数理解析研究所講究録
第1662巻 2009年 47-64

一般超幾何方程式を部分系に含む 2変数形式的KZ方程式の3, 4次元表現

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科　今関 靖一郎 (Imazeki Seiichiro)
Graduate School of Fundamental Science and Engineering,
Waseda University

1　2変数形式的KZ方程式の表現への延長と問題設定

1, 2変数形式的KZ方程式を以下のように定義する.

定義 1 (1変数形式的KZ方程式)
X_0, X_1 を非可環な形式元とする. このとき

$$d\varphi = \left(\frac{dz}{z}X_0 + \frac{dz}{1-z}X_1\right)\ \varphi \tag{1}$$

と表される1変数微分方程式を1変数形式的KZ方程式と呼ぶ.

定義 2 (2変数形式的KZ方程式)

$$d\varphi = \Omega\varphi, \quad \Omega := \left(\frac{X_0}{z} + \frac{X_1}{1-z}\right)dz + \left(\frac{Y_0}{w} + \frac{Y_1}{1-w}\right)dw + \frac{Z}{1-zw}d(zw) \tag{2}$$

と表される2変数微分方程式を, 2変数形式的KZ方程式と呼ぶ. ただし X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z は非可環な形式元で, 可積分条件 $\Omega \wedge \Omega = 0$, すなわち,

$$\begin{cases} [\,X_0, Y_0\,] = [\,X_1, Y_0\,] = [\,X_0, Y_1\,] = 0 \\ [\,X_1, Y_1 + Z\,] = [\,Y_1, X_1 + Z\,] = [\,X_0 - X_1 - Y_0, Z\,] = 0 \end{cases} \tag{3}$$

をみたすと約束する.

非可環な形式元 X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z で生成され, (3) を基本関係式とするLie環を $\mathfrak{X}$ とする. また, X_0, X_1 で生成される $\mathfrak{X}$ の部分Lie環を $\mathfrak{X}_z$ とする. $\mathfrak{X}_z$ は自由Lie環である. このとき, 形式的KZ方程式の表現について, 次のように定義する.

定義 3 (形式的KZ方程式の表現)
$\mathfrak{X}_z$ の n 次元表現 $\sigma : \mathfrak{X}_z \to M(n, \mathbb{C})$ に対し, (1) の X_0, X_1 を $\sigma(X_0), \sigma(X_1)$ に置き換えた方程式を, 1変数形式的KZ方程式 (1) の σ による n 次元表現と呼ぶ. 同様に, $\mathfrak{X}$ の n

次元表現 $\rho : \mathfrak{X} \to M(n,\mathbb{C})$ に対し, (2) の $X_0, \ldots, Z$ を $\rho(X_0), \ldots, \rho(Z)$ に置き換えた方程式を 2 変数形式的 KZ 方程式 (2) の ρ による n 次元表現と呼ぶ.

ここで, $\mathfrak{X}_z$ は X_0, X_1 で生成されているので, X_0, X_1 に対する σ の像を指定すれば, σ は一意に定まる. したがって以後, $\mathfrak{X}_z$ の n 次元表現は 2 つの行列の組と考える. 同様に, $\mathfrak{X}$ は $X_0, \ldots, Z$ で生成されているので, $X_0, \ldots, Z$ に対する ρ の像を指定すれば, ρ は一意に定まる. よって, $\mathfrak{X}$ の n 次元表現は可積分条件 (3) をみたす行列の組と考える.

$\mathfrak{X}$ の n 次元表現全体上に以下の 2 つの変換を導入する:
$T \in GL(n,\mathbb{C})$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_5) \in \mathbb{C}^5$ に対し

$$\begin{aligned} \widehat{T} : (M_1, \ldots, M_5) &\mapsto (TM_1T^{-1}, \cdots, TM_5T^{-1}), & (4) \\ \mathrm{add}(\lambda) : (M_1, \ldots, M_5) &\mapsto (M_1 + \lambda_1 I_n, \ldots, M_5 + \lambda_5 I_n). & (5) \end{aligned}$$

2 変数 KZ 方程式の解の変換としてみるならば,

$$\begin{aligned} \widehat{T} : \varphi &\mapsto T\varphi, & (6) \\ \mathrm{add}(\lambda) : \varphi &\mapsto z^{\lambda_1}(1-z)^{-\lambda_2} w^{\lambda_3}(1-w)^{-\lambda_4}(1-zw)^{-\lambda_5}\varphi, & (7) \end{aligned}$$

となる. (4) を一斉相似変換, (5) を addition (加法操作) と呼び, これらで生成される群 G の (左) 作用で $\mathfrak{X}$ の n 次元表現の間に同値関係を定義する.

本研究においては, 次の構成で得られる表現を考察の対象とする: まず, $X_0', X_1' \in M(n,\mathbb{C})$ とし, 1 変数形式的 KZ 方程式の n 次元表現

$$d\varphi = \left(\frac{dz}{z}X_0' + \frac{dz}{1-z}X_1'\right)\varphi \tag{8}$$

があるとする. このとき X_0', X_1' に対し, $X_0, X_1 \in M(n+m,\mathbb{C})$ $(m \geq 0)$ を

$$X_0 = \begin{pmatrix} & & & * \\ & X_0' & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} & & & * \\ & X_1' & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

と定める (それぞれ X_i' を埋め込み, m 列拡張する). この (X_0, X_1) を 2 変数形式的 KZ 方程式 (2) の表現の特異因子 $w = 0$ 上でのデータとし, 可積分条件 (3) のもとで Y_0, Y_1, Z を決定する. これにより $\mathfrak{X}$ の $(n+m)$ 次元表現 (X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z) が構成され, 特異因子 $w = 0$ への制限が (8) を部分系に含む 2 変数形式的 KZ 方程式の $(n+m)$ 次元表現が得られる.

このような表現の構成を, 本研究においては 2 変数形式的 KZ 方程式の表現への延長と呼ぶことにする. このとき, 次の問題が自然に想起される.

問題 1 変数形式的 KZ 方程式の表現 X_0', X_1' に対し, どのような 2 変数形式的 KZ 方程式の表現への延長が実現されるか, すなわちどのような 2 変数形式的 KZ 方程式の表現がどれくらい得られるか?

また, この問題から派生する具体的な問題として,

問題$'$ $m = 1$ とし, X_0', X_1' に一般超幾何方程式 ${}_nE_{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}; z)$

$$\left[\vartheta \prod(\vartheta + \beta_j - 1) - z \prod(\vartheta + \alpha_i)\right] g = 0 \quad (\text{ただし}\ \vartheta := z\frac{d}{dz})$$

の表現を与える. また, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1} \in \mathbb{C}$ は以下のパラメータ条件

$$\alpha_1 \cdots \alpha_n q \prod_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n-1}} (p_j + \alpha_i) \neq 0 \tag{9}$$

をみたすとする[*1] (ただし $p_j := 1 - \beta_j, q := \sum \alpha_i + \sum p_j$). このときどのような 2 変数形式的 KZ 方程式の $(n+1)$ 次元表現がどれくらい得られるか?

