{\alpha_i-1}(1-u_i)^{\beta_i-\alpha_i-1}du_1\cdots du_r\end{aligned} \tag{2.12}$$

をもつ. 但し $z\in\mathbb{C}\backslash[1,\infty)$ とする. 被積分函数の分枝は, $u_i\in(0,1)$ のとき $\arg u_i=\arg(1-u_i)=0$ とし, また $z\in(0,1)$ のとき, $\arg(1-u_1\cdots u_rz)=0$ として指定する. この ${}_{r+1}F_r$ は, $|z|<1$ では一般超幾何級数 (2.1) で指定される正則函数であり, それを $z\in\mathbb{C}\backslash[1,\infty)$ まで解析接続したものを表す.

積分変数の変換

$$\begin{aligned}&t_1=u_1\cdots u_r,\ t_2=u_2\cdots u_r,\ \ldots,\ t_r=u_r\\&u_1=t_1/t_2,\ u_2=t_2/t_3,\ \ldots,\ u_r=t_r\end{aligned} \tag{2.13}$$

を施すと, 上記の積分は「Selberg 型」の積分表示

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^r\frac{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i-\alpha_i)}{\Gamma(\beta_i)}\,{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_r\end{matrix};z\right]\\&=\int_{0<t_1<\cdots<t_r<1}(1-t_1z)^{-\alpha_0}\prod_{i=1}^r t_i^{\alpha_i-\beta_{i-1}}(t_{i+1}-t_i)^{\beta_i-\alpha_i-1}dt_1\cdots dt_r\end{aligned} \tag{2.14}$$

に変換される. 但し $\beta_0=1$, $t_{r+1}=1$ とする. この形の積分表示は, 三町 [7] で用いられているものである.

2.3 $z \to 1$ での極限

(2.1) の一般超幾何級数の z^k の係数

$$c_k = \frac{(\alpha_0)_k(\alpha_1)_k\cdots(\alpha_r)_k}{k!\,(\beta_1)_k\cdots\,(\beta_r)_k} = \frac{\prod_{i=1}^r\Gamma(\beta_i)}{\prod_{i=0}^r\Gamma(\alpha_i)}\frac{\prod_{i=0}^r\Gamma(\alpha_i+k)}{\prod_{i=1}^r\Gamma(\beta_i+k)} \tag{2.15}$$

を考えると, Stirling の公式により (パラメータ α_i,β_i について広義一様に)

$$c_k \sim \frac{\prod_{i=1}^r\Gamma(\beta_i)}{\prod_{i=0}^r\Gamma(\alpha_i)}k^{-\rho-1} \qquad (k\to\infty). \tag{2.16}$$

が成立する. ここで $\rho = \sum_{i=1}^r\beta_i - \sum_{i=0}^r\alpha_i$. 従って $\mathrm{Re}\,\rho > 0$ ならば級数

$${}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_r\end{matrix};1\right] = \sum_{k=0}^\infty\frac{(\alpha_0)_k(\alpha_1)_k\cdots(\alpha_r)_k}{k!\,(\beta_1)_k\cdots\,(\beta_r)_k} \tag{2.17}$$

は絶対収束し, $(\alpha_0,\ldots,\alpha_r;\beta_1,\ldots,\beta_r)$ を座標系とするアフィン空間 $\mathbb{C}^{2r+1}$ の開集合 $\mathrm{Re}\,\rho>0$, $\beta_i\notin\{0,-1,-2,\ldots\}$ $(i=1,\ldots,r)$ 上の正則函数を定める. ($(\prod_{i=1}^r\Gamma(\beta_i))^{-1}$ を乗じて考えれば, $\beta_i=0,-1,-2,\ldots$ $(i=1,\ldots,r)$ にそって 1 位の極を持つだけなので, これは $\mathrm{Re}(\rho)>0$ 上の有理型函数である.) Abel の連続性定理により, $\mathrm{Re}\,\rho>0$ のときは 実区間 (0,1) 内から z が 1 に近づくとき

$$\lim_{z\uparrow1}{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_r\end{matrix};z\right] = {}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_r\end{matrix};1\right] \tag{2.18}$$

が成立する.

補題 2.1 $\rho = \sum_{i=1}^r\beta_i - \sum_{i=0}^r\alpha_i$ について, $\rho<0$ とする. z が実区間 $(0,1)$ 内から 1 に近づくとき

$$\lim_{z\uparrow1}(1-z)^{-\rho}{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_r\end{matrix};z\right] = \frac{\Gamma(-\rho)\prod_{i=1}^r\Gamma(\beta_i)}{\prod_{i=0}^r\Gamma(\alpha_i)}. \tag{2.19}$$

木村・高野 [5] に $r=1$ の Gauss の超幾何函数の場合の証明があるが, ${}_{r+1}F_r$ の場合も同じ方法で示せる (この証明は川畑 [3] による.) なお, 補題は $\mathrm{Re}(\rho)<0$ の仮定の下で成立する. 本稿の立場では, 後の第 2.6 節の議論で自然に得られる公式なので, ここでは証明はしない. 大久保・高野・吉田 [13] では Lemma 2 として証明されている.

$z\to1$ での極限が, どのように接続問題と関連するか, 簡単に説明しておく. 今, $U_0=\{\,|z|<1\,\}$, $U_1=\{\,|z-1|<1\,\}$ でそれぞれ $z=0,1$ を中心とする半径 1 の円板を表そう. 一般超幾何函数

$$f(z) = F_0^{(0)}(z) = {}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_r\end{matrix};z\right] \in \mathcal{O}(U_0) \tag{2.20}$$

は, $U_0 \cap U_1$ 上では, 適当な $h(z), g(z) \in \mathcal{O}(U_1)$ を用いて

$$f(z) = h(z) + (1-z)^\rho g(z) \tag{2.21}$$

と表される. このとき, $\mathrm{Re}\,\rho > 0$ ならば,

$$h(1) = \lim_{z \uparrow 1} f(z) = {}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \\ \beta_1, \ \ldots, \ \beta_r\end{matrix}; 1\right]. \tag{2.22}$$

また, $g(1)$ の 1 での値についても, 上記の補題から $\rho < 0$ ならば

$$g(1) = \lim_{z \uparrow 1}(1-z)^{-\rho} f(z) = \frac{\Gamma(-\rho)\prod_{i=1}^r \Gamma(\beta_i)}{\prod_{i=0}^r \Gamma(\alpha_i)}. \tag{2.23}$$

この $g(1)$ はパラメータについても正則なので,

$$g(1) = \frac{\Gamma(-\rho)\prod_{i=1}^r \Gamma(\beta_i)}{\prod_{i=0}^r \Gamma(\alpha_i)} \tag{2.24}$$

は, α_i, β_i の有理型函数としての恒等式である. (この値が決まってしまえば, 補題 2.1 が $\mathrm{Re}(\rho) < 0$ で成立することは見やすい.) 同様に, $z = 0$ での解の基本系を $U_0 \cap U_1$ 上で

$$z^{1-\beta_j} F_j^{(0)}(z) = h_j^{(0)}(z) + (1-z)^\rho F_r^{(1)}(z) C_{rj}^{(10)} \qquad (h_j^{(0)}(z) \in \mathcal{O}(U_1)) \tag{2.25}$$

と表示すると, $j = 0, 1, \ldots, r$ について

$$\begin{aligned} h_j^{(0)}(1) &= {}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0 - \beta_j + 1, \ldots, \alpha_r - \beta_j + 1 \\ \beta_0 - \beta_j + 1, \ldots, \beta_r - \beta_j + 1\end{matrix}; 1\right] \\ C_{rj}^{(10)} &= \frac{\Gamma(-\rho)\prod_{0 \le s \le r;\, s \ne j} \Gamma(\beta_s - \beta_j + 1)}{\prod_{s=0}^r \Gamma(\alpha_s - \beta_j + 1)} \qquad \left(\rho = \sum_{s=1}^r \beta_s - \sum_{s=0}^r \alpha_s\right) \end{aligned} \tag{2.26}$$

が成立する.

