数理解析研究所講究録
第1665巻 2009年 175-184

素数の3乗の和で表せない自然数の密度について.

Koichi KAWADA (川田 浩一)
Faculty of Education, Iwate University
(岩手大学 教育学部)

1. 序.

1937年に，十分大きい奇数は3つの素数の和で表せることを証明したI. M. Vinogradovの有名な論文が発表されたが，この論文の本質は，素数を渡る指数和を評価する方法を与えた点にある．これにより，素数のべき乗の和によって自然数を表す問題に対して，一般Riemann予想などを仮定しない，unconditionalな結果を得ることが可能になり，実際，1938年にHua [2] はこの方向の結果をいくつも与えた．本稿では素数の3乗の和について論じるが，これについて [2] では，十分大きい奇数は9個の素数の3乗の和として表されることが示されている．

素数のべき乗の和による自然数の表現に関する問題はWaring-Goldbach問題（もちろん，素数の1乗の和なら単にGoldbach問題）と総称されるが，これに関する話を書くときは，付随する合同式条件から始める必要がある．これはある意味では自明な条件で，筆者はこの手の記事を書くことが多いので，いい加減飽きてきたし，面倒くさいというのが正直なところだが，初めてお読みくださる方もありうるから，避けて通るわけにはいかない．

例えば上で,「十分大きい奇数は9個の素数の3乗の和として表される」というHuaの定理を書いたが，偶数の方はどうか．もしある偶数nが9個の素数の3乗の和で表せれば，その9個の素数が全部奇数ということは不可能だから，それらの素数の少なくとも1つは2でなければならない．つまり，偶数nが9個の素数の3乗の和となるかどうかは，$n-2^3$が8個の素数の3乗の和で表せるかどうかに帰着される．逆にいえば，$n=p_1^3+p_2^3+\cdots+p_9^3$という素数を動く変数$p_j$に関する方程式が，“実質的に”9変数であるためには，nは奇数でなければならないわけで，この意味で，9個の素数の3乗の和によってnを表すことを考える場合，nを

奇数に限って考えることは自然であるといえよう．このような考察に基づき，s 個の素数の 3 乗の和によって n を表すことを考える場合，全ての自然数 q に対して，合同式

$$n \equiv x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_s^3 \pmod q$$

が $(x_1 x_2 \dots x_s, q) = 1$ なる解 x_1, x_2, ..., x_s をもつような n に限って考えるのが普通である．このような自然数 n の集合を $\mathcal{N}_s$ で表す．合同式に関するわりと初等的な考察（Vaughan [9], Lemma 2.14 参照）を通して，4 以上の各 s に対して集合 $\mathcal{N}_s$ は次のように具体的に記述できることがわかる；

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_4 &= \{n \in \mathbb{N} :\ n \equiv 0 \pmod 2,\ n \not\equiv \pm 1, \pm 3 \pmod 9,\ n \not\equiv \pm 1 \pmod 7\},\\
\mathcal{N}_5 &= \{n \in \mathbb{N} :\ n \equiv 1 \pmod 2,\ \ n \not\equiv 0,\ \pm 2 \pmod 9,\ \ n \not\equiv 0 \pmod 7\},\\
\mathcal{N}_6 &= \{n \in \mathbb{N} :\ n \equiv 0 \pmod 2,\quad n \not\equiv \pm 1 \pmod 9\},\\
\mathcal{N}_7 &= \{n \in \mathbb{N} :\ n \equiv 1 \pmod 2,\quad n \not\equiv 0 \pmod 9\},\\
\mathcal{N}_s &= \{n \in \mathbb{N} :\ n \equiv s \pmod 2\} \quad (\forall s \geq 8).
\end{aligned}$$

そして，4 以上の各 s に対し，十分大きい $n \in \mathcal{N}_s$ は s 個の素数の 3 乗の和で表せるだろう，と予想されている．高々3 個の素数の 3 乗の和で表せる X 以下の自然数の個数が $O(X(\log X)^{-3})$ であることは簡単にわかるので，s に対する 4 という下限はそれより小さくできない．上述の Hua の結果は，この予想を $s \geq 9$ に対して示したもの，といえるわけである．