が挙げられる. 本稿においては 問題$'$ の $n = 2, 3$ の解決を目的とする. 各々の場合に与える表現 ($\varphi_i := z^i\ d^i/dz^i\ g\ (i = 0, \ldots, n-1)$ として方程式 (8) を構成したときに得られる行列の組) は以下の通りである:

<u>$n = 2$</u>

$$X_0' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & p_1 \end{pmatrix}, \quad X_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_1\alpha_2 & q \end{pmatrix}. \tag{10}$$

<u>$n = 3$</u>

$$X_0' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -t_2 - t_1 - 1 & t_1 - 1 \end{pmatrix}, \quad X_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 - t_2 + q & q \end{pmatrix}. \tag{11}$$

ただし $s_i : \alpha_1, \ldots, \alpha_n$の i 次基本対称式, $t_j : p_1, \ldots, p_{n-1}$の j 次基本対称式

---

*1 微分作要素 $\vartheta \prod(\vartheta + \beta_j - 1) - z \prod(\vartheta + \alpha_i)$ が右から因子分解されないための必要条件として意味を持つ. ただし条件 $q \neq 0$ のみ計算の都合で設定した.

詳しくは後に述べるが, これら $n=2,3$ の場合に与える表現 (10),(11) を 2 変数形式的 KZ 方程式の表現に延長すると, 得られる表現のうち自明な延長*2に同値な表現を除けば, $n=2$ の場合には (有限個の場合を除いて)Appell の超幾何関数 F_1, $n=3$ の場合には Appell の超幾何関数 F_2 のみたす 2 変数形式的 KZ 方程式の表現に同値な表現であるという結果を得る. これはすなわち Appell の超幾何関数 $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ の特徴付けに関する結果である. 2 章で $n=2$ の場合, 3 章で $n=3$ の場合についての説明をする.

なお $n=2$ の Appell の超幾何関数 F_1 の特徴付けに関する結果については, 1972 年の R. Gerárd , A.H.M. Levelt の研究 [GL], 及び 2002 年の S. Hamada , J. Kaneko の研究 [HK] の部分結果であることに注意する. 彼らはより一般に 3 次元表現全体を分類, 考察しており, 私が考察対象としている 3 次元表現はその一部でしかないからである.

2 Gauss の超幾何微分方程式 ${}_2E_1$ に対する 2 変数形式的 KZ 方程式の表現への延長

2.1 表現の分類

この節では, パラメータ条件 (9) のもとで, $w=0$ への制限が Gauss の超幾何微分方程式 ${}_2E_1(\alpha_1,\alpha_2;\beta_1;z)$ を部分系に含む 2 変数形式的 KZ 方程式の 3 次元表現を分類する. まず, 分類すべきは (10) より

$$(X_0,\ldots,Z)\sim(\tilde{X}_0,\ldots,\tilde{Z})\ \text{s.t.}\ \tilde{X}_0=\begin{pmatrix}0&1&*\\0&p_1&*\\0&0&*\end{pmatrix}\ ,\ \tilde{X}_1=\begin{pmatrix}0&0&*\\\alpha_1\alpha_2&q&*\\0&0&*\end{pmatrix} \tag{12}$$

なる表現 (X_0,X_1,Y_0,Y_1,Z) である. こうした 3 次元表現全体を $N_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}$ で表すことにする. $N_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}$ の元を全て求めるには, 可積分条件 (3) のもとで

$$\begin{cases} X_0=\begin{pmatrix}0&1&x^0_{13}\\0&p_1&x^0_{23}\\0&0&x^0_{33}\end{pmatrix}\ ,\ X_1=\begin{pmatrix}0&0&x^1_{13}\\\alpha_1\alpha_2&q&x^1_{23}\\0&0&x^1_{33}\end{pmatrix} \\[2ex] Y_i=\left(y^i_{jk}\right)_{1\le j,k\le 3}\ (i=0,1)\ ,\ Z=\left(z_{jk}\right)_{1\le j,k\le 3} \end{cases} \tag{13}$$

*2 これは後に本質的に 1 変数 KZ 方程式の表現, あるいは本質的に ${}_nE_{n-1}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\beta_1,\ldots,\beta_{n-1};z)$ の表現と 2 変数形式的 KZ 方程式の 1 次元表現の直和と記述する表現のことを指す.

なる $(X_0,\dots,Z)\in N_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}$ を決定すれば十分である. $N'_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}$ で (13) をみたす表現全体を表すことにする.

$N'_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}$ に属する表現を以下の場合分けにしたがって分類する.

$$\text{(I) } (X_0,X_1)\not\sim\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\0&p_1&0\\0&0&x^0_{33}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\\alpha_1\alpha_2&q&0\\0&0&x^1_{33}\end{pmatrix}\right)$$

$$\text{(II) } (X_0,X_1)\sim\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\0&p_1&0\\0&0&x^0_{33}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\\alpha_1\alpha_2&q&0\\0&0&x^1_{33}\end{pmatrix}\right)$$

$$\text{(II}-1)\quad x^0_{33}\neq 0,p_1 \text{ or } x^1_{33}\neq 0,q \text{ or } x^0_{33}-x^1_{33}+y^0_{11}-y^0_{33}\neq-\alpha_1,-\alpha_2$$

$$\text{(II}-2)\quad x^0_{33}=0,p_1\ ,\ x^1_{33}=0,q\ ,\ x^0_{33}-x^1_{33}+y^0_{11}-y^0_{33}=-\alpha_1,-\alpha_2$$

$(\mathrm{II}-1),(\mathrm{II}-2)$ で考慮する x^0_{33}, x^1_{33}, $x^0_{33}-x^1_{33}+y^0_{11}-y^0_{33}$ に関する条件は, それぞれ X_0, X_1, $X_0-X_1-Y_0$ の固有値の重複度に関わる条件であることに注意する.

また, 実際に可積分条件 (3) から表現を求めるとき, 次の補題 ([KiH] 参照) を多用する.

補題 4 A,B をそれぞれ与えられた k,l 次正方行列とし, $k\times l$ 行列 X についての次の行列方程式

$$AX-XB=0$$

を考える. このとき, A の固有値と B の固有値に共通なものが存在しないならば, $X=0$ が成り立つ.

まず, (I) をみたす表現についてであるが, この場合はさらに X_0,X_1 の固有値に着目して, x^0_{33} について $x^0_{33}\neq 0,p_1$, $x^0_{33}=0$, $x^0_{33}=p_1$ の 3 通り, x^1_{33} について $x^1_{33}\neq 0,q$, $x^1_{33}=0$, $x^1_{33}=q$ の 3 通りに場合分けする. こうして計 9 通りに場合分けするわけだが, $x^0_{33}\neq 0,p_1$ または $x^1_{33}\neq 0,q$ を仮定する場合 (5 通り) においては, 行列を $2\times 2, 2\times 1, 1\times 2, 1\times 1$ 行列に区分けして考える. このとき, 例えば $[X_0,Y_1]=0$ や $[X_1,Y_1+Z]=0$ 等の行列方程式において補題 4 が適用できる. このことと (I) を仮定していることに注意して計算していく. 残り (4 通り) については, 先の行列の区分けをしても補題 4 の適用が困難なので, これらの場合には (I) に反さないように直接計算する. この方針により次の命題を得る.

命題 5 (I) をみたす表現 $(X_0,X_1,Y_0,Y_1,Z)\in N'_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}$ は

$$(X_0,X_1,0,\varepsilon X_0,\varepsilon(X_1-X_0))\quad(\varepsilon=0,-1)$$

のいずれかに同値である.