一般超幾何函数の接続係数のうち, $z = 1$ の近傍の非正則解が関わる部分については, このガンマ函数因子が本質的である. $z = 1$ の近傍の正則解の基底として $h_1^{(0)}(z), \ldots, h_r^{(0)}(z)$ を用いるのであれば, 接続係数のそれ以外の部分は, モノドロミー行列の代数的な計算だけで決定できる. (川畑 [3], 大久保・高野・吉田 [13])

2.4 $z = 0$ と $z = \infty$ の間の接続問題

Mellin 変換の接続問題への応用の最初の例として, $|z| < 1$ で正則な函数

$$f(z) = {}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \\ \beta_1, \ \ldots, \ \beta_r\end{matrix}; z\right] \tag{2.27}$$

を, 負の実軸に沿って解析接続したときの, $z = \infty$ での漸近展開を求めることを考える. そのために Mellin 変換

$$\widehat{f}(\zeta) = \int_0^{-\infty} f(z) z^{-\zeta-1} dz \tag{2.28}$$

を考察する．ここで角領域として $A(-2\pi,0)$ をとり $z\in(-\infty,0)$ のとき z の偏角は $\arg z=-\pi$ で指定する．$f(z)$ を $A(-2\pi,0)$ 上の正則函数とみなすと，$|z|\to 0$ では $f(z)=O(1)$．また，$z=\infty$ の近傍では

$$f(z)=c_0(-z)^{-\alpha_0}F_0^{(\infty)}(z)+\cdots+c_r(-z)^{-\alpha_r}F_r^{(\infty)}(z) \tag{2.29}$$

と展開されるはずなので，$\min\{\operatorname{Re}(\alpha_j)\mid j=0,1,\ldots,r\}=a$ とおくと，$|z|\to\infty$ のとき $f(z)=O(|z|^{-a})$ となる．従って $a>0$ ならば $\widehat{f}(\zeta)$ は $(-a,0)+i\mathbb{R}$ で正則となる．今の設定では

$$f(z)\in\mathcal{O}(A(-2\pi,0);(-a,0));\qquad \widehat{f}(\zeta)\in\operatorname{Exp}((-a,0)+i\mathbb{R};(-2\pi,0)). \tag{2.30}$$

$f(z)$ は 1 次の微分方程式 $(d=1)$ を満たすので，$a>1$ と仮定すれば，前節の定理 1.6 を適用できる状況である．

そこで，Euler 積分表示 (2.12) を用いて Mellin 変換を計算する．以下，

$$\alpha_0>1;\quad \operatorname{Re}\beta_i>\operatorname{Re}\alpha_i>1\quad (i=1,\ldots,r) \tag{2.31}$$

と仮定する $(a>1)$．このとき，$\mathbb{C}\backslash[0,\infty)$ において

$$f(z)=\prod_{s=1}^{r}\frac{\Gamma(\beta_s)}{\Gamma(\alpha_s)\Gamma(\beta_s-\alpha_s)}\int_{(0,1)^r}(1-u_1\cdots u_r z)^{-\alpha_0}\prod_{i=1}^{r}u_s^{\alpha_s-1}(1-u_s)^{\beta_s-\alpha_s-1}du_s. \tag{2.32}$$

これに $z^{-\zeta-1}$ を乗じて積分する訳だが，$-a<\operatorname{Re}\zeta<0$ の下で積分の順序を交換して先に z で積分する:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{-\infty}(1-u_1\cdots u_r z)^{-\alpha_0}z^{-\zeta-1}dz\\
&=(u_1\cdots u_r)^{\zeta}\int_0^{-\infty}(1-z)^{-\alpha_0}z^{-\zeta-1}dz\\
&=(u_1\cdots u_r)^{\zeta}\,e^{\pi\sqrt{-1}\zeta}\int_0^1 z^{-\zeta-1}(1-z)^{\alpha_0+\zeta-1}dz\\
&=(u_1\cdots u_r)^{\zeta}\,e^{\pi\sqrt{-1}\zeta}\,\frac{\Gamma(-\zeta)\Gamma(\alpha_0+\zeta)}{\Gamma(\alpha_0)}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

ここで，z を $z/u_1\cdots u_r$ に置換える変数変換と，z を $z/(z-1)$ に置換える変数変換を行った．従って，

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\zeta)&=e^{\pi\sqrt{-1}\zeta}\,\frac{\Gamma(-\zeta)\Gamma(\alpha_0+\zeta)}{\Gamma(\alpha_0)}\prod_{s=1}^{r}\frac{\Gamma(\beta_s)}{\Gamma(\alpha_s)\Gamma(\beta_s-\alpha_s)}\int_{(0,1)^r}\prod_{s=1}^{r}u_s^{\alpha_s+\zeta-1}(1-u_s)^{\beta_s-\alpha_s-1}du_s\\
&=e^{\pi\sqrt{-1}\zeta}\,\frac{\Gamma(-\zeta)\Gamma(\alpha_0+\zeta)}{\Gamma(\alpha_0)}\prod_{s=1}^{r}\frac{\Gamma(\beta_s)}{\Gamma(\alpha_s)\Gamma(\beta_s-\alpha_s)}\prod_{s=1}^{r}\frac{\Gamma(\alpha_s+\zeta)\Gamma(\beta_s-\alpha_s)}{\Gamma(\beta_s+\zeta)}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

これで $f(z)$ の Mellin 変換が，

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\zeta)&=e^{\pi\sqrt{-1}\zeta}\,\frac{\Gamma(-\zeta)\Gamma(\alpha_0+\zeta)}{\Gamma(\alpha_0)}\prod_{s=1}^{r}\frac{\Gamma(\alpha_s+\zeta)\Gamma(\beta_s)}{\Gamma(\alpha_s)\Gamma(\beta_s+\zeta)}\\
&=\frac{-\pi e^{\pi\sqrt{-1}\zeta}}{\sin\pi\zeta}\,\frac{\Gamma(\alpha_0+\zeta)}{\Gamma(1+\zeta)\Gamma(\alpha_0)}\prod_{s=1}^{r}\frac{\Gamma(\alpha_s+\zeta)\Gamma(\beta_s)}{\Gamma(\alpha_s)\Gamma(\beta_s+\zeta)}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

と確定した. このガンマ函数による表示で, $\widehat{f}(\zeta)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型函数に解析接続され, 右半平面 $\mathrm{Re}\,\zeta \geq 0$ では $z = 0, 1, 2, \ldots$ にのみ極をもち, 左半平面 $\mathrm{Re}\,\zeta \leq -a$ では $\zeta = -\alpha_i - k$ $(i = 0, 1, \ldots, r;\ k = 0, 1, 2, \ldots)$ にのみ極をもつ.

右半平面の $z = k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ での留数は

$$-\mathrm{Res}(\widehat{f}(\zeta) z^{\zeta} d\zeta; \zeta = k) = z^k \frac{(\alpha_0)_k}{k!} \prod_{s=1}^{r} \frac{(\alpha_s)_k}{(\beta_s)_k} \tag{2.36}$$

によって, 一般超幾何級数の各項を再現する. また, $\zeta = -\alpha_i - k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ での留数は

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}(\widehat{f}(\zeta) z^{\zeta} d\zeta; \zeta = -\alpha_i - k) \\
&= z^{-\alpha_i - k} e^{-\pi\sqrt{-1}\alpha_i} \frac{(\alpha_i)_k}{k!} \prod_{s \neq i} \frac{\Gamma(\alpha_s - \alpha_i - k)}{\Gamma(\alpha_s)} \prod_{s} \frac{\Gamma(\beta_s)}{\Gamma(\beta_s - \alpha_i - k)} \\
&= (-z)^{-\alpha_i} z^{-k} \prod_{s \neq i} \frac{\Gamma(\alpha_s - \alpha_i)}{\Gamma(\alpha_s)} \prod_{s} \frac{\Gamma(\beta_s)}{\Gamma(\beta_s - \alpha_i)} \frac{(\alpha_i)_k}{k!} \frac{\prod_s (\alpha_i - \beta_s + 1)_k}{\prod_{s \neq i} (\alpha_i - \alpha_s + 1)_k}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

ここで α_s の添字は $s = 0, 1, \ldots, r$ のうち $s \neq i$ なるものを, β_s の添字は $s = 1, \ldots, r$ を走る. また $z \in (-\infty, 0)$ に対して $\arg z = -\pi$ としたので, $\arg(-z) = 0$ である. この計算で, $z = \infty$ での解の級数表示が自然に現れたことに注意してほしい. これは, $z \in A(-2\pi, 0)$ で

$$\begin{gathered}
{}_{r+1}F_r \left[\begin{matrix} \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \\ \beta_1, \ \ldots, \ \beta_r \end{matrix}; z \right] = \sum_{i=0}^{r} (-z)^{-\alpha_i} {}_{r+1}F_r \left[\begin{matrix} \alpha_i, \alpha_i - \beta_1 + 1, \ldots, \alpha_i - \beta_r + 1 \\ \alpha_i - \alpha_0 + 1, \ldots, \alpha_i - \alpha_r + 1 \end{matrix}; z^{-1} \right] C_i \\
C_i = \prod_{0 \leq s \leq r; s \neq i} \frac{\Gamma(\alpha_s - \alpha_i)}{\Gamma(\alpha_s)} \prod_{1 \leq s \leq r} \frac{\Gamma(\beta_s)}{\Gamma(\beta_s - \alpha_i)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)
\end{gathered} \tag{2.38}$$

なる接続公式が成立することを意味する.