さて，その Hua の論文 [2] から 70 年ほどが過ぎたわけだが，その予想を $s = 8$ に対して示すことは未だにできていない*．しかし,「十分大きい $n \in \mathcal{N}_s$」とは言えなくても,「ほとんど全ての $n \in \mathcal{N}_s$ は s 個の素数の 3 乗の和で表せる」ということは，$5 \leq s \leq 8$ に対して既に Hua [2] が証明している．このことをより正確に記すため，X 以下の $n \in \mathcal{N}_s$ のうち，s 個の素数の 3 乗の和で表せない n の個数を $E_s(X)$ とする．X 以下の $\mathcal{N}_s$ の元の個数は $\gg X$ だから，$E_s(X) = o(X)$ $(X \to \infty)$ なら†，ほとんど全ての $n \in \mathcal{N}_s$ は s 個の素数の 3 乗の和で表せる，と言えるわけだが，実際

*従って，その上の注意からわかるように，十分大きい自然数は 9 個の素数の 3 乗の和になるだろうけれども，このことはまだ証明できない (偶数の場合が未解決)．Hua [2] の定理から，$s \geq 10$ なら，十分大きい自然数は，偶奇にかかわらず，s 個の素数の 3 乗の和になることがわかる．

†前段落に記したように，$s \geq 4$ なら $E_s(X) \ll 1$ であろうと予想はされる．Hua [2] はこれを $s \geq 9$ に対して証明し，この s の条件を改良することがまだできていない．

Hua [2] は，$5 \le s \le 8$ の場合，ある正定数 A があって，

$$E_s(X) \ll X(\log X)^{-A} \tag{1}$$

であることを示した．一方，$E_4(X) = o(X)$ はまだ証明されていないが，circle method でこれを証明することは，現在の常識的感覚からすると，$E_8(X) \ll 1$ を示すのと同じこと，と言える‡.

Hua [2] の後，(1) の形の評価が任意に固定したいくらでも大きい A に対しても成立する§ことを Schwarz [8] が 1961 年に示し，さらに Ren [7] は 2000 年に，

$$E_5(X) \ll X^{152/153+\varepsilon}$$

を示した¶．Ren [7] は $6 \le s \le 8$ に対する $E_s(X)$ の評価には言及していないが，circle method を使った際に，誤差項と思われる minor arc の寄与の平均値を Bessel の不等式を使って評価するという，この方面ではよく知られた議論と組み合わせれば，彼女の仕事は，$5 \le s \le 8$ に対する次の評価を導く：

$$E_s(X) \ll X^{1-(s-4)/153+\varepsilon}.$$

この最後の不等式の右辺の X の指数は，$s = 8$ の場合でも 0.97386 弱．$s \ge 9$ なら $E_s(X) \ll 1$ と分かっていることと比べると，この $E_8(X)$ の評価は弱すぎる，と思えるのだが，上記の Bessel の不等式に基づく方法ではそれを大きく超えることは無理にみえるのである．

この障害を乗り越える新しい方法を，2002 年に Wooley [10] が発表した．従来の Bessel の不等式を使う方法を，minor arc の寄与の 2 乗平均を評価する方法，と言うならば，彼の方法は，端的に言って，その 1 乗平均を評価する方法，と称することができよう．この方法は，様々な加法的問題に広く応用でき，実際に応用する場面での自由度も高い．今の $E_s(X)$ の評価に関して言えば，Wooley [10] が得た評価は次の通りである：

$$\begin{aligned} E_5(X) &\ll X^{35/36+\varepsilon}, & E_6(X) &\ll X^{17/18+\varepsilon}, \\ E_7(X) &\ll X^{23/36+\varepsilon}, & E_8(X) &\ll X^{11/36+\varepsilon}. \end{aligned} \tag{2}$$

‡$E_4(X) = o(X)$ $(X \to \infty)$ と $E_8(X) \ll 1$ が論理的に同値，ということではない．前者から後者は導けるが，その逆を直接証明することはたぶん無理であろう．$E_4(X)$ そのものを評価したものではないが，それに関連する仕事として，Kawada [3], Brüdern–Kawada [1] などがある．