命題 5 より得られる表現は, 本質的には 1 変数形式的 KZ 方程式の表現

$$d\psi = \left(\frac{X_0}{z}dz + \frac{X_1}{1-z}dz\right)\psi$$

である. 実際, $\varepsilon = 0$ のときは w 方向の情報はないので, 明らかに上述の 1 変数形式的 KZ 方程式の表現である. また, $\varepsilon = -1$ のときは, 上述の 1 変数微分方程式の解を $\psi(z)$ としたとき, $\psi\left(z(1-w)/(1-zw)\right)$ がみたす 2 変数微分方程式を表すので, この場合も結局は上述の 1 変数形式的 KZ 方程式の表現が本質的である.

次に $(\mathrm{II}-1)$ をみたす表現についてであるが, この場合は先と同様に行列を $2\times 2, 2\times 1, 1\times 2, 1\times 1$ 行列に区分けして考える. このとき, 仮定より補題 4 が必ず適用できる状況にあり, そのため比較的容易に次の命題を得る.

命題 6 $(\mathrm{II}-1)$ をみたす表現 $(X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z) \in N'_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}$ は

$$\left(\begin{pmatrix} X_0' & 0 \\ 0 & x_{33}^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1' & 0 \\ 0 & x_{33}^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 \\ 0 & y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon X_0' & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon(X_1' - X_0') & 0 \\ 0 & z' \end{pmatrix}\right) \ (\varepsilon = 0, -1)$$

のいずれかに同値である. ただし, X_0', X_1' は Gauss の超幾何微分方程式 ${}_2E_1$ の表現 (10) とし, また $y_i := y_{33}^i - y_{11}^i \ (i = 0, 1)$, $z' := z_{33} - z_{11}$ とする.

命題 6 より得られる表現は 2 つの表現 (第 1, 2 成分のなす表現は, 先と同様の意味で, 本質的に Gauss の超幾何微分方程式 ${}_2E_1(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1; z)$ の表現, 第 3 成分のなす表現は 2 変数形式的 KZ 方程式の 1 次元表現) の直和に同値な表現である.

残るは $(\mathrm{II}-2)$ をみたす表現についてであるが, この場合は先と同様の行列の区分けをしても補題 4 の適用が困難である. したがって, $(\mathrm{II}-2)$ においては可積分条件 (3) から直接計算する. このとき y_{13}^1, y_{32}^1 が 0 であるか否かによって計算の状況が異なり, それぞれ次の命題で述べる表現を得る.

命題 7 $(X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z) \in N'_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}$ は $(\mathrm{II}-2)$ をみたすとする.
(i) $y_{13}^1 = y_{32}^1 = 0$ ならば, (X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z) は

$$\left(\begin{pmatrix} X_0' & 0 \\ 0 & x_{33}^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1' & 0 \\ 0 & x_{33}^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 \\ 0 & y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon X_0' & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon(X_1' - X_0') & 0 \\ 0 & z' \end{pmatrix}\right) \ (\varepsilon = 0, -1)$$

のいずれかに同値である. ただし, 各記号は命題 6 と同様である.

(*ii*) $y_{13}^1 \neq 0$ または $y_{32}^1 \neq 0$ ならば, 以下で定める表現 $\mathbb{X}\left(\alpha_1, \alpha_2, p_1; x_{33}^0, x_{33}^1, \tau_2, \epsilon\right)$ あるいは $\mathbb{X}\left(\alpha_2, \alpha_1, p_1; x_{33}^0, x_{33}^1, \tau_2, \epsilon\right)$ のいずれかと同値である.

$\mathbb{X}\left(\alpha_1, \alpha_2, p_1; x_{33}^0, x_{33}^1, \tau_2, \epsilon\right)$:

$$\begin{cases} X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33}^0 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1\alpha_2 & q & 0 \\ 0 & 0 & x_{33}^1 \end{pmatrix}, Y_0 = (x_{33}^0 - x_{33}^1 + \alpha_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ Y_1 = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 - x_{33}^0 \end{pmatrix} + (p_1 + \alpha_2 - x_{33}^0 - x_{33}^1)(1+\varepsilon) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \qquad + \tau_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x_{33}^0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (p_1 + \alpha_2 - x_{33}^0 - x_{33}^1)\tau_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -p_1 + x_{33}^0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ Z = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} + (\alpha_1 + x_{33}^0 - x_{33}^1)(1+\varepsilon) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \qquad + \frac{\alpha_1 + x_{33}^0 - x_{33}^1}{p_1 + \alpha_2 - x_{33}^0} \tau_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (x_{33}^0 - p_1 - \alpha_2)\tau_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\mathbb{X}\left(\alpha_2, \alpha_1, p_1; x_{33}^0, x_{33}^1, \tau_2, \epsilon\right)$: $\mathbb{X}\left(\alpha_1, \alpha_2, p; x_{33}^0, x_{33}^1, \tau_2, \epsilon\right)$ のα_1とα_2を入れ替えた表現.

ただし $(\tau_1, \tau_2, \varepsilon)$ は

$$\varepsilon \in \mathbb{C},\ \tau_2 = 1, \tau_1 = \varepsilon(1+\varepsilon) \ \text{ or } \ \tau_2 = 0, \tau_1 = 1, \varepsilon = 0, -1 \tag{14}$$

をみたすとする[*3].

以上 3 つの命題を用いれば, $N_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}$ について次の定理を得る.

定理 8 $N_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}$ の部分集合 $U_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}, V_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}, W_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}$ を

$$\begin{aligned} U_{\alpha_1,\alpha_2,p_1} &:= G\{(X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z) \in N'_{\alpha_1,\alpha_2,p_1} \mid \text{(I) をみたす}\} \\ V_{\alpha_1,\alpha_2,p_1} &:= G\{(X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z) \in N'_{\alpha_1,\alpha_2,p_1} \mid \text{(II) をみたす},\ y_{13}^1 = y_{32}^1 = 0\} \\ W_{\alpha_1,\alpha_2,p_1} &:= G\{(X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z) \in N'_{\alpha_1,\alpha_2,p_1} \mid \text{(II}-2\text{) をみたす},\ y_{13}^1 \neq 0 \text{ or } y_{32}^1 \neq 0\} \end{aligned}$$

[*3] $(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{P}^1, \varepsilon \in \mathbb{C}$ s.t. $\tau_1\tau_2 = \varepsilon(1+\varepsilon)$ のように簡潔に表記することは可能だが, 一斉相似変換と addition によって写り合う表現を除くため, このような条件で考える.

とおく. このとき, 次が成り立つ:

$$N_{\alpha_1,\alpha_2,p_1} = U_{\alpha_1,\alpha_2,p_1} \sqcup V_{\alpha_1,\alpha_2,p_1} \sqcup W_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}.$$

また, $U_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}$ に属する表現は本質的に 1 変数形式的 KZ 方程式の表現に同値であり (命題 5), $V_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}$ に属する表現は本質的に Gauss の超幾何微分方程式 ${}_2E_1(\alpha_1,\alpha_2;\beta_1;z)$ の表現と 2 変数形式的 KZ 方程式の 1 次元表現の直和に同値 (命題 6, 命題 7(i)) である.
さらに, $W_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}$ について

$$W_{\alpha_1,\alpha_2,p_1} = \bigcup_{(14)} \{G\mathbb{X}(\alpha_1,\alpha_2,p_1;x_{33}^0,x_{33}^1,\tau_2,\varepsilon) \cup G\mathbb{X}(\alpha_2,\alpha_1,p_1;x_{33}^0,x_{33}^1,\tau_2,\varepsilon)\}$$

が成り立つ (命題 7(ii)).

