数理解析研究所講究録
第 1662 巻 2009 年 88-94

微分方程式の延長と middle convolution

熊本大学大学院自然科学研究科　原岡喜重* (Yoshishige Haraoka)
Department of Mathematics, Kumamoto University

1 Introduction

Fuchs 型方程式の研究において，middle convolution は重要な役割を果たしてきている．たとえば，rigid な Fuchs 型方程式は middle convolution と addition により必ず 1 階の方程式に帰着することが N. M. Katz により示されているし，non-rigid な Fuchs 型方程式については，その変形方程式が middle convolution で不変になることが示されている ([4])．微分方程式の変形理論というのは，微分方程式を特異点の位置も変数とすることで多変数の完全積分可能系に延長する話であるが，延長とその逆操作である制限を通して，常微分方程式と多変数の完全積分可能系を合わせて研究していくのは有望な方向のように思われる．本稿ではこのような方向性の中で，変形の意味を少し拡張することで，middle convolution もからめた新しい展開を見出そうとする試みについて述べる．

2 rigid な微分方程式と変形理論

$a_1, a_2, \ldots, a_p$ を $\mathbb{C}$ の異なる p 点，$A_1, A_2, \ldots, A_p$ を $n\times n$ 定数行列とする．階数 n の Fuchs 型方程式系

$$\frac{dU}{dx} = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{x-a_j}\right) U \tag{2.1}$$

を考える．$a_0 = \infty$, $A_0 = -\sum_{j=1}^{p} A_j$ とおく．$a_0, a_1, \ldots, a_p$ が (2.1) の確定特異点で，$x = a_j$ における留数行列が A_j である $(0 \le j \le p)$. (2.1) が rigid であるとは，留数行列の組 $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ が，それぞれの Jordan 標準形を指定することで，一斉相似変換を除いて一意的に決まることをいう．これは (2.1) のモノドロミーが，局所モノドロミーによって一意的に決まることと同等である．(2.1) に対する addition とは，ベキ関数を掛けるという gauge 変換

$$U(x) \mapsto \prod_{j=1}^{p} (x-a_j)^{\alpha_j} U(x)$$

*Supported by the JSPS grant-in-aid for scientific research B, No. 17340049

に対応し，また (2.1) に対する middle convolution とは，Riemann-Liouville 変換 (Euler 変換)

$$U(x) \mapsto \int_\Delta U(s)(s-x)^\lambda\, ds$$

に対応する操作である．これらの操作は rigidity 指数（アクセサリー・パラメーターの個数）を不変に保つ．

定理 1 ([8]) 既約，rigid な Fuchs 型方程式系は，addition と middle convolution を有限階施すことで，1 階の Fuchs 型方程式に帰着する．

アクセサリー・パラメーターは，存在するときには変形方程式の未知関数となる．addition と middle convolution が rigidity 指数を保つので，変形方程式にとっては未知関数の個数は保たれることになる．実は変形方程式自身も保たれることが分かる．

定理 2 ([4]) addition と middle convolution は，変形方程式を不変にする．

rigid な Fuchs 型方程式は，解の積分表示を持ち，それは具体的に構成することができる（[1], [3], [7], [5]）．1 つ例を見てみよう．階数 4 の Fuchs 型方程式系

$$\frac{dU}{dx} = \left(\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \frac{A_3}{x-a_3}\right) U \tag{2.2}$$

で，

$$A_1 \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 \sim \begin{pmatrix} \beta_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 \sim \begin{pmatrix} \beta_2 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_0 \sim -\begin{pmatrix} \rho_1 & & & \\ & \rho_2 & & \\ & & \rho_3 & \\ & & & \rho_4 \end{pmatrix}$$

となるものを考える．ただし

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4$$

である．この方程式を適当に変数変換すると，Appell の F_3 の 1 次元切り口になる．(2.2) は rigid であるので，解の積分表示を構成すると，

$$\begin{aligned} U(x) = \int_\Delta & \left(1 - \frac{x-a_1}{a_2-a_1} s_1\right)^{\rho_1} {s_1}^{-\rho_2} (1-s_1-s_2)^{\rho_2-\alpha_1} \\ & \times {s_2}^{\rho_1+\rho_2-\alpha_2-\beta_1} \left(1 - \frac{a_3-a_1}{a_3-a_2} s_2\right)^{\alpha_1+\beta_1-\rho_1-\rho_2} \vec{\eta}\, ds_1 \wedge ds_2 \end{aligned}$$

が得られる．ここで $\vec{\eta}$ は twisted cohomology を与える 4 ベクトルである．

この表示を見ると，独立変数の x と特異点の位置 a_1, a_2, a_3 は，同じ働きをしていることが分かる．これは rigid な方程式の解一般について言えることである．(解の積分表示 [5] から見て取れる.)