§ただし，その場合は，(1) の Vinogradov 記号 $\ll$ に含まれる定数は A に依存する．

¶通常通り，ε は任意に固定した正数を表す．記号 $\ll$ 等に含まれる定数は，ε に依存しうる．

$23/36 = 0.63\dot{9}$, $11/36 = 0.30\dot{5}$ だから，とくに $s = 7$ と $s = 8$ の場合の評価が画期的に改良されていることが認識されよう．

その大幅な改良は，circle method を応用する際の minor arc 上の積分の扱い方に関する Wooley [10] の新しい方法の優秀さによるところが大きく，現時点ではそれを上回る方法は見つかっていないが，[10] では素数の 3 乗に付随する指数和に対する当時最良の評価も示されていて，当然それも上記の Wooley の $E_s(X)$ の評価の証明に使われている．そして，この指数和の評価に関する部分については更なる改良が可能であって，実際それによって筆者は Wooley の $E_s(X)$ の評価を少し改良し，その結果を 2003 年の数理解析研究所での研究集会において発表させていただいた ([4] 参照)．しかし，[4] に書いた通り，同時期に Kumchev も独立に同様の方針で結果を得ていて，彼の指数和の評価の方が筆者のものよりはっきりと優れており，従って最終的な $E_s(X)$ の評価も Kumchev のものの方が当然よかったのであった．

Kumchev [6] の得た指数和の評価は現時点で最良である．それについては次節でほんの少々触れるが，とても素晴らしい仕事であると筆者は敬服している．その指数和の評価に基づき，ある篩の手続きを経て，

$$
\begin{aligned}
&E_5(X) \ll X^{79/84}, \qquad && E_6(X) \ll X^{31/35}, \\
&E_7(X) \ll X^{17/28}, \qquad && E_8(X) \ll X^{23/84}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

という評価を Kumchev [5] は得た．先の Wooley の結果と比べると，$E_5(X)$, $E_7(X)$, $E_8(X)$ の評価の指数は 0.03 少々，$E_6(X)$ の評価の指数は 0.06 弱，それぞれ小さくなっている．筆者が 2003 年に得た結果は [4] にあるが，Kumchev の指数より，$s = 5, 7, 8$ の場合で 0.0065 ほど，$s = 6$ の場合は 0.02 弱，それぞれ悪い結果であり，結局出版はしなかった．

その筆者の結果にしろ，Kumchev の結果にしろ，結果に現れる指数は近似値であって，それぞれの方法が与える最良の値ではない．最良の値は，議論に使われる篩の手続きに現れるいろいろな種類の特殊な概素数 (almost prime) の密度を表すたくさんの多重積分を含むある方程式の解，として定義されるもので (次節後半を参照)，きっとその最良の値は初等超越関数程度の組み合わせとして表示できないに違いあるまい．Kumchev [5] は，彼の $E_5(X)$ の評価を例にとって,「指数の 79/84 を $79/84 - 10^{-7}$ に改良するのは簡単だが，それを $79/84 - 10^{-4}$ にするためには新しいアイディアが必要である」と書いている．

彼がそう書いてくれたおかげで，指数を $79/84 - 10^{-4}$ よりも良くすれば，論文として発表することも許されるのではないか，という気がする

のだが，今回報告させていただく次の結果では，例えば $E_5(X)$ の評価に現れる指数は，$79/84 - 1.8 \cdot 10^{-3}$ よりも少し良くなっている．

定理
$$E_5(X) \ll X^{107/114}, \qquad E_6(X) \ll X^{50/57},$$
$$E_7(X) \ll X^{23/38}, \qquad E_8(X) \ll X^{31/114}.$$

これらは，Kumchev の得た指数のほんの少しの改良に過ぎないが，$s =$ 5, 7, 8 の場合で 0.0018 少々，$s = 6$ の場合で 0.0085 少々，それぞれ良くはなっている．これらの結果は，Kumchev [5] の仕事における篩の使い方を改良することによって大体得られるが，$E_6(X)$ の評価については，Wooley [10] の方法の応用の場面でもさらに少々の工夫を施すことを要する．我々の篩の使い方は，本質的に言えば Kumchev [5] のものと画期的に異なるというものではないが，少なくとも見た目としては，我々の手続きの方が簡潔に見えるものと思う．