2.2 パラメータの置き換えと $\mathbb{X}(\alpha_1,\alpha_2,p_1;x_{33}^0,x_{33}^1,\tau_2,\varepsilon)$

前節の定理 8 より, あとは表現 $\mathbb{X}(\alpha_1,\alpha_2,p_1;x_{33}^0,x_{33}^1,\tau_2,\varepsilon)$, $\mathbb{X}(\alpha_2,\alpha_1,p_1;x_{33}^0,x_{33}^1,\tau_2,\varepsilon)$ がどのような方程式を表現するのか考察すればよい.
まず, $\mathbb{X}(\alpha_2,\alpha_1,p_1;x_{33}^0,x_{33}^1,\tau_2,\varepsilon)$ は命題 7(ii) より $\mathbb{X}(\alpha_1,\alpha_2,p_1;x_{33}^0,x_{33}^1,\tau_2,\varepsilon)$ に対し α_1 と α_2 の配置を入れ替えただけの表現であるから, 両者に本質的な違いはない. したがって表現 $\mathbb{X}(\alpha_1,\alpha_2,p_1;x_{33}^0,x_{33}^1,\tau_2,\varepsilon)$ を考察すれば十分であることに注意する.

命題 9 $(\tau_1,\tau_2,\varepsilon)$ は (14) をみたす任意の組とする. このとき次が成り立つ.
(i) $\mathbb{X}(\alpha_1,\alpha_2,p_1;p_1,q,\tau_2,\varepsilon) \sim \mathbb{X}(-p_1-\alpha_2,-p_1-\alpha_1,p_1;p_1,0,\tau_2,\varepsilon)$.
(ii) $\mathbb{X}(\alpha_1,\alpha_2,p_1;0,q,\tau_2,\varepsilon) \sim \mathbb{X}(-\alpha_2,-\alpha_1,-p_1;-p_1,0,\tau_2,\varepsilon)$.
(iii) $\mathbb{X}(\alpha_1,\alpha_2,p_1;0,0,\tau_2,\varepsilon) \sim \mathbb{X}(p_1+\alpha_1,p_1+\alpha_2,-p_1;-p_1,0,\tau_2,\varepsilon)$.

実際, (i) については,

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 & q & 0 \\ 0 & (p_1+\alpha_1)(p_1+\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & (p_1+\alpha_1)(p_1+\alpha_2) \end{pmatrix}$$

なる $T \in GL(3,\mathbb{C})$ に対し, $\mathrm{add}(0,-q,0,0,-q\varepsilon) \circ \widehat{T}$ を $\mathbb{X}(\alpha_1,\alpha_2,p_1;p_1,q,\tau_2,\varepsilon)$ に施すことで得られる. (ii),(iii) についても同様の変換を比較的容易に見つけることができる.

ここで, $\alpha_1' := -p_1-\alpha_2, \alpha_2' := -p_1-\alpha_1, p_1' := p_1$ とおくと, 命題 9 の (i) より

$$\mathbb{X}(\alpha_1,\alpha_2,p_1;p_1,q,\tau_2,\varepsilon) \sim \mathbb{X}(\alpha_1',\alpha_2',p_1';p_1',0,\tau_2,\varepsilon)$$

を得るが，この $\alpha'_1, \alpha'_2, p'_1$ は

$$\alpha'_1\alpha'_2 q'(p'_1+\alpha'_1)(p'_1+\alpha'_2) \neq 0 \quad (q' := \alpha'_1+\alpha'_2+p'_1)$$

をみたす．この式はパラメータ条件 (9) そのものである．よって，$\mathbb{X}(\alpha_1,\alpha_2,p_1;p_1,0,\tau_2,\varepsilon)$ を考察すれば，上述の同値関係より $\mathbb{X}(\alpha_1,\alpha_2,p_1;p_1,q,\tau_2,\varepsilon)$ についても考察がなされることになる．(ii),(iii) についても同様のことが言えるので，結局 $\mathbb{X}(\alpha_1,\alpha_2,p_1;p_1,0,\tau_2,\varepsilon)$ を考察すれば十分である．

2.3 Appell の F_1 と $\mathbb{X}(\alpha_1,\alpha_2,p_1;p_1,0,\tau_2,\varepsilon)$ の関係

Appell の超幾何級数

$$\mathrm{F}_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}m!n!}x^m y^n$$

がみたす全微分方程式系は以下の通りである ([H],[Ko] を参照．ただし $p := 1-\gamma$, $q := \alpha+\beta+p$):

$$\begin{aligned} d\varphi = \Bigg\{ &\frac{dx}{x}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & p+\beta' & 0 \\ 0 & -\beta' & 0 \end{pmatrix} + \frac{dx}{1-x}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha\beta & q & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{dy}{y}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & p+\beta \end{pmatrix} \\ &+ \frac{dy}{1-y}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha\beta' & \beta' & \alpha+\beta'+p \end{pmatrix} + \frac{d(x-y)}{x-y}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta' & \beta \\ 0 & \beta' & -\beta \end{pmatrix} \Bigg\} \varphi. \end{aligned} \tag{15}$$

$(x,y)=(0,0)$ において blow-up $(x=z, y=zw)$ することで，方程式 (15) から次を得る:

$$\begin{aligned} d\varphi = \Bigg\{ &\frac{dz}{z}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \frac{dz}{1-z}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha\beta & q & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{dw}{w}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & p+\beta \end{pmatrix} \\ &+ \frac{dw}{1-w}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta' & -\beta \\ 0 & -\beta' & \beta \end{pmatrix} + \frac{d(zw)}{1-zw}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha\beta' & \beta' & p+\alpha+\beta' \end{pmatrix} \Bigg\} \varphi. \end{aligned} \tag{16}$$

この 2 変数形式的 KZ 方程式の表現 (16)*4 を Appell の超幾何関数 $\mathrm{F}_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;z,zw)$ のみたす 2 変数形式的 KZ 方程式の表現と呼び，$\mathbb{X}_{\mathrm{F}_1}(\alpha,\beta,\beta',p)$ と表すことにする．

定理 10 表現 $\mathbb{X}(\alpha_1,\alpha_2,p_1;p_1,0,\tau_2,\varepsilon)$ について，次が成り立つ．

*4 ただし，パラメータ α,β,β',p について非整数条件のような条件等は一切仮定しないとする．

(i) $\tau_2 = 1,\ \varepsilon \neq 0$ ならば, $\mathbb{X}(\alpha_1, \alpha_2, p_1; p_1, 0, 1, \varepsilon) \sim \mathbb{X}_{F_1}(\alpha_1, \alpha_2, (p_1 + \alpha_2)\varepsilon, p_1)$.
(ii) $\tau_2 = 0$, $\varepsilon = 0$ ならば, $\mathbb{X}(\alpha_1, \alpha_2, p_1; p_1, 0, 0, 0) \sim \mathbb{X}_{F_1}(\alpha_1, \alpha_2, 0, p_1)$.

実際, (i) については

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\varepsilon}{\alpha_2} \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & -\frac{(p_1+\alpha_2)\varepsilon}{\alpha_2} \end{pmatrix}$$

なる行列 $T \in GL(3, \mathbb{C})$ に付随する一斉相似変換 $\widehat{T}$ を, (ii) については

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha_2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{p_1+\alpha_2}{\alpha_2} \end{pmatrix}$$

なる行列 $T \in GL(3, \mathbb{C})$ に付随する一斉相似変換 $\widehat{T}$ を施せばよい.