さて，Fuchs 型方程式 (2.1) の変形とは，(2.1) に加えて特異点の位置 a_j に関する微分方程式

$$\frac{\partial U}{\partial a_j} = B_j(x, a_1, \ldots, a_p)U$$

であって，B_j が x に関しては有理的であるようなものが存在する条件を求めるものであった．B_j の $a_1, \ldots, a_p$ への依存制は一般に非常に超越的で，Painlevé 超越関数などが現れる．したがって x と $a_1, \ldots, a_p$ への依存制には違いがあるのである．ただし変形方程式の有理解や代数解を採用したときには，$a_1, \ldots, a_p$ への依存性と x の依存性は同等になる．

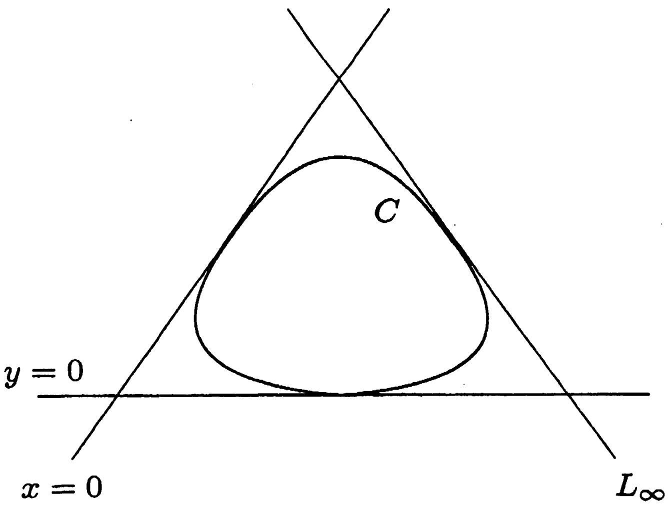
このように見ると，解の特異点の位置への依存性によって，Fuchs 型方程式を特徴づけることは意味があるように思われる．たとえば解の特異点の位置への依存性と独立変数への依存性が同等であるような方程式のクラスには，rigid なものが含まれる．さらに rigid に限らず，解が積分表示を持つような方程式もこのクラスに属すると考えられる．従ってこのクラスは Fuchs 型方程式の中でも良いクラスをなしていることが期待される．与えられた方程式がこのクラスに属するための判定法としては，変形方程式を立ててその代数解を求めるといった方法が考えられる．ただしこの方法は，変形できない方程式に対しては適用できない．

3 微分方程式の延長

Appell の F_4 は，階数 4 の完全積分可能系

$$dU = (A(x,y)dx + B(x,y)dy)\,U \tag{3.1}$$

をみたす．ここで $A(x,y), B(x,y)$ は (x,y) の有理関数を成分とする 4×4 行列である．(3.1) の特異点集合 S は，次図のような $\mathbb{P}^2$ における 4 本の divisors からなる．



ただし

$$C : (1-x-y)^2 - 4xy = 0$$

である．

(3.1) のモノドロミーは，基本群 $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus S)$ の表現として，4 本の divisors における留数行列の Jordan 標準形を指定することで一意的に決まってしまう ([6])．すなわち rigid 局所系を定めるのである．

ところが (3.1) をたとえば $y = \text{const.}$ に制限した切り口

$$\frac{dU}{dx} = A(x,y)U \tag{3.2}$$

を考えると，この常微分方程式は rigid ではないことが分かる．この不整合は次のように理解できる．(3.2) は完全積分可能系 (3.1) に延長されるが，延長された系においては定義域 $\mathbb{P}^2 \setminus S$ の topology が複雑になり，基本群の生成元の間にいくつかの relations が現れる．これがモノドロミーを決定するのに与っているのだが，この relations は制限である常微分方程式では現れないものであるため，常微分方程式での方がモノドロミーが決まりにくくなるのである．従って rigid ではない常微分方程式 (3.2) のモノドロミーは，延長を考えることによって決定されるということになる．