定理 2.2 非整数性の条件 (2.5) の下で, ${}_{r+1}F_r$ 型一般超幾何微分方程式の $z = 0$ から $z = \infty$ への角領域 $z \in A(-2\pi, 0)$ $(|\arg(-z)| < \pi)$ での接続問題

$$(-z)^{1-\beta_j} F_j^{(0)}(z) = \sum_{i=0}^{r} (-z)^{-\alpha_i} F_i^{(\infty)}(z)\, C_{ij}^{(\infty 0)} (j = 0, 1, \ldots, r) \tag{2.39}$$

について, 接続係数は

$$C_{ij}^{(\infty 0)} = \prod_{0 \leq s \leq r; s \neq i} \frac{\Gamma(\alpha_s - \alpha_i)}{\Gamma(\alpha_s - \beta_j + 1)} \prod_{0 \leq s \leq r; s \neq j} \frac{\Gamma(\beta_s - \beta_j + 1)}{\Gamma(\beta_s - \alpha_i)} \quad (i, j = 0, 1, \ldots, r) \tag{2.40}$$

で与えられる.

同様に, $z = \infty$ から $z = 0$ への接続問題

$$(-z)^{-\alpha_j} F_j^{(\infty)}(z) = \sum_{i=0}^{r} (-z)^{1-\beta_i} F_i^{(0)}(z)\, C_{ij}^{(0\infty)} (j = 0, 1, \ldots, r) \tag{2.41}$$

の接続係数は

$$C_{ij}^{(\infty 0)} = \prod_{0\le s\le r; s\ne i} \frac{\Gamma(\beta_i-\beta_s)}{\Gamma(\alpha_j-\beta_s+1)} \prod_{0\le s\le r; s\ne j} \frac{\Gamma(\alpha_j-\alpha_s+1)}{\Gamma(\beta_i-\alpha_s)} \quad (i,j=0,1,\ldots,r) \tag{2.42}$$

で与えられる.

2.5 $z=\infty$ から $z=1$ への接続 (その 1): Mellin 変換による表示

$z=0$ と $z=1$ の接続問題と, $z=1$ と $z=\infty$ の接続問題は本質的には同じ問題であるが, 座標系を固定して解を明示的に表示するときは, $z=1$ と $z=\infty$ の接続問題の方が扱い易いので, こちらをまず考える. この場合は, $f(z)$ を $z=1$ を基点として, 実の区間 $(1,\infty)$ を含む角領域上の函数として, Mellin 変換

$$\widehat{f}(\zeta) = \int_1^\infty f(z)(z-1)^{-\zeta-1}dz \tag{2.43}$$

を考える.

解の具体形を知っているのは, $z=\infty$ での解の方なので,

$$f(z) = z^{-\alpha_0}F_0^{(\infty)}(z) = z^{-\alpha_0}{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\ \alpha_0-\beta_1+1,\ldots,\alpha_0-\beta_r+1\\ \alpha_0-\alpha_1+1,\ \ldots,\ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix};\ z^{-1}\right] \tag{2.44}$$

を選び, その Mellin 変換を考察する (β_0 は 1 に固定している). $z\to\infty$ では $f(z)=O(|z|^{-\mathrm{Re}\,\alpha_0})$. また, $\min\{0,\rho\}=\nu$ ($\rho=\sum_{i=1}^r\beta_i-\sum_{i=0}^r\alpha_i$) とおくと $z\to 1$ では, $f(z)=O(|z-1|^\nu)$. 従って $-\mathrm{Re}\,\alpha_0<\nu$ のときは Mellin 変換は $-\mathrm{Re}\,\alpha_0<\mathrm{Re}\,\zeta<\nu$ で正則となる. $f(z)$ の満たす微分方程式は座標 $z-1$ について r 次なので, $-\mathrm{Re}\,\alpha_0<\nu-r$ と仮定すれば, $\widehat{f}(\zeta)$ は $\mathbb{C}$ まで有理型に解析接続され, 漸近展開定理 1.6 を適用できる. という訳で, パラメータに条件

$$\mathrm{Re}\,\alpha_0>r, \qquad \sum_{i=1}^r \mathrm{Re}(\beta_i-\alpha_i)>r \tag{2.45}$$

を課して考える.

そこで $f(z)$ の Euler 積分表示に注目する: $z\in\mathbb{C}\setminus[0,1]$ に対して,

$$\begin{aligned}&\prod_{s=1}^r \frac{\Gamma(\alpha_0-\beta_s+1)\Gamma(\beta_s-\alpha_s)}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_s+1)} f(z)\\ &= z^{-\alpha_0}\int_{(0,1)^r}(1-u_1\cdots u_r z^{-1})^{-\alpha_0}\prod_{s=1}^r u_s^{\alpha_0-\beta_s}(1-u_s)^{\beta_s-\alpha_s-1}\,du_s.\end{aligned} \tag{2.46}$$

議論を明確にするために,

$$\mathrm{Re}\,\alpha_0>r;\quad \mathrm{Re}\,\alpha_0>\mathrm{Re}\,\beta_s-1>\mathrm{Re}\,\alpha_s \quad (s=1,\ldots,r) \tag{2.47}$$

と仮定すると, Euler 積分表示が意味をもち, しかも (2.45) が成立する. Euler 積分表示に $(z-1)^{-\zeta-1}$ を乗じて積分する訳だが, 積分順序を交換して, z に関する積分を先に実行すると

$$\begin{aligned}&\int_1^\infty z^{-\alpha_0}(z-1)^{-\zeta-1}(1-u_1\cdots u_r z^{-1})^{-\alpha_0}dz\\&=\int_0^1 w^{\alpha_0+\zeta-1}(1-w)^{-\zeta-1}(1-u_1\cdots u_r w)^{-\alpha_0}dw\quad(z=1/w)\end{aligned}\tag{2.48}$$

従って

$$\begin{aligned}&\prod_{s=1}^r\frac{\Gamma(\alpha_0-\beta_s+1)\Gamma(\beta_s-\alpha_s)}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_s+1)}\widehat{f}(\zeta)\\&=\int_{(0,1)^r}\prod_{s=1}^r u_s^{\alpha_0-\beta_s}(1-u_s)^{\beta_s-\alpha_s-1}\,du_s\int_{(0,1)}w^{\alpha_0+\zeta-1}(1-w)^{-\zeta-1}(1-u_1\cdots u_r w)^{-\alpha_0}dw\end{aligned}\tag{2.49}$$

再び Euler 積分表示によって

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\zeta)&=\frac{\Gamma(-\zeta)\Gamma(\alpha_0+\zeta)}{\Gamma(\alpha_0)}{}_{r+2}F_{r+1}\left[\begin{matrix}\alpha_0+\zeta,\alpha_0,\alpha_0-\beta_1+1,\ldots,\alpha_0-\beta_r+1\\\alpha_0,\alpha_0-\alpha_1+1,\ \ldots,\ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix};1\right]\\&=\frac{\Gamma(-\zeta)\Gamma(\alpha_0+\zeta)}{\Gamma(\alpha_0)}{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0+\zeta,\alpha_0-\beta_1+1,\ldots,\alpha_0-\beta_r+1\\\alpha_0-\alpha_1+1,\ \ldots,\ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix};1\right]\end{aligned}\tag{2.50}$$

を得る. この表示式は,

$$-\mathrm{Re}\,\alpha_0<\mathrm{Re}\,\zeta<\min\{\,\mathrm{Re}\,\rho,\ 0\,\}\tag{2.51}$$

なる帯状領域で正則な表示となっていることに注意しておこう. $\widehat{f}(\zeta)$ はパラメータ α_s,β_s に正則に依存するので, この表示は, 条件 (2.45) が成立する限り意味をもつものである. 解析接続の定理 1.5 によれば, $\widehat{f}(\zeta)$ は $\mathbb{C}$ 全体に有理型に解析接続され, その極の位置は, 左半平面では

$$\zeta=-\alpha_0-k\quad(k=0,1,2,\ldots)\tag{2.52}$$

右半平面では

$$\zeta=k,\ \rho+k\qquad(k=0,1,2,\ldots)\tag{2.53}$$

に限ることが分かる. 特に $\rho\notin\mathbb{Z}$ のもとでは,

$${}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0+\zeta,\alpha_0-\beta_1+1,\ldots,\alpha_0-\beta_r+1\\\alpha_0-\alpha_1+1,\ \ldots,\ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix};1\right]\tag{2.54}$$

は ζ の函数として $\mathbb{C}$ 上に有理型に解析接続され, その極は $\zeta=\rho+k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ のみにしか現れないことも分かる.