定理 10 より, $W_{\alpha_1, \alpha_2, p_1}$ に属する表現のほとんどが Appell の超幾何関数 F_1 のみたす 2 変数形式的 KZ 方程式の表現と同値であることがわかった. 残るは $\mathbb{X}(\alpha_1, \alpha_2, p_1; p_1, 0, 1, 0)$, $\mathbb{X}(\alpha_1, \alpha_2, p_1; p_1, 0, 0, -1)$ の 2 つの表現である. これらについては未だ完全な特徴づけができていない. しかしながら, 両者ともにいかなる一斉相似変換, addition を施しても Appell の超幾何関数 $\mathrm{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; z, zw)$ のみたす 2 変数形式的 KZ 方程式の表現に変換できないこと, $\mathbb{X}(\alpha_1, \alpha_2, p_1; p_1, 0, 0, -1)$ は可約な表現であることは既に確認してある.

以上の議論をまとめると, 次を得る:

Gauss の超幾何微分方程式 ${}_2E_1(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1; z)$ の表現を 2 変数 KZ 方程式の表現へ延長して得られる表現は, 本質的に 1 変数形式的 KZ 方程式の表現と, 本質的に Gauss の超幾何微分方程式 ${}_2E_1(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1; z)$ の表現と 2 変数形式的 KZ 方程式の 1 次元表現の直和, そして未だ特徴づけがなされていない 16 種類の表現[*5]に同値な表現を除けば, Appell の超幾何関数 F_1 のみたす 2 変数形式的 KZ 方程式の表現に同値な表現である.

[*5] 命題 9 より, $\mathbb{X}(\alpha_1, \alpha_2, p_1; x_{33}^0, x_{33}^1, 1, 0)$ と $\mathbb{X}(\alpha_1, \alpha_2, p_1; x_{33}^0, x_{33}^1, 0, -1)$ $(x_{33}^0 = 0, p_1,\ x_{33}^1 = 0, q)$, および各々 α_1 と α_2 の配置を交換した表現の計 16 種類.

3 一般超幾何方程式 $_3E_2$ に対する 2 変数形式的 KZ 方程式の表現への延長

3.1 表現の分類

この節では, 2.1 と同様に, パラメータ条件 (9) のもとで, $w=0$ への制限が一般超幾何方程式 $_3E_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2;z)$ を部分系に含む 2 変数形式的 KZ 方程式の 4 次元表現を分類する. まず, 分類すべきは (11) より

$$(X_0,\dots,Z)\sim(\tilde{X}_0,\dots,\tilde{Z})\ \text{s.t.}$$
$$\tilde{X}_0=\begin{pmatrix}0&1&0&*\\0&1&1&*\\0&t_1-t_2-1&t_1-1&*\\0&0&0&*\end{pmatrix},\tilde{X}_1=\begin{pmatrix}0&0&0&*\\0&0&0&*\\s_3&q+s_2-t_2&q&*\\0&0&0&*\end{pmatrix}\quad(17)$$

なる表現 (X_0,X_1,Y_0,Y_1,Z) である. こうした 4 次元表現全体を $N_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2}$ で表すことにする. $N_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2}$ の元を全て求めるには, 可積分条件 (3) のもとで

$$\begin{cases}X_0=\begin{pmatrix}0&1&0&x^0_{14}\\0&1&1&x^0_{24}\\0&t_1-t_2-1&t_1-1&x^0_{34}\\0&0&0&x^0_{44}\end{pmatrix},X_1=\begin{pmatrix}0&0&0&x^1_{14}\\0&0&0&x^1_{24}\\s_3&s_2-t_2+q&q&x^1_{34}\\0&0&0&x^1_{44}\end{pmatrix}\\[2ex] Y_i=\left(y^i_{jk}\right)_{1\le j,k\le 4}\ (i=0,1)\ ,\ Z=\left(z_{jk}\right)_{1\le j,k\le 4}\end{cases}\quad(18)$$

なる $(X_0,\dots,Z)\in N_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2}$ を決定すれば十分である. $N'_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2}$ で (18) をみたす表現全体を表すことにする.

$N'_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2}$ に属する表現を, Gauss の超幾何微分方程式 $_2E_1$ の場合と同様に, 以下の場合分けにしたがって分類する.

$$\text{(I)}\ (X_0,X_1)\not\sim\left(\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&t_1-t_2-1&t_1-1&0\\0&0&0&x^0_{44}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\s_3&s_2-t_2+q&q&0\\0&0&0&x^1_{44}\end{pmatrix}\right)$$

$$\text{(II)}\ (X_0,X_1)\sim\left(\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&t_1-t_2-1&t_1-1&0\\0&0&0&x^0_{44}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\s_3&s_2-t_2+q&q&0\\0&0&0&x^1_{44}\end{pmatrix}\right)$$

(II − 1) $x^0_{44}\neq 0,p_1,p_2$ or $x^1_{44}\neq 0,q$ or $x^0_{44}-x^1_{44}+y^0_{11}-y^0_{44}\neq -\alpha_1,-\alpha_2,-\alpha_3$

(II − 2) $x^0_{44}=0,p_1,p_1\ ,\ x^1_{44}=0,q\ ,\ x^0_{44}-x^1_{44}+y^0_{11}-y^0_{44}=-\alpha_1,-\alpha_2,-\alpha_3$

$(\mathrm{II}-1), (\mathrm{II}-2)$ で考慮する x_{44}^0, x_{44}^1, $x_{44}^0 - x_{44}^1 + y_{11}^0 - y_{44}^0$ に関する条件は, それぞれ X_0, X_1, $X_0 - X_1 - Y_0$ の固有値の重複度に関わる条件であることに注意する.

まず, (I) をみたす表現についてであるが, Gauss の超幾何方程式 ${}_2E_1$ の場合の (I) と同様の計算方針で次の命題を得る.

命題 11 (I) をみたす表現 $(X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z) \in N'_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2}$ は

$$(X_0, X_1, 0, \varepsilon X_0, \varepsilon(X_1 - X_0)) \quad (\varepsilon = 0, -1)$$

のいずれかと同値, すなわち本質的に 1 変数形式的 KZ 方程式の表現と同値な表現である.

次に $(\mathrm{II}-1)$ をみたす表現についてであるが, これも Gauss の超幾何方程式 ${}_2E_1$ の場合の $(\mathrm{II}-1)$ と同様に補題 4 を用いて計算することで, 次の命題を得る.

命題 12 $(\mathrm{II}-1)$ をみたす表現 $(X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z) \in N'_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2}$ は

$$\left(\begin{pmatrix} X_0' & 0 \\ 0 & x_{44}^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1' & 0 \\ 0 & x_{44}^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 \\ 0 & y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon X_0' & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon(X_1' - X_0') & 0 \\ 0 & z' \end{pmatrix}\right) \quad (\varepsilon = 0, -1)$$

のいずれかと同値, すなわち本質的に一般超幾何方程式 ${}_3E_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; z)$ を表す表現と, 2 変数形式的 KZ 方程式の 1 次元表現の直和に同値な表現である. ただし, X_0', X_1' は一般超幾何方程式 ${}_3E_2$ を表す表現 (11) とし, また $y_i := y_{44}^i - y_{11}^i$ $(i = 0, 1)$, $z' := z_{44} - z_{11}$ とする.