このように，rigid ではない方程式でも，延長を考えることによってモノドロミーが決まることがある．すると延長可能性というのは，良い方程式を判定する 1 つの手段になるのではないだろうか．次の例は示唆的である．

階数 3 の Fuchs 型方程式系

$$\frac{dU}{dx} = \left(\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1}\right)U \tag{3.3}$$

を考える．ここで A_1, A_2 は 3×3 行列で，$A_0 = -(A_1 + A_2)$ とおく．A_0, A_1, A_2 の固有値の重複度はすべて $(1,1,1)$ であるとする．この場合 rigidity 指数は 0 となり，2 個のアクセサリー・パラメーターがある．この形の方程式の中から，延長可能という判定法により良いものを選び出したいと考える．前節で述べたように，これが変形できる方程式であれば変形方程式の代数解を求めればよいのだが，この方程式は特異点が 3 点しかないため，変形方程式の変数が取れず変形ができない．そこで次のような "延長" を考えてみよう．

階数 4 の完全積分可能系

$$dV = \left[R_1\frac{dx}{x} + R_2\frac{dy}{y} + R_3\frac{dx}{x-1} + R_4\frac{dy}{y-1} + R_5\frac{d(x-y)}{x-y}\right]V \tag{3.4}$$

で，

$$R_5 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & * \end{pmatrix}$$

となっているものを考える．(3.3) がこの完全積分可能系の singular locus $x = y$ への制限になっている，という形で，(3.3) の延長を求めることにする．$R_1, \ldots, R_4$ および R_5 の $(4,4)$ 成分には，(3.4) が既約で完全積分可能であるということ以外

には条件を課さない．すると面白いことに，この形の延長可能性によって，(3.3) は特性指数を与える 4 つのパラメーターに依存する形で完全に決まってしまう．さらに完全積分可能系 (3.4) の方も，初等的な変換を除いて，4 パラメーターに依存して決まる (3.3) によって一意的に決まることも分かる．

こうして決まった (3.3) は，Selberg 型積分

$$u(x) = \int_\Delta {s_1}^a(s_1-1)^b(s_1-x)^c {s_2}^a(s_2-1)^b(s_2-x)^c(s_1-s_2)^g \frac{ds_1\wedge ds_2}{s_1 s_2}$$

のみたす微分方程式 ([2]) と等価となる．この積分に現れるパラメーター a,b,c,g が，(3.3) の 4 パラメーターに対応している．つまり singular locus への制限の逆操作としての延長可能性によって，rigid でない方程式の中から解の積分表示を持つものが選び出されたことになる．

4 延長と middle convolution

前節の最後の例では，singular locus への制限の逆操作としての延長を考えた．微分方程式の変形とはやはり延長の話であって，その場合に元の常微分方程式は，変形で得られた完全積分可能系の regular locus への制限として得られる．そのように考えるなら，regular locus あるいは singular locus への制限の逆操作を，広い意味の変形と思うのが自然であろう．

普通の意味の変形に対しては，変形方程式は middle convolution によって保たれるということを注意していた（定理 2）．そこで今回の広い意味での変形に対して，middle convolution がどのように振る舞うのかに興味がある．このことについて，前節の最後の例を用いて調べてみたい．

方程式 (3.3) のうちで，(3.4) への延長可能性によって決まったものを，仮に DF 方程式と呼ぶことにする．DF 方程式に（必要なら addition を行ったあとに）middle convolution を施すと，階数 4 の方程式

$$\frac{dU}{dx} = \left(\frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x-1}\right)U \tag{4.1}$$

が得られる．ここで

$$\begin{aligned} B_1 &\sim \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 \sim \begin{pmatrix} \beta_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \\ B_1 + B_2 &\sim \begin{pmatrix} \gamma_1 & & & \\ & \gamma_2 & & \\ & & \gamma_3 & \\ & & & \gamma_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.2}$$

となる．

(4.1) は (3.3) から middle convolution で作ったので，やはり 2 個のアクセサリー・パラメーターを持っている．そのアクセサリー・パラメーターの値は，元