まず左半平面の極に注目しよう: $k=0,1,2,\ldots$ に対して

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}\left(\widehat{f}(\zeta)(z-1)^\zeta d\zeta;\zeta=-\alpha_0-k\right)\\&=(-1)^k(z-1)^{-\alpha_0-k}\frac{(\alpha_0)_k}{k!}{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}-k,\alpha_0-\beta_1+1,\ldots,\alpha_0-\beta_r+1\\\alpha_0-\alpha_1+1,\ \ldots,\ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix};1\right].\end{aligned}\tag{2.55}$$

(右辺は有限級数である.) 従って定理 1.6 から $z \in (1,\infty)$, $z \to \infty$ のとき $f(z)$ は

$$f(z) \sim (z-1)^{-\alpha_0}\sum_{k=0}^{\infty}(1-z)^{-k}\frac{(\alpha_0)_k}{k!}{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}-k,\alpha_0-\beta_1+1,\ldots,\alpha_0-\beta_r+1\\ \alpha_0-\alpha_1+1,\ \ldots,\ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix};1\right] \tag{2.56}$$

と漸近展開される. 確定特異点で考えているので, 右辺は収束し, 上記の式は

$$\begin{aligned}&z^{-\alpha_0}{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_0-\beta_1+1,\ldots,\alpha_0-\beta_r+1\\ \alpha_0-\alpha_1+1,\ \ldots,\ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix};z^{-1}\right]\\ &=(z-1)^{-\alpha_0}\sum_{k=0}^{\infty}(1-z)^{-k}\frac{(\alpha_0)_k}{k!}{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}-k,\alpha_0-\beta_1+1,\ldots,\alpha_0-\beta_r+1\\ \alpha_0-\alpha_1+1,\ \ldots,\ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix};1\right]\end{aligned} \tag{2.57}$$

なる展開公式の成立を意味する. 変数を取り替えて書き直すと, これは恒等式

$$(1-z)^{\alpha_0}{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ldots,\beta_r\end{matrix};z\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0)_k}{k!}{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}-k,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ldots,\beta_r\end{matrix};1\right]\left(\frac{z}{z-1}\right)^k \tag{2.58}$$

あるいは同じことだが

$${}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ldots,\beta_r\end{matrix};\frac{z}{z-1}\right]=(1-z)^{\alpha_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0)_k}{k!}{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}-k,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ldots,\beta_r\end{matrix};1\right]z^k \tag{2.59}$$

を意味する. $r=1$ の場合には, この公式は Kummer の公式

$$(1-z)^{\alpha_0}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha_0,\ \alpha_1\\ \beta_1\end{matrix};z\right]={}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha_0,\ \beta_1-\alpha_1\\ \beta_1\end{matrix};\frac{z}{z-1}\right] \tag{2.60}$$

を再現する.

次に, $\widehat{f}(\zeta)$ の右半平面の極に注目しよう. $f(z)$ は $z=1$ の近傍で

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-1)^k+(z-1)^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-1)^k \tag{2.61}$$

と表示される訳だが, 漸近展開定理はその係数が

$$\begin{aligned}-\mathrm{Res}\left(\widehat{f}(\zeta)(z-1)^{\zeta}d\zeta;\zeta=k\right)&=a_k(z-1)^k\\ -\mathrm{Res}\left(\widehat{f}(\zeta)(z-1)^{\zeta}d\zeta;\zeta=\rho+k\right)&=b_k(z-1)^{\rho+k}\end{aligned} \tag{2.62}$$

なる関係で決まることを意味している. $f(z)$ の Mellin 変換は

$$\widehat{f}(\zeta)=\frac{\Gamma(-\zeta)\Gamma(\alpha_0+\zeta)}{\Gamma(\alpha_0)}{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0+\zeta,\alpha_0-\beta_1+1,\ldots,\alpha_0-\beta_r+1\\ \alpha_0-\alpha_1+1,\ \ldots,\ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix};1\right] \tag{2.63}$$

なので, 正則成分については

$$a_k=(-1)^k\frac{(\alpha_0)_k}{k!}{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0+k,\alpha_0-\beta_1+1,\ldots,\alpha_0-\beta_r+1\\ \alpha_0-\alpha_1+1,\ \ldots,\ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix};1\right] \tag{2.64}$$

($\rho \notin \mathbb{Z}$ と仮定しているので, $\zeta = k$ は, $\widehat{f}(\zeta)$ の ${}_{r+1}F_r$ 成分の正則点である.) 一方, 非正則成分については

$$b_k = -\frac{\Gamma(-\rho-k)\Gamma(\alpha_0+\rho+k)}{\Gamma(\alpha_0)} \cdot \mathrm{Res}\left({}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0+\zeta, \alpha_0-\beta_1+1, \ldots, \alpha_0-\beta_r+1 \\ \alpha_0-\alpha_1+1, \ \ldots, \ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix}; 1\right] d\zeta; \zeta = \rho+k\right) \tag{2.65}$$

ということになる. 特に

$$b_0 = -\frac{\Gamma(-\rho)\Gamma(\alpha_0+\rho)}{\Gamma(\alpha_0)} \cdot \mathrm{Res}\left({}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0+\zeta, \alpha_0-\beta_1+1, \ldots, \alpha_0-\beta_r+1 \\ \alpha_0-\alpha_1+1, \ \ldots, \ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix}; 1\right] d\zeta; \zeta = \rho\right) \tag{2.66}$$

この b_0 の値は第 2.3 節の議論から (も) 分かる. 実際 $\rho < 0$ とするとき

$$\begin{aligned} b_0 &= \lim_{z\downarrow 1}(z-1)^{-\rho} f(z) \\ &= \lim_{z\downarrow 1}(z-1)^{-\rho} z^{-\alpha_0} {}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0, \alpha_0-\beta_1+1, \ldots, \alpha_0-\beta_r+1 \\ \alpha_0-\alpha_1+1, \ \ldots, \ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix}; z^{-1}\right] \\ &= \lim_{z\uparrow 1}(1-z)^{-\rho} z^{\alpha_0+\rho} {}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0, \alpha_0-\beta_1+1, \ldots, \alpha_0-\beta_r+1 \\ \alpha_0-\alpha_1+1, \ \ldots, \ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix}; z\right] \\ &= \frac{\Gamma(-\rho)}{\Gamma(\alpha_0)} \prod_{s=1}^{r} \frac{\Gamma(\alpha_0-\alpha_s+1)}{\Gamma(\alpha_0-\beta_s+1)} \end{aligned} \tag{2.67}$$

である. 従って

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}\left({}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0+\zeta, \alpha_0-\beta_1+1, \ldots, \alpha_0-\beta_r+1 \\ \alpha_0-\alpha_1+1, \ \ldots, \ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix}; 1\right] d\zeta; \zeta = \rho\right) \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha_0+\rho)} \prod_{s=1}^{r} \frac{\Gamma(\alpha_0-\alpha_s+1)}{\Gamma(\alpha_0-\beta_s+1)}. \end{aligned} \tag{2.68}$$

標準的なパラメータで書けば, これは

$$\mathrm{Res}\left({}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\zeta, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \\ \beta_1, \ \ldots, \ \beta_r\end{matrix}; 1\right] d\zeta; \zeta = \sum_{s=1}^{r}(\beta_s-\alpha_s)\right) = -\frac{1}{\Gamma(\sum_{s=1}^{r}(\beta_s-\alpha_s))} \prod_{s=1}^{r} \frac{\Gamma(\beta_s)}{\Gamma(\alpha_s)}. \tag{2.69}$$

を意味する.