残るは $(\mathrm{II}-2)$ をみたす表現についてであるが, Gauss の超幾何方程式 ${}_2E_1$ の場合の $(\mathrm{II}-1)$ と同様に補題 4 の適用が困難なので, 可積分条件 (3) から直接計算しなければならない. このとき次の命題を得る.

命題 13 $(X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z) \in N'_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2}$ は $(\mathrm{II}-2)$ をみたすとする.
(i) $y_{14}^1 = y_{43}^1 = 0$ または $x_{44}^1 = q$ ならば, (X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z) は

$$\left(\begin{pmatrix} X_0' & 0 \\ 0 & x_{33}^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1' & 0 \\ 0 & x_{33}^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 \\ 0 & y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon X_0' & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon(X_1' - X_0') & 0 \\ 0 & z' \end{pmatrix}\right) \quad (\varepsilon = 0, -1)$$

のいずれかに同値である. ただし, 各記号は命題 12 と同様である.
(ii) $x_{44}^1 = 0$, かつ $y_{14}^1 \neq 0$ または $y_{43}^1 \neq 0$ ならば, 以下で定める表現 $\mathbb{X}(\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\\ p_1,p_2\end{smallmatrix}; \alpha_i, x_{44}^0, \kappa)$ $(i = 1, 2, 3,\ x_{44}^0 = 0, p_1, p_2,\ \kappa = \pm 1)$ のいずれかと同値である.

$\mathbb{X}\left({}^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}_{p_1,p_2};\alpha_i,x_{44}^0,\kappa\right)$:

$$
\left\{
\begin{aligned}
X_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & t_1-t_2-1 & t_1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44}^0 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_3 & q+s_2-t_2 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
Y_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44}^0+\alpha_i \end{pmatrix} \\
Y_1 &= -\tfrac{1+\kappa}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & t_1-t_2-1 & t_1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1-\kappa}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_i \end{pmatrix} \\
&\quad +\kappa\begin{pmatrix} 0 & \frac{1-t_1+x_{44}^0}{x_{44}^0+\alpha_i} & \frac{1}{x_{44}^0+\alpha_i} & 0 \\ 0 & \frac{x_{44}^0-t_2}{x_{44}^0+\alpha_i} & \frac{x_{44}^0}{x_{44}^0+\alpha_i} & 0 \\ 0 & \frac{(t_1-t_2-1)x_{44}^0}{x_{44}^0+\alpha_i} & \frac{(t_1-1)x_{44}^0-t_2}{x_{44}^0+\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_i(2x_{44}^0-t_1)-2(p_1-x_{44}^0)(p_2-x_{44}^0)}{x_{44}^0+\alpha_i} \end{pmatrix} \\
&\quad +\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_i(p_1+\alpha_i)(p_2+\alpha_i)}{(x_{44}^0+\alpha_i)^3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_i x_{44}^0(p_1+\alpha_i)(p_2+\alpha_i)}{(x_{44}^0+\alpha_i)^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_i x_{44}^0(1-x_{44}^0)(p_1+\alpha_i)(p_2+\alpha_i)}{(x_{44}^0+\alpha_i)^3} \\ (p_1-x_{44}^0)(p_2-x_{44}^0) & 1-t_1+x_{44}^0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
Z &= \tfrac{1+\kappa}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -s_3 & -1-s_1-s_2 & -1-s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44}^0 \end{pmatrix} \\
&\quad +\kappa\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1+s_1+x_{44}^0}{x_{44}^0+\alpha_i} & -\frac{1}{x_{44}^0+\alpha_i} & 0 \\ \frac{s_3}{x_{44}^0+\alpha_i} & \frac{s_2-x_{44}^0}{x_{44}^0+\alpha_i} & -\frac{x_{44}^0}{x_{44}^0+\alpha_i} & 0 \\ \frac{s_3(x_{44}^0-1)}{x_{44}^0+\alpha_i} & \frac{s_3+(1+s_1+s_2)x_{44}^0}{x_{44}^0+\alpha_i} & \frac{s_2+(1+s_1)x_{44}^0}{x_{44}^0+\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2s_3+\alpha_i(s_1-2\alpha_i)x_{44}^0}{\alpha_i(x_{44}^0+\alpha_i)} \end{pmatrix} \\
&\quad +\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{(x_{44}^0+\alpha_1)(x_{44}^0+\alpha_2)(x_{44}^0+\alpha_3)}{(x_{44}^0+\alpha_i)^3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_i(x_{44}^0+\alpha_1)(x_{44}^0+\alpha_2)(x_{44}^0+\alpha_3)}{(x_{44}^0+\alpha_i)^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_i(1+\alpha_i)(x_{44}^0+\alpha_1)(x_{44}^0+\alpha_2)(x_{44}^0+\alpha_3)}{(x_{44}^0+\alpha_i)^3} \\ -\frac{s_3}{\alpha_i} & \alpha_i-s_1-1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\right.
$$

以上 3 つの命題を用いれば, $N_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2}$ について次の定理を得る.

定理 14 $N_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2}$ の部分集合 $U_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2}, V_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2}, W_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2}$ を

$$\begin{aligned}
U_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2} &:= G\{(X_0,X_1,Y_0,Y_1,Z)\in N'_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2} \mid \text{(I) をみたす}\}\\
V_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2} &:= G\{(X_0,X_1,Y_0,Y_1,Z)\in N'_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2} \mid \text{(II) をみたす}, y^1_{13}=y^1_{32}=0\}\\
W_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2} &:= G\left\{(X_0,X_1,Y_0,Y_1,Z)\in N'_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2} \,\middle|\, \begin{smallmatrix}\text{(II}-2\text{) をみたす},\ x^1_{44}=0,\\ y^1_{13}\neq 0\ \text{or}\ y^1_{32}\neq 0\end{smallmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

とおく. このとき次が成り立つ:

$$N_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2} = U_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2} \sqcup V_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2} \sqcup W_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2}.$$

また, $U_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2}$ に属する表現は本質的に 1 変数形式的 KZ 方程式の表現 (命題 11), $V_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2}$ に属する表現は本質的に一般超幾何方程式 ${}_3E_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2;z)$ を表す表現と 1 階の 2 変数形式的 KZ 方程式の表現の直和 (命題 12, 命題 13(i)) に同値な表現である. さらに, $W_{\alpha_1,\alpha_2,p_1}$ について

$$W_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,p_1,p_2} = \bigcup_{\substack{i=1,2,3,\ \kappa=\pm1\\ x^0_{44}=0,p_1,p_2}} G\,\mathbb{X}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\\ p_1,p_2\end{smallmatrix};\alpha_i,x^0_{44},\kappa\right)$$

が成り立つ (命題 13(ii)).

3.2 パラメータの置き換えと $\mathbb{X}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\\ p_1,p_2\end{smallmatrix};\alpha_i,x^0_{44},\kappa\right)$

前節の定理 14 より, あとは 18 種類の表現 $\mathbb{X}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\\ p_1,p_2\end{smallmatrix};\alpha_i,x^0_{44},\kappa\right)$ がどのような方程式を表現するのか考察すればよい.
まず, $\mathbb{X}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\\ p_1,p_2\end{smallmatrix};\alpha_i,x^0_{44},\kappa\right)$ の α_i について, 命題 13(ii) より $i=1,2,3$ のいずれを選んだとしても, パラメータ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ の役割が変わるだけなので, 本質的な違いはない.
また, 命題 13(ii) より $\mathbb{X}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\\ p_1,p_2\end{smallmatrix};\alpha_1,p_2,\kappa\right)$ は $\mathbb{X}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\\ p_1,p_2\end{smallmatrix};\alpha_1,p_1,\kappa\right)$ の p_1 と p_2 の配置を交換したものであるから, 両者に本質的な違いはない.
よって, $\mathbb{X}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\\ p_1,p_2\end{smallmatrix};\alpha_1,x^0_{44},\kappa\right)$ $(x^0_{44}=0,p_1)$ を考察すれば十分であることに注意する.