の (3.3) のアクセサリー・パラメーターの値を用いて具体的に決まっている．そのことを少し忘れて，(4.2) という条件のみを課した方程式 (4.1) を考えると，これは特定されていないアクセサリー・パラメーターを 2 個含む．そのアクセサリー・パラメーターの値は，なにがしかの延長可能性によって決定されるだろうか．もしそうだとして，その決定された値は，(3.3) から決まるアクセサリー・パラメーターの値と一致しているだろうか．また (4.1) の延長として現れる完全積分可能系は，(3.3) の延長として現れる完全積分可能系 (3.4) とどのような関係にあるだろうか．またこの関係によって，多変数完全積分可能系に対する middle convolution の自然な定義が得られるだろうか．

以上はなかなか面白い問題に思える．ただし今のところ計算途上で，答には至っていない．以下この問題のこれまでに進めてきた計算と現時点で得られた結果について報告し，本稿を終えることとする．

延長するときの器をどのように設定すればよいかは，元の常微分方程式からは決められない．そこで先の例に倣って，

$$dV = \left[Q_1\frac{dx}{x} + Q_2\frac{dy}{y} + Q_3\frac{dx}{x-1} + Q_4\frac{dy}{y-1} + Q_5\frac{d(x-y)}{x-y}\right]V \tag{4.3}$$

という形の階数 5 の完全積分可能系を設定することにする．ここで

$$Q_5 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & * \end{pmatrix}$$

とし，(4.3) の singular locus $x = y$ への制限が (4.1) になるという条件で，(4.1) を決めようと思う．

各 Q_j を $(4,1)\times(4,1)$-block に分割して

$$Q_j = \left(\begin{array}{c|c} S_j & u_j \\ \hline v_j & q_j \end{array}\right)$$

とおく．すると (4.1) が (4.3) の $x = y$ への制限になっているということは，

$$S_1 + S_2 = B_1, \quad S_3 + S_4 = B_2$$

という式で表される．(4.3) の完全積分可能条件から，

$$\begin{aligned} (S_1 + S_2)u_1 &= (q_1 + q_2 + q_5)u_1, \\ (S_3 + S_4)u_3 &= (q_3 + q_4 + q_5)u_3 \end{aligned} \tag{4.4}$$

が成り立つことが分かる．ここで $u_1 \neq 0, u_3 \neq 0$ を仮定すると，条件 (4.4) は，$q_1 + q_2 + q_5$ が B_1 の固有値で，$q_3 + q_4 + q_5$ が B_2 の固有値であることを表して

いる．B_1 の固有値は 0 (2 重), α_1, α_2, B_2 の固有値は 0 (2 重), β_1, β_2 であった．したがって

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_5 = 0 \quad \text{or} \quad \alpha_1 \quad \text{or} \quad \alpha_2, \\ q_3 + q_4 + q_5 = 0 \quad \text{or} \quad \beta_1 \quad \text{or} \quad \beta_2 \end{cases}$$

ということになるが，ほかの完全積分可能条件も使うと，実は

$$q_1 + q_2 + q_5 = q_3 + q_4 + q_5 = 0$$

の場合に限ることが分かる．

このようにして完全積分可能条件を用いて計算を進めていくと，さらに (4.1) の 2 つのアクセサリー・パラメーターの値が決まることが分かる．しかしその値は，DF 方程式から middle convolution によって得られる (4.1) のアクセサリー・パラメーターの値とは一致しないようである．

References

[1] M. Dettweiler and S. Reiter, Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems, J. Algebra, **318** (2007), 1–24.

[2] V. S. Dotsenko and V. A. Fateev, Comformal algebra and multipoint correlation function in 2D statistical models, Nuclear Phys., B, **240** (1984), 312-348.

[3] Y. Haraoka, Integral representation of solutions of differential equations free from accessory parameters, Adv. Math., **169** (2002), 187-240.

[4] Y. Haraoka and G. Filipuk, Middle convolution and deformation for Fuchsian systems, J. London Math. Soc., **76** (2007), 438-450.

[5] Y. Haraoka and S. Hamaguchi, Topological theory for Selberg type integral associated with rigid Fuchsian systems, preprint.

[6] Y. Haraoka and Y. Ueno, Rigidity for Appell's hypergeometric series F_4, Funkcial. Ekvac., **51** (2008), 149-164.

[7] Y. Haraoka and T. Yokoyama, Construction of rigid local systems and integral representation of their sections, Math. Nachr., **279** (2006), 255-271.

[8] N. M. Katz, Rigid Local Systems, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1996.