2. 指数和の評価と circle method による議論．

上述の定理を導くための篩にかかわる議論自体は，$5 \le s \le 8$ なる全ての s に対して共通なので，以後 $s = 5$ の場合，$E_5(X)$ の評価を例にとって記すことにする．

X を大きい実数とし，$P = \frac{1}{2}X^{1/3}$ とおき，$P < p \le 2P$ なる全ての素数 p の集合を $\mathcal{P}$ で表す．また，自然数からなる有限集合 $\mathcal{A}$ に対し，

$$f(\alpha; \mathcal{A}) = \sum_{x \in \mathcal{A}} e(x^3\alpha) \qquad (\text{ただし，} e(\alpha) = \exp(2\pi i\alpha))$$

とおく．さて，$s = 5$ の場合は，Wooley [10] の方法を使っても，昔からある Bessel の不等式による方法を使っても，どちらでも同じであって，circle method によって大体次のような命題を示すことができる：

『$\mathcal{A} \subset (P, 2P]$ で，$1 \le q \le P^{3/2}$, $(a, q) = 1$, $|q\alpha - a| \le P^{-3/2}$ をみたす整数 q, a に対し，常に

$$f(\alpha; \mathcal{A}) \ll P^{1-\rho+\varepsilon} + P(\log P)^c \kappa(q)^{1/2} q^{\varepsilon}(1 + P^3|\alpha - a/q|)^{-1/2} \tag{4}$$

なる評価が成立するならば (c は絶対定数，$\kappa(q)$ の定義は後述)，

$$n = x^3 + p_1^3 + p_2^3 + p_3^3 + p_4^3 \qquad (x \in \mathcal{A}, \ p_j \in \mathcal{P})$$

の形で表せない $n \in (\frac{1}{2}X, X] \cap \mathcal{N}_5$ の個数は，高々 $O(X^{1-\frac{2}{3}\rho+\varepsilon})$ である．』

この命題について “大体次のような” と曖昧な言い方をしたのは，実際には，$f(\alpha; \mathcal{A})$ の major arc 上の挙動に関する適当な仮定も必要だからだ

が，これは話の本筋に影響がないので，省略させていただく．この命題を見れば，(4) の形の評価においては，右辺第 1 項の P の指数に現れる ρ なるものの値が最終的な例外集合に対する評価を決めることが見て取れる．その意味では $\kappa(q)$ の定義も略してもいいのだろうが，$\kappa(q)$ は q についての乗法的関数で，従って q が素数のべき乗のときにだけ定義すれば十分だが，0 以上の整数 u に対して，

$$\kappa(p^{3u+1}) = 3p^{-u-1/2}, \qquad \kappa(p^{3u+2}) = \kappa(p^{3u+3}) = p^{-u-1}$$

と定義される．定義から $\kappa(q) \ll q^{-1/3}$ であることがわかり，一般にはこの指数 $(-1/3)$ をこれより良くできないが，平均的には $\kappa(q)$ は大体 $O(q^{-1/2})$ くらいであると思うことができる．

$E_5(X)$ を評価するには，上記の命題を，$\mathcal{A} = \mathcal{P}$ として使うのが自然であろう．Wooley [10] は，$\mathcal{A} = \mathcal{P}$ のとき，(4) が $\rho = 1/24$ に対して成立することを示した．よって上の命題から，

$$E_5(X) - E_5(X/2) \ll X^{1-\frac{2}{3}\rho+\varepsilon} \ll X^{35/36+\varepsilon},$$