2.6 $z = \infty$ から $z = 1$ への接続 (その 2): $z = 1$ の周りの解の記述

前項で見たように, $z = \infty$ の近傍での標準解

$$f(z) = z^{-\alpha_0} F_0^{(\infty)}(z) = z^{-\alpha_0} {}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0, \alpha_0-\beta_1+1, \ldots, \alpha_0-\beta_r+1 \\ \alpha_0-\alpha_1+1, \ \ldots, \ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix}; z^{-1}\right] \tag{2.70}$$

の区間 $(1,\infty)$ に関する Mellin 変換は

$$\widehat{f}(\zeta)=\frac{\Gamma(-\zeta)\Gamma(\alpha_0+\zeta)}{\Gamma(\alpha_0)}{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0+\zeta,\alpha_0-\beta_1+1,\ldots,\alpha_0-\beta_r+1\\ \alpha_0-\alpha_1+1,\ \ldots,\ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix};1\right] \tag{2.71}$$

であり, $f(z)$ を $(1,\infty)$ にそって解析接続したときの, $z=1$ の周りの非正則成分は, $\widehat{f}(\zeta)$ から展開式

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-1)^{\rho+k}=-\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{Res}\left(\widehat{f}(\zeta)(z-1)^{\zeta}\,d\zeta;\zeta=\rho+k\right) \tag{2.72}$$

で求められる.

そこで, $\widehat{f}(\zeta)$ の $\zeta=\rho+k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ の周りの挙動を解析することを考えよう. $\widehat{f}(\zeta)$ の積分表示に注目する:

$$\begin{aligned}\psi(\zeta)&=\widehat{f}(\zeta)\frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha_0+\zeta)\Gamma(-\zeta)}\prod_{i=1}^{r}\frac{\Gamma(\alpha_0-\beta_i+1)\Gamma(\beta_i-\alpha_i)}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_i+1)}\\&=\int_{(0,1)^r}(1-u_1\cdots u_r)^{-\alpha_0-\zeta}\prod_{i=1}^{r}u_i^{\alpha_0-\beta_i}(1-u_i)^{\beta_i-\alpha_i-1}du_i\\&=\int_{0<t_1<\cdots<t_r<1}(1-t_1)^{-\alpha_0-\zeta}\prod_{i=1}^{r}t_i^{\alpha_{i-1}-\beta_i}(t_{i+1}-t_i)^{\beta_i-\alpha_i-1}dt_i\end{aligned} \tag{2.73}$$

ここで $t_{r+1}=1$ と記した. 第 2 の表示において, 各 $t_i=1-s_i$ と反転させて

$$\psi(\zeta)=\int_{1>s_1>\cdots>s_r>0}s_1^{-\alpha_0-\zeta}\prod_{i=1}^{r}(1-s_i)^{\alpha_{i-1}-\beta_i}(s_i-s_{i+1})^{\beta_i-\alpha_i-1}ds_i \tag{2.74}$$

とし, さらに

$$s_1=v_1,\quad s_2=v_1v_2,\quad \ldots,s_r=v_1\cdots v_r \tag{2.75}$$

と変換すると

$$\begin{aligned}\psi(\zeta)=&\int_0^1 dv_1\,v_1^{\rho-\zeta-1}(1-v_1)^{\alpha_0-\beta_1}\\&\cdot\int_{(0,1)^{r-1}}\prod_{i=2}^{r}v_i^{\sum_{j=i}^{r}(\beta_j-\alpha_j)-1}(1-v_i)^{\beta_{i-1}-\alpha_{i-1}}(1-v_1v_2\cdots v_i)^{\alpha_{i-1}-\beta_i}dv_i\end{aligned} \tag{2.76}$$

を得る. この積分表示は

$$\mathrm{Re}\,\zeta<\mathrm{Re}\,\rho;\quad \mathrm{Re}\,\alpha_0>\mathrm{Re}\,\beta_1>\mathrm{Re}\,\alpha_1>\mathrm{Re}\,\beta_2>\cdots>\mathrm{Re}\,\beta_r>\mathrm{Re}\,\alpha_r \tag{2.77}$$

の下で意味をもち, $\psi(\zeta)$ は $\mathrm{Re}\,\zeta<\mathrm{Re}\,\rho$ で正則となっている. 今 $v_1=0$ の近傍で特異性を生じる因子は $v_1^{\rho-\zeta-1}$ だけあり, $(1-v_1)^{\alpha_0-\beta_1}$ 以下の部分は v_1 の函数として $v_1=0$ の近傍で正則である. そこで, $v_1=0$ の周りで積分を正則化すると

$$\begin{aligned}\psi(\zeta)=&\frac{1}{e^{2\pi\sqrt{-1}(\rho-\zeta)}-1}\int_C dv_1\,v_1^{\rho-\zeta-1}(1-v_1)^{\alpha_0-\beta_1}\\&\cdot\int_{(0,1)^{r-1}}\prod_{i=2}^{r}v_i^{\sum_{j=i}^{r}(\beta_j-\alpha_j)-1}(1-v_i)^{\beta_{i-1}-\alpha_{i-1}}(1-v_1v_2\cdots v_i)^{\alpha_{i-1}-\beta_i}dv_i\end{aligned} \tag{2.78}$$

ここで, C は v_1 平面上で, 1 を出発して実軸上を負方向に進み $\varepsilon > 0$ に達したところで原点を正方向に一周し, 再び実軸上を正方向に ε から 1 に進む経路である. この表示から, $\psi(\zeta)$ は $\zeta = \rho + k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ に高々 1 位の極をもつ以外は正則であることがわかる. そこで留数を見ると

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{Res}(\psi(\zeta)d\zeta; \zeta = \rho + k) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|v_1|=\varepsilon} dv_1\, v_1^{-k-1}(1-v_1)^{\alpha_0-\beta_1} \\
&\quad \cdot \int_{(0,1)^{r-1}} \prod_{i=2}^{r} v_i^{\sum_{j=i}^{r}(\beta_j-\alpha_j)-1}(1-v_i)^{\beta_{i-1}-\alpha_{i-1}}(1-v_1v_2\cdots v_i)^{\alpha_{i-1}-\beta_i} dv_i
\end{aligned} \tag{2.79}$$

これは $(1-v_1)^{\alpha_0-\beta_1}$ 以降を $v_1 = 0$ の周りで Taylor 展開したときの v_1^k の係数に他ならない. $k = 0$ のときは,

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{Res}(\psi(\zeta)d\zeta; \zeta = \rho) \\
&= \int_{(0,1)^{r-1}} \prod_{i=2}^{r} v_i^{\sum_{j=i}^{r}(\beta_j-\alpha_j)-1}(1-v_i)^{\beta_{i-1}-\alpha_{i-1}} dv_i \\
&= \prod_{i=2}^{r} \frac{\Gamma(\sum_{j=i}^{r}(\beta_j-\alpha_j))\Gamma(\beta_{i-1}-\alpha_{i-1})}{\Gamma(\sum_{j=i-1}^{r}(\beta_j-\alpha_j))} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{r}\Gamma(\beta_i-\alpha_i)}{\Gamma(\sum_{j=1}^{r}(\beta_j-\alpha_j))}
\end{aligned} \tag{2.80}$$

となる. 一般の k の場合は,

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{Res}(\psi(\zeta)d\zeta; \zeta = \rho) \\
&= \prod_{i=2}^{r} \frac{\Gamma(\sum_{j=i}^{r}(\beta_j-\alpha_j))\Gamma(\beta_{i-1}-\alpha_{i-1})}{\Gamma(\sum_{j=i-1}^{r}(\beta_j-\alpha_j))} \\
&\quad \cdot \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_r=k} \prod_{i=1}^{r} \frac{(\alpha_{i-1}-\beta_i)_{\nu_i}}{\nu_i!} \prod_{i=2}^{r} \frac{(\sum_{j=i}^{r}(\beta_j-\alpha_j))_{\nu_i+\cdots+\nu_r}}{(\sum_{j=i-1}^{r}(\beta_j-\alpha_j))_{\nu_i+\cdots+\nu_r}}
\end{aligned} \tag{2.81}$$