命題 15 $\kappa=\pm1$ とする. このとき次が成り立つ:

$$\mathbb{X}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\\ p_1,p_2\end{smallmatrix};\alpha_1,p_1,\kappa\right) \sim \mathbb{X}\left(\begin{smallmatrix}p_1+\alpha_1,p_1+\alpha_2,p_1+\alpha_3\\ -p_1\ ,\ p_2-p_1\end{smallmatrix};p_1+\alpha_1,0,\kappa\right).$$

証明としては,

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -p_1 & 1 & 0 & 0\\ p_1(1+p_1) & -2p_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

なる $T \in GL(4;\mathbb{C})$ に対し,

$$\mathrm{add}(-p_1, 0, 0, p_1\{\frac{1+\kappa}{2} + \frac{\kappa(p_2-p_1)}{p_1+\alpha_1}\}, p_1\{\frac{\kappa-1}{2} + \frac{\kappa(\alpha_2+\alpha_3+p_1)}{p_1+\alpha_1}\}) \circ \widehat{T}$$

を $\mathbb{X}(^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}_{p_1,p_2}; \alpha_1, p_1, \kappa)$ に施せばよい.

ここで, $\alpha_1' := p_1+\alpha_1, \alpha_2' := p_1+\alpha_2, \alpha_3' := p_1+\alpha_3, p_1' := -p_1, p_2' := p_2 - p_1$ とおくと,

$$\mathbb{X}(^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}_{p_1,p_2}; \alpha_1, p_1, \kappa) \sim \mathbb{X}(^{\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3'}_{p_1',p_2'}; \alpha_1', 0, \kappa)$$

を命題 15 より得るが, この $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', p_1', p_2'$ について

$$\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'q' \prod_{\substack{i=1,2,3\\ j=1,2}} (p_j' + \alpha_i') \neq 0 \quad (q' := \alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' + p_1' + p_2')$$

をみたす. この式はパラメータ条件 (9) そのものである. したがって, 結局 2 種類の表現 $\mathbb{X}(^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}_{p_1,p_2}; \alpha_1, 0, \kappa)$ $(\kappa = \pm 1)$ を考察すれば十分であることがわかる.

3.3 Appell の F_2 と $\mathbb{X}(^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}_{p_1,p_2}; \alpha_1, 0, \kappa)$ との関係

Appell の超幾何級数

$$\mathrm{F}_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}\,(\beta)_m\,(\beta')_n}{(\gamma)_m(\gamma')_n m!n!} x^m y^n$$

は以下の全微分方程式系をみたす ([Ko] 参照. ただし $\delta := \beta - \gamma + 1,\ \delta' := \beta' - \gamma' + 1$):

$$d\varphi = \left\{ \frac{dx}{x}\begin{pmatrix} -\beta & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\delta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 1 \\ 0 & 0 & -\beta\delta & \delta \end{pmatrix} + \frac{dx}{1-x}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\beta'+\delta-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta'\delta' & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$
$$+ \frac{dy}{y}\begin{pmatrix} -\beta' & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta' & 0 & 1 \\ -\beta'\delta' & 0 & \delta' & 0 \\ 0 & -\beta'\delta' & 0 & \delta' \end{pmatrix} + \frac{dy}{1-y}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\beta+\delta'-1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta\delta & 0 \end{pmatrix} \qquad (19)$$
$$\left. + \frac{d(x+y-1)}{x+y-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha-\delta-\delta'+1 \end{pmatrix} \right\} \varphi.$$

$x=1-zw, y=z$ と変換すれば, (19) から次の微分方程式を得る:

$$d\varphi=\left\{\frac{dz}{z}\begin{pmatrix}-\beta' & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1-\alpha-\delta & 0 & 0\\ -\beta'\delta' & 0 & \delta' & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha-\delta\end{pmatrix}+\frac{dz}{1-z}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha-\beta+\delta'-1 & 0\\ 0 & 0 & -\beta\delta & 0\end{pmatrix}\right.$$
$$+\frac{dw}{w}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -\alpha+\beta'-\delta+1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \beta'\delta' & 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{dw}{1-w}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\delta+\delta'-1\end{pmatrix} \tag{20}$$
$$\left.+\frac{d(zw)}{1-zw}\begin{pmatrix}\beta & -1 & 0 & 0\\ \beta\delta & -\delta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta & -1\\ 0 & 0 & \beta\delta & -\delta\end{pmatrix}\right\}\varphi.$$

この 2 変数形式的 KZ 方程式の表現 (20)[*6] を Appell の超幾何関数 $\mathrm{F}_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';1-zw,z)$ のみたす 2 変数形式的 KZ 方程式の表現と呼び, $\mathbb{X}_{\mathrm{F}_2}\binom{\alpha,\beta,\beta'}{\gamma,\gamma'}$ と表すことにする.
また, $x=1/z, y=1-w$ と変換すれば, (19) から次の微分方程式を得る:

$$d\varphi=\left\{\frac{dz}{z}\begin{pmatrix}\beta & 0 & 0 & 0\\ \beta\delta & \alpha-\beta'-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \beta & 0\\ 0 & -\beta'\delta' & \beta\delta & \alpha+\delta'-1\end{pmatrix}+\frac{dz}{1-z}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha-\beta'+\delta-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\beta'\delta' & 0 & 0\end{pmatrix}\right.$$
$$+\frac{dw}{w}\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\alpha+\beta-\delta'+1 & 0\\ 0 & 0 & \beta\delta & 0\end{pmatrix}+\frac{dw}{1-w}\begin{pmatrix}\beta' & 0 & -1 & 0\\ 0 & \beta' & 0 & -1\\ \beta'\delta' & 0 & -\delta' & 0\\ 0 & \beta'\delta' & 0 & -\delta'\end{pmatrix} \tag{21}$$
$$\left.+\frac{d(zw)}{1-zw}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\delta+\delta'-1\end{pmatrix}\right\}\varphi.$$

この 2 変数形式的 KZ 方程式の表現 (21)[*6] を Appell の超幾何関数 $\mathrm{F}_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';1/z,1-w)$ のみたす 2 変数形式的 KZ 方程式の表現と呼び, $\mathbb{X}'_{\mathrm{F}_2}\binom{\alpha,\beta,\beta'}{\gamma,\gamma'}$ と表すことにする.

定理 16 表現 $\mathbb{X}(\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\\ p_1,p_2\end{smallmatrix};\alpha_1,0,\kappa)$ $(\kappa=\pm1)$ について, 次が成り立つ.
(i) $\kappa=-1$ ならば $\mathbb{X}(\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\\ p_1,p_2\end{smallmatrix};\alpha_1,0,-1)\sim\mathbb{X}_{\mathrm{F}_2}\binom{\alpha_3+p_1+1,\ -\alpha_2,\ p_1+\alpha_1}{1-\alpha_2+\alpha_3,\ 1+p_1-p_2}$[*7].
(ii) $\kappa=1$ ならば $\mathbb{X}(\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\\ p_1,p_2\end{smallmatrix};\alpha_1,0,1)\sim\mathbb{X}'_{\mathrm{F}_2}\binom{\alpha_2+p_2+1,\ \alpha_2,\ -p_1-\alpha_1}{1+\alpha_2-\alpha_3,\ 1-p_1+p_2}$[*7].