これよりおなじみの議論によって $E_5(X) \ll X^{35/36+\varepsilon}$ という Wooley の結果(2) が得られたわけである．

その後，筆者は，$\mathcal{A} = \mathcal{P}$ のとき，(4) が $\rho = 1/16$ に対して成立することを示したが，Kumchev [6] はさらに $\rho = 1/14$ を得た．$1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{14} = 20/21$ だから，それでも上のような議論で得られる評価は $E_5(X) \ll X^{20/21+\varepsilon}$ であって，Kumchev の評価(3) にはまだ届かない．それを得るには篩を使うのだが，それを見るには，$\mathcal{A} = \mathcal{P}$ のときの(4) の形の不等式の証明の概要を知る必要がある．

その(4) のような評価を $\mathcal{A} = \mathcal{P}$ に対して導くには，Vinogradov 以来いくつかの手法が示されているが，どの方法でも，本質的には，自然数にわたる和から素数でないものの寄与を引くことによって，素数にわたる和に対する評価を導いている，と言える．これも広い意味での篩の方法であると言えよう．今の場合で言えば，

$$f(\alpha;\mathcal{P}) = \sum_{p\in\mathcal{P}} e(p^3\alpha) = \sum_{P<x\le 2P} e(x^3\alpha) - \sum_{\substack{P<x\le 2P \\ x\notin\mathcal{P}}} e(x^3\alpha) \tag{5}$$

という表示からスタートし，この最後の和を抑えるわけだが，最右辺の第 1 項は所謂 Weyl 和そのものだから評価は知られていて，結局最後の和，即ち合成数の寄与をどう抑えるかが問題になる．雑に言うと，合成数に

わたる和だから，$\sum_m \sum_n e((mn)^3\alpha)$ のように表示ができ，その m や n の大きさによって和をいろいろと分解して評価するのである．

Kumchev もこのような方針で，(4) を $\mathcal{A} = \mathcal{P}$, $\rho = 1/14$ に対して示したが，その証明を注意深く眺めると，(5) の最後の合成数にわたる和の評価において，ある特定の形の概素数—それらの集合を仮に $\mathcal{P}'$ としよう—が，最も悪い寄与をしていることが分かる．つまり，$x \in \mathcal{P}'$ なる x の寄与を除けば，(5) の右辺の評価はもっと良くなる—ρ の値がもう少し大きくなるわけである．そこで，そのような $\mathcal{P}'$ の寄与を(5) の左辺に回して，

$$f(\alpha; \mathcal{P} \cup \mathcal{P}') = \sum_{P<x\le 2P} e(x^3\alpha) - \sum_{\substack{P<x\le 2P \\ x\notin \mathcal{P}\cup\mathcal{P}'}} e(x^3\alpha) \tag{6}$$

として，この右辺を抑えることを考えると，今度は $\mathcal{P}'$ の寄与がないから，(5) の右辺に対する評価よりも良くなる．このようにして，$\mathcal{A} = \mathcal{P}$ のときには(4) は $\rho = 1/14$ に対してしか証明できていないが，ある概素数の集合 $\mathcal{P}'$ をうまく定義すると，$\mathcal{A} = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ に対してなら，(4) の ρ の値を 1/14 より大きくできる，という状況になるわけだ．違う言い方をすれば，ρ の値に応じて，(4) が $\mathcal{A} = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ に対して成立するように $\mathcal{P}'$ をうまく定義できるのである (もちろん，ρ の値をべらぼうに大きくできるわけではないが).

となると，(4) 周辺に書いた『命題』をその $\mathcal{A} = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ に対して適用すれば，高々 $O(P^{1-\frac{2}{3}\rho+\varepsilon})$ の例外を除いて，各 $n \in (\frac{1}{2}X, X] \cap \mathcal{N}_5$ は

$$n = x^3 + p_1^3 + p_2^3 + p_3^3 + p_4^3 \qquad (x \in \mathcal{P} \cup \mathcal{P}',\ \ p_j \in \mathcal{P})$$

と表せること，さらにその形の表し方の数を $R_1(n)$ とすると，

$$R_1(n) > C_1 P^2 (\log P)^{-5}$$

なる不等式が，ある正数 C_1 に対して成立することを示せる．いまの表現における x はもちろん素数とは限らないから，このことから直接には $E_5(X)$ の評価は得られない．が，$R_1(n)$ が数える表現の個数のうち，$x \in \mathcal{P