である. これから $\widehat{f}(\zeta)$ の留数は

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{Res}(\widehat{f}(\zeta)d\zeta; \zeta = \rho + k) \\
&= (-1)^k \frac{\Gamma(-\rho)\prod_{i=1}^{r}\Gamma(\alpha_0-\alpha_i+1)}{\Gamma(\alpha_0)\prod_{i=1}^{r}\Gamma(\alpha_0-\beta_i+1)} \\
&\quad \cdot \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_r=k} \prod_{i=1}^{r} \frac{(\alpha_{i-1}-\beta_i)_{\nu_i}}{\nu_i!} \prod_{i=1}^{r} \frac{(\sum_{j=i}^{r}(\beta_j-\alpha_j))_{\nu_i+\cdots+\nu_r}}{(\sum_{j=i-1}^{r}(\beta_j-\alpha_j))_{\nu_i+\cdots+\nu_r}}
\end{aligned} \tag{2.82}$$

と決定される. これは $f(z)$ の, $z = 1$ の周りの非正則成分の展開公式

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(-\rho)\prod_{i=1}^{r}\Gamma(\alpha_0-\alpha_i+1)}{\Gamma(\alpha_0)\prod_{i=1}^{r}\Gamma(\alpha_0-\beta_i+1)}(z-1)^{\rho} \\
&\cdot \sum_{k=0}^{\infty}(1-z)^k \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_r=k} \prod_{i=1}^{r} \frac{(\alpha_{i-1}-\beta_i)_{\nu_i}}{\nu_i!} \prod_{i=1}^{r} \frac{(\sum_{j=i}^{r}(\beta_j-\alpha_j))_{\nu_i+\cdots+\nu_r}}{(\sum_{j=i-1}^{r}(\beta_j-\alpha_j))_{\nu_i+\cdots+\nu_r}}
\end{aligned} \tag{2.83}$$

を意味する. $\sum_{k=0}^{\infty}$ 以降の級数部分を $F_r^{(1)}(z)$ と書けば, $w=1-z$ について

$$F_r^{(1)}(z) = \frac{\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(1-\alpha_0)\prod_{i=1}^{r}\Gamma(\beta_i-\alpha_i)} \cdot\int_{(0,1)^r}\prod_{i=1}^{r} u_i^{\sum_{j=i}^{r}(\beta_j-\alpha_j)-1}(1-u_i)^{\beta_{i-1}-\alpha_{i-1}-1}(1-w\,u_1\cdots u_i)^{\alpha_{i-1}-\beta_i}du_i \tag{2.84}$$

と表されることも注意しておこう. この積分表示は

$$1 > \mathrm{Re}\,\alpha_0 > \mathrm{Re}\,\beta_1 > \mathrm{Re}\,\alpha_1 > \cdots > \mathrm{Re}\,\beta_r > \mathrm{Re}\,\alpha_r \tag{2.85}$$

で意味をもつ.

定理 2.3 $\rho \notin \mathbb{Z}$ のとき, $z=1$ の近傍での非正則解を

$$f_r^{(1)}(z) = (z-1)^{\rho}\,F_r^{(1)}(z);\quad F_r^{(1)}(z) \text{ は } z=1 \text{ の近傍で正則かつ } F_r^{(1)}(1)=1 \tag{2.86}$$

と規格化する. このとき

$$\begin{aligned} F_r^{(1)}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(1-z)^k \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_r=k}\prod_{i=1}^{r}\frac{(\alpha_{i-1}-\beta_i)_{\nu_i}}{\nu_i!}\prod_{i=1}^{r}\frac{(\sum_{j=i}^{r}(\beta_j-\alpha_j))_{\nu_i+\cdots+\nu_r}}{(\sum_{j=i-1}^{r}(\beta_j-\alpha_j))_{\nu_i+\cdots+\nu_r}} \\ &= \frac{\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(1-\alpha_0)\prod_{i=1}^{r}\Gamma(\beta_i-\alpha_i)} \\ &\quad \cdot\int_{(0,1)^r}\prod_{i=1}^{r} u_i^{\sum_{j=i}^{r}(\beta_j-\alpha_j)-1}(1-u_i)^{\beta_{i-1}-\alpha_{i-1}-1}(1-(1-z)\,u_1\cdots u_i)^{\alpha_{i-1}-\beta_i}du_i \end{aligned} \tag{2.87}$$

$z=1$ の周りの非正則解 $f_r^{(1)}(z)$ の級数表示については, 上記の級数と本質的に同じものが, Winkler [17], Nørlund [10] にある. 積分表示については, Winkler [17] では 1 変数の積分を使って帰納的に構成している. 上記の積分表示は, ${}_3F_2$ の場合に三町 [7] で用いられているものの ${}_{r+1}F_r$ 版である.

定理 2.4 非整数条件 (2.5) の下で, $z=\infty$ の近傍の標準的な解 $f_j^{(\infty)}(z)=z^{-\alpha_j}F_j^{(\infty)}(z)$ を実区間 $(1,\infty)$ に沿って解析接続し, $z=1$ の近傍において

$$z^{-\alpha_j}F_j^{(\infty)}(z)=H_j(z)+(z-1)^{\rho}F_r^{(1)}(z)\,C_{rj}^{(1\infty)};\quad H_j(z)\text{ は }z=1\text{ の近傍で正則} \tag{2.88}$$

と表示する $(j=0,1,\ldots,r)$. このとき

$$\begin{aligned} H_j(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(1-z)^k\frac{(\alpha_j)_k}{k!}\,{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_j+k,\alpha_j-\beta_1+1,\ldots,\alpha_j-\beta_r+1\\ \alpha_j-\alpha_0+1,\ \ldots,\ \alpha_j-\alpha_r+1\end{matrix};1\right], \\ C_{rj}^{(1\infty)} &= \frac{\Gamma(-\rho)\prod_{0\le s\le r;s\ne j}\Gamma(\alpha_j-\alpha_s+1)}{\prod_{0\le s\le r}\Gamma(\alpha_j-\beta_s+1)}\qquad (j=0,1,\ldots,r). \end{aligned} \tag{2.89}$$

2.7 $z=1$ から $z=\infty$ への接続

定理 2.3 のように, $z=1$ の周りの非正則な解 $f_r^{(1)}(z)=(z-1)^{\rho}F_r^{(1)}(z)$ の具体形が分かったので, 今度は $z=1$ から $z=\infty$ への接続問題を考えよう.

$f(z)=(z-1)^{\rho}F_r^{(1)}(z)$ とおいて, $f(z)$ の区間 $(1,\infty)$ 上の Mellin 変換を考える.

$$\widehat{f}(\zeta)=\int_1^{\infty}F_r^{(1)}(z)(z-1)^{\rho-\zeta-1}dz=\int_0^{\infty}F_r^{(1)}(1+w)w^{\rho-\zeta-1}dw \tag{2.90}$$

定理 2.3 の積分表示を用いると

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= \widehat{f}(\zeta)\,\frac{\Gamma(1-\alpha_0)\prod_{i=1}^{r}\Gamma(\beta_i-\alpha_i)}{\Gamma(1+\rho)} \\ &= \int_0^{\infty}dw\,w^{\rho-\zeta-1}\int_{(0,1)^r}\prod_{i=1}^{r}u_i^{\sum_{j=i}^{r}(\beta_j-\alpha_j)-1}(1-u_i)^{\beta_{i-1}-\alpha_{i-1}-1}(1+w\,u_1\cdots u_i)^{\alpha_{i-1}-\beta_i}du_i \end{aligned} \tag{2.91}$$

$w=w'/u_1\cdots u_r$ と変数変換を行うと, この積分は

$$\psi(\zeta)=\int_0^{\infty}dw\,w^{\rho-\zeta-1}\int_{(0,1)^r}\prod_{i=1}^{r}u_i^{\zeta+\alpha_{i-1}-1}(1-u_i)^{\beta_{i-1}-\alpha_{i-1}-1}(w+u_{i+1}\cdots u_r)^{\alpha_{i-1}-\beta_i}du_i \tag{2.92}$$

さらに $w=(1-w')/w'$ と変換すると

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= \int_0^1 dw\,w^{\zeta+\alpha_r-1}(1-w)^{\rho-\zeta-1} \\ &\cdot\int_{(0,1)^r}\prod_{i=1}^{r}u_i^{\zeta+\alpha_{i-1}-1}(1-u_i)^{\beta_{i-1}-\alpha_{i-1}-1}(1+w(1-u_{i+1}\cdots u_r))^{\alpha_{i-1}-\beta_i}du_i \end{aligned} \tag{2.93}$$