[*6] ただし, 表現内のパラメータ $\alpha,\beta,\gamma,\gamma'$ に対し, 非整数条件等を一切仮定しないとする.
[*7] 命題 13(ii) より, 表現 $\mathbb{X}(\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\\ p_1,p_2\end{smallmatrix};\alpha_1,0,\kappa)$ $(\kappa=\pm1)$ は α_2 と α_3 が対称に配置されている. したがって α_2 と α_3 を交換したものも成り立つことに注意する.

実際, (i) については

$$T=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_2\alpha_3} & -\frac{1}{\alpha_2\alpha_3} & \frac{1}{\alpha_1} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \alpha_1 & \frac{s_2+q-t_2}{\alpha_2\alpha_3} & \frac{q}{\alpha_2\alpha_3} & 0 \\ -t_2 & t_1-1 & -1 & -\frac{(p_1+\alpha_1)(p_2+\alpha_1)}{\alpha_1} \end{pmatrix} \in GL(4,\mathbb{C})$$

に対し $\mathrm{add}(-p_1,0,0,-t_2/\alpha_1,\alpha_2\alpha_3/\alpha_1+\alpha_3)\circ\widehat{T}$ を, (ii) については, $T\in GL(4,\mathbb{C})$ を

$$\begin{pmatrix} -\frac{t_2}{\alpha_2\alpha_3} & \frac{t_1-1}{\alpha_2\alpha_3} & -\frac{1}{\alpha_2\alpha_3} & \frac{(p_1+\alpha_1)(p_2+\alpha_1)}{s_3} \\ -\alpha_1 & -\frac{s_2+q-t_2}{\alpha_2\alpha_3} & -\frac{q}{\alpha_2\alpha_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(p_1+\alpha_1)(p_2+\alpha_1)}{\alpha_2\alpha_3} \\ (p_1+\alpha_1)(p_2+\alpha_1) & \frac{(p_1+\alpha_1)(p_2+\alpha_1)(1+\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_2\alpha_3} & \frac{(p_1+\alpha_1)(p_2+\alpha_1)}{\alpha_2\alpha_3} & -\frac{(p_1+\alpha_1)(p_2+\alpha_1)}{\alpha_1} \end{pmatrix}$$

としたとき, $\mathrm{add}(\alpha_2,0,0,p_2+t_2/\alpha_1,-\alpha_2\alpha_3/\alpha_1)\circ\widehat{T}$ を施せばよい.

以上まとめると, 次の結果を得る:

一般超幾何方程式 ${}_3E_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2;z)$ の表現を 2 変数 KZ 方程式の表現へ延長して得られる表現は, 本質的に 1 変数形式的 KZ 方程式の表現と, 本質的に Gauss の超幾何微分方程式 ${}_3E_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2;z)$ の表現と 2 変数形式的 KZ 方程式の 1 次元表現の直和に同値な表現を除けば, Appell の超幾何関数 F_2 のみたす 2 変数形式的 KZ 方程式の表現に同値な表現である.

4 ${}_nE_{n-1}$ $(n\geq 4)$ の場合 (予想)

$n=2,3$ の計算と同様に, $n\geq 4$ についても次の場合分けにしたがって表現を決定することを考える.

(I) $(X_0,X_1)\nsim\left(\begin{pmatrix} X_0' & 0 \\ 0 & x^0_{n+1,n+1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} X_1' & 0 \\ 0 & x^1_{n+1,n+1}\end{pmatrix}\right)$ (ただし X_0',X_1' は ${}_nE_{n-1}$ の表現)

(II) $(X_0,X_1)\sim\left(\begin{pmatrix} X_0' & 0 \\ 0 & x^0_{n+1,n+1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} X_1' & 0 \\ 0 & x^1_{n+1,n+1}\end{pmatrix}\right)$

(II − 1) $x^0_{n+1,n+1}\neq 0,p_1,\ldots,p_n$ or $x^1_{n+1,n+1}\neq 0,q$
or $x^0_{n+1,n+1}-x^1_{n+1,n+1}+y^0_{11}-y^0_{n+1,n+1}\neq -\alpha_1,\ldots,-\alpha_n$

(II − 2) $x^0_{n+1,n+1}=0,p_1,\ldots,p_n,\ x^1_{n+1,n+1}=0,q$,
$x^0_{n+1,n+1}-x^1_{n+1,n+1}+y^0_{11}-y^0_{n+1,n+1}\neq -\alpha_1,\ldots,-\alpha_n$

このとき, 各場合に関し同様の結果を得ると予想される. さらに, $n=2,3$ で Appell の超幾何関数 F_1, F_2 の表現を得た $(II-2)$ について, $n \geq 4$ ならば本質的に一般超幾何方程式 ${}_nE_{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}; z)$ の表現と 2 変数形式的 KZ 方程式の 1 次元表現の直和と同値な表現しか得られないと予想している*8. まとめると,

予想 $n \geq 4$ ならば, 問題′ における ${}_nE_{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}; z)$ の 2 変数 KZ 方程式への延長で得られる表現は, 本質的に一般超幾何方程式 ${}_nE_{n-1}$ を部分系に含む 1 変数形式的 KZ 方程式の $(n+1)$ 次元表現, あるいは本質的に一般超幾何方程式 ${}_nE_{n-1}$ の表現と 2 変数形式的 KZ 方程式の 1 次元表現の直和のいずれかに同値な表現である.

この予想は主に (I) の計算が困難なため, 解決には至っていない. しかし, もしこの予想が正しければ, 問題′ で考える 2 変数 KZ 方程式の表現の延長に関し, $n \geq 4$ においては価値のある (少なくとも容易に特徴づけられない) 表現は存在しないことになる. したがって $n \geq 4$ においては, パラメータ条件 (9) をおとすか, 2 変数 KZ 方程式への延長の過程で, 1 列ではなく 2 列以上拡張して考える必要があると思われる. これによりさらなる既知の微分方程式の特徴づけや, 未知の方程式を発見できるかもしれない.

参考文献

[GL] R. Gerárd and A.H.M.Levelt, Étude d'une classe particulière de systèmes de Pfaff du type de Fuchs sur l'espace projectif complexe, *J. Math. pures et appl.*, **51**(1972), 189-217.

[HK] S. Hamada and J. Kaneko, Classification of Pfaffian systems of Fuchs type of a particular class, *Kumamoto J. Math.*, **15**(2002), 17-52.

[KiT] Tosihusa Kimura, Hypergeometric functions of two variables, Univ. Tokyo, 1973.

[H] 原岡 喜重, 超幾何関数, 朝倉書店, 2002.

[KiH] 木村 弘信, 超幾何関数入門, サイエンス社, 2007.

[Ko] 河野 實彦, 微分方程式と数式処理, 森北出版, 1998.

*8 $n=4$ の場合の $(II-2)$ において, 本質的に一般超幾何方程式 ${}_4E_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \beta_1, \beta_2, \beta_3; z)$ の表現と 2 変数形式的 KZ 方程式の 1 次元表現の直和に同値な表現しか得られないことは既に確認してある.