$f_r^{(1)}(z)=(z-1)^\rho F_r^{(1)}(z)$ を実区間 $(1,\infty)$ に沿って解析接続し, $z=\infty$ の近傍で

$$(z-1)^\rho F_r^{(1)}(z)=\sum_{i=0}^{r} z^{-\alpha_0}\,F_i^{(\infty)}(z)\,C_{ir}^{(\infty 1)} \tag{2.94}$$

と表すとき, $C_{ir}^{(\infty 1)}$ は

$$C_{ir}^{(\infty 1)}=\mathrm{Res}(\hat{f}(\zeta)d\zeta;\zeta=-\alpha_i)=\frac{\Gamma(1+\rho)}{\prod_{s=0}^{r}\Gamma(\beta_s-\alpha_s)}\mathrm{Res}(\psi(\zeta)d\zeta;\zeta=-\alpha_i) \tag{2.95}$$

で与えられるのであった. 今, 極 $\zeta=-\alpha_r$ に注目して, $\psi(\zeta)$ の積分表示 (2.93) の $\zeta=-\alpha_r$ の近傍での挙動を見よう. $\zeta=-\alpha_r$ で積分に特異性が生じるのは $w^{\zeta+\alpha_r-1}$ の部分だけなので, w に関する積分を $w=0$ の周りで正則化して考えれば

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}(\psi(\zeta)d\zeta;\zeta=-\alpha_r)\\
&=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|w|=\epsilon}dw\,w^{-1}(1-w)^{\rho+\alpha_r-1}\\
&\cdot\int_{(0,1)^r}\prod_{i=1}^{r}u_i^{-\alpha_r+\alpha_{i-1}-1}(1-u_i)^{\beta_{i-1}-\alpha_{i-1}-1}(1+w(1-u_{i+1}\cdots u_r))^{\alpha_{i-1}-\beta_i}du_i\\
&=\int_{(0,1)^r}\prod_{i=1}^{r}u_i^{-\alpha_r+\alpha_{i-1}-1}(1-u_i)^{\beta_{i-1}-\alpha_{i-1}-1}\,du_i\\
&=\prod_{s=0}^{r-1}\frac{\Gamma(\alpha_s-\alpha_r)\Gamma(\beta_s-\alpha_s)}{\Gamma(\beta_s-\alpha_r)}
\end{aligned} \tag{2.96}$$

を得る. 従って

$$C_{rr}^{(\infty 1)}=\frac{\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(\beta_r-\alpha_r)}\prod_{s=0}^{r-1}\frac{\Gamma(\alpha_s-\alpha_r)}{\Gamma(\beta_s-\alpha_r)}. \tag{2.97}$$

パラメータについての対称性から, $i=0,1,\ldots,r$ に対して

$$C_{ir}^{(\infty 1)}=\frac{\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(\beta_i-\alpha_i)}\prod_{0\le s\le r;s\ne i}\frac{\Gamma(\alpha_s-\alpha_i)}{\Gamma(\beta_s-\alpha_i)}=\frac{\Gamma(1+\rho)\prod_{0\le s\le r;s\ne i}\Gamma(\alpha_s-\alpha_i)}{\prod_{0\le s\le r}\Gamma(\beta_s-\alpha_i)} \tag{2.98}$$

である.

定理 2.5 非整数性の条件 (2.5) の下で. $z=1$ の周りの非正則解 $f_r^{(1)}(z)=(z-1)^\rho F_r^{(1)}(z)$ を実区間 $(1,\infty)$ に沿って解析接続し, $z=\infty$ の近傍で

$$(z-1)^\rho F_r^{(1)}(z)=\sum_{i=0}^{r} z^{-\alpha_0}\,F_i^{(\infty)}(z)\,C_{ir}^{(\infty 1)} \tag{2.99}$$

と表す. このときの接続係数は

$$C_{ir}^{(\infty 1)}=\frac{\Gamma(1+\rho)\prod_{0\le s\le r; s\ne i}\Gamma(\alpha_s-\alpha_i)}{\prod_{0\le s\le r}\Gamma(\beta_s-\alpha_i)}\qquad (i=0,1,\ldots,r) \tag{2.100}$$

で与えられる.

2.8 幾つかの註釈

既に定理 2.2 で見たように, $z=0$ の周りの標準的な解と $z=\infty$ の周りの標準的な解を繋ぐ接続公式については, 全ての接続係数がガンマ函数を用いて明示的に表される. そこで $z=1$ の周りの解と $z=0$ または $z=\infty$ の周りの解を繋ぐ接続公式をもう少し詳しく見てみよう. 座標の取り方の依存する部分は, 両者に若干違いがあるが, 今は $z=1$ と $z=\infty$ で考えることにする.

定理 2.4 では,

$$z^{-\alpha_j}F_j^{(\infty)}(z)=H_j(z)+(z-1)^\rho\,F_r^{(1)}(z)\,C_{rj}^{(1\infty)};\quad H_j(z)\ \text{は}\ z=1\ \text{の近傍で正則} \tag{2.101}$$

$(j=0,1,\ldots,r)$ と書き, $H_j(z)$ の明示的な公式

$$H_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(1-z)^k\frac{(\alpha_j)_k}{k!}\,{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_j+k,\alpha_j-\beta_1+1,\ldots,\alpha_j-\beta_r+1\\ \alpha_j-\alpha_0+1,\ \ldots,\ \alpha_j-\alpha_r+1\end{matrix};1\right] \tag{2.102}$$

を与えた. ここでは, 例えば, $z=1$ の周りの解として

$$\begin{aligned} f_i^{(1)}(z)&=F_i^{(1)}(z)=\tfrac{1}{i!}(z-1)^i+O((z-1)^r)\qquad (i=0,1,\ldots,r-1)\\ f_r^{(1)}(z)&=(z-1)^\rho F_r^{(1)}(z),\quad F_r^{(1)}(z)=1+O((z-1)) \end{aligned} \tag{2.103}$$

(座標に依存するので作為的に見えるかもしれないが, もともと r 個の正則解を選ぶやり方は大きい自由度があるので, 考え方を明確にする為にこうする.) $z=\infty$ での標準的な解

$$f_j^{(\infty)}(z)=z^{-\alpha_j}F_j^{(\infty)}(z)\qquad (j=0,1,\ldots,r) \tag{2.104}$$

を実軸上の区間 $(1,\infty)$ にそって解析接続し,

$$f_j^{(\infty)}(z)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i^{(1)}(z)\,C_{ij}^{(1\infty)}\qquad (j=0,1,\ldots,r) \tag{2.105}$$

と表示する．上のように $z=1$ の周りの解を指定すると，この場合の接続係数は，上から r 行の $i=0,1,\ldots,r-1$ については

$$C_{ij}^{(1\infty)}=(-1)^i(\alpha_j)_i\ {}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_j+i,\alpha_j-\beta_1+1,\ldots,\alpha_j-\beta_r+1\\ \alpha_j-\alpha_0+1,\ \ldots,\ \alpha_j-\alpha_r+1\end{matrix};1\right] \tag{2.106}$$

最下行の $i=r$ については

$$C_{rj}^{(1\infty)}=\frac{\Gamma(-\rho)\prod_{0\le s\le r;s\ne j}\Gamma(\alpha_j-\alpha_s+1)}{\prod_{0\le s\le r}\Gamma(\alpha_j-\beta_s+1)}\qquad(j=0,1,\ldots,r). \tag{2.107}$$

である．モノドロミーの固有値に重複が生じるような場合には，接続係数は最早ガンマ函数 (1 階の差分方程式の解として定義される函数) では表せないのが一般的な状況であろう．注目したいのは，上記のような例では，そのような場合の接続係数として，「一般超幾何函数 ${}_{r+1}F_r$ の $z=1$ での値をパラメータの函数と見たもの」が自然に現れるということである．この函数は，差分方程式で特徴付けられる函数の中でも，ガンマ函数の 1 つ上の階層に属する重要な特殊函数と位置づけるべきものであろう．

第 2.5 節の議論に戻って考えると，$f(z)=z^{-\alpha_0}F_0^{(\infty)}(z)$ の，区間 $(1,\infty)$ に沿う Mellin 変換は

$$\widehat{f}(\zeta)=\frac{\Gamma(-\alpha_0)\Gamma(\alpha_0+\zeta)}{\Gamma(\alpha_0)}{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0+\zeta,\alpha_0-\beta_1+1,\ldots,\alpha_0-\beta_r+1\\ \alpha_0-\alpha_1+1,\ \ldots,\ \alpha_0-\alpha_r+1\end{matrix};1\right] \tag{2.108}$$

で与えられ，全 ζ 平面に有理型に解析接続される．接続係数 $C_{i0}^{(1\infty)}$ $(i=0,1,\ldots,r-1)$ ($z=1$ での正則成分の展開係数) は，$\widehat{f}(\zeta)$ の正則点 $\zeta=0,1,2,\ldots$ での特殊値に由来するものであり，$z=1$ での非正則成分の展開係数は，$\widehat{f}(\zeta)$ の極 $\zeta=\rho+k$ $(k=0,1,\ldots)$ における留数に由来するものであった (第 2.6 節でその値を具体的に決定した)．$\widehat{f}(\zeta)$ の虚軸方向の増大度についても，我々は Mellin 変換を通じて知っている訳である．

$\rho=\sum_{i=1}^r\beta_i-\sum_{i=0}^r\alpha_i$ とおくと，$\mathrm{Re}(\rho)>0$ の下では，パラメータの有理型函数

$${}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_r\end{matrix};1\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0)_k(\alpha_1)_k\cdots(\alpha_r)_k}{k!\,(\beta_1)_k\cdots(\beta_r)_k}\qquad(\mathrm{Re}(\rho)>0) \tag{2.109}$$

が定義され，半平面 $\mathrm{Re}(\rho)<0$ では自明な 1 位の極 $\beta_i=0,-1,-2,\ldots$ $(i=1,\ldots,r)$ を除いて正則である．実際には，この函数 (2.109) は，パラメータ空間 $\mathbb{C}^{2r+1}$ 全体に有理型に解析接続される．その際に生じる極 $\rho=0,1,2,\ldots$ とそこでの留数は接続問題を考える上で重要な役割を担っている．この意味で，「一般超幾何函数 ${}_{r+1}F_r$ の $z=1$ での値をパラメータの函数と見たもの」の，$\mathbb{C}^{2r+1}$ 上の有理型函数としての大域的な性質を理解することは重要な課題であると思う．

Gauss の超幾何函数 ${}_2F_1$ の場合には，Euler の変換公式

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};z\right]=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\gamma-\alpha,\gamma-\beta\\ \gamma\end{matrix};z\right] \tag{2.110}$$

が, この種の解析接続に関連していて, 左辺の $\rho=\gamma-\alpha-\beta$ に対して, 右辺の対応するパラメータは $\widetilde{\rho}=-\gamma+\alpha+\beta=-\rho$ である. $\mathrm{Re}(\rho)>0$ のとき $z\uparrow 1$ での極限 (補題 2.1) から Gauss の和公式

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \tag{2.111}
$$

が生じる ($\rho=\gamma-\alpha-\beta=0,-1,-2,\ldots$ が 1 位の極となっていることに注意). ${}_{r+1}F_r$ の場合でも, これと同様の意味で ρ に関する解析接続を明示的に記述することが可能である. 詳細は別の機会に譲るとして, 参考のためその概要だけを述べて終わりにする. 梶原の変換公式 [2] の特殊な場合から, 一般超幾何函数 ${}_{r+1}F_r$ に対する次のような Euler 変換公式を導くことができる:

$$
\begin{aligned}
{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_r\end{matrix};z\right]&=\frac{(1-z)^{\rho}}{\Delta(\beta_r,\ldots,\beta_2,\beta_1)}\cdot\\
&\cdot\det\left((\beta_j-\alpha_0)_{i-1}\,{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\beta_j-\alpha_0+i-1,\beta_j-\alpha_1,\ldots,\beta_j-\alpha_r\\ \beta_j,\ \beta_j-\beta_1+1,\ldots,\beta_j-\beta_r+1\end{matrix};z\right]\right)_{i,j=1}^{r}
\end{aligned} \tag{2.112}
$$

ここで $\Delta(\beta_r,\ldots,\beta_1)=\prod_{1\le i<j\le r}(\beta_j-\beta_i)$ は差積を表す. $0<\mathrm{Re}(\rho)<1$ とすると, 両辺で $z\uparrow 1$ の極限をとることができて, 次の恒等式が得られる:

$$
\begin{aligned}
{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_r\end{matrix};1\right]&=\frac{\Gamma(\rho)}{\Delta(\beta_r,\ldots,\beta_2,\beta_1)}\cdot\\
&\cdot\det\begin{pmatrix}(\beta_j-\alpha_0)_{i-1}\,{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\beta_j-\alpha_0+i-1,\beta_j-\alpha_s\\ \beta_j,\ \beta_j-\beta_s+1\end{matrix}(s=1,\ldots,r);1\right]\\ \dfrac{\Gamma(\beta_j)\prod_{1\le k\le r;k\ne j}\Gamma(\beta_j-\beta_k+1)}{\prod_{0\le k\le r}\Gamma(\beta_j-\alpha_k)}\end{pmatrix}_{i,j=1}^{r}
\end{aligned} \tag{2.113}
$$

右辺の行列で, 上段は $i=1,\ldots,r-1$ 上側 $(r-1)$ 行の成分を表し, 下段は最下行 $i=r$ の成分を表す. 左辺の超幾何級数は $\mathrm{Re}(\rho)>0$ で収束し, 右辺の行列成分の超幾何級数は $\mathrm{Re}(\rho)<1$ で収束する. この意味で, この恒等式は ρ に関して右半平面と左半平面の解析接続を共通の帯状領域で記述したものになっている. 右辺の行列と, 上で述べた $z=\infty$ から $z=1$ への接続行列 $C^{(1\infty)}=\left(C_{ij}^{(1\infty)}\right)_{i,j=0}^{r}$ が殆ど同じ構造をしていることにも注意してほしい. (終)

参考文献

[1] 青本和彦・喜多通武:「超幾何関数論」シュプリンガー・フェアラーク東京, 1994. x+355 頁.

[2] Y. Kajihara: Euler transformation formula for multiple basic hypergeometric series of type A, Adv. Math. **187** (2004), 53–97.

[3] 川畑ユリ子:「3 個の特異点をもつ n 階 Fuchs 型微分方程式の接続問題」津田塾大学紀要 **8**(1976), 69–75;「同 II」津田塾大学紀要 **10**(1978), 45–55.

[4] T. Kawai: On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I A Math. **17** (1970), 467–517.

[5] 木村俊房・高野恭一：「関数論」新数学講座 7, 朝倉書店, 1991, 184 頁.

[6] M. Kohno: *Global Analysis in Linear Differential Equations*, Mathematics and its Applications **471**, Kluwer Academic Publishers, 1999, xvi+526 pp.

[7] K. Mimachi: Connection matrices associated with the generalized hypergeometric function ${}_3F_2$, Funkcial. Ekvac. **51**(2008), 107–133.

[8] 森本光生：「フーリエ変換と超函数」上智大学数学講究録 No.2, 1978, iv+177 頁.

[9] M. Morimoto and K. Yoshino: A uniqueness theorem for holomorphic functions of exponential type, Hokkaido Math. J. **7** (1978), 259–270.

[10] N.E. Nørlund: Hypergeometric functions, Acta Math. **94**(1955), 289–349.

[11] 大久保謙二郎: *On the Group of Fuchsian Equations*, 都立大学数学教室セミナー報告, 1987, iv+100 pp.

[12] 大久保謙二郎・河野実彦：「漸近展開」教育出版, 1976, 175 頁.

[13] K. Okubo, K. Takano and S. Yoshida: A connection problem for the generalized hypergeometric function, Funkcial. Ekvac. **31**(1988), 483–495.

[14] T. Yokoyama: On connection formula for a fourth order hypergeometric system, Hiroshima Math. J. **15** (1985), 297-320.

[15] T. Yokoyama: Characterization of connection coefficients for hypergeometric systems, Hiroshima Math. J. **17** (1987), 225-239.

[16] T. Yokoyama: On the structure of connection coefficients for hypergeometric system, Hiroshima Math. J. **18** (1985), 309-339.

[17] E. Winkler: Über die hypergeometrische Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit zwei endlichen singulären Punkten, Inaugural-Dissertation, München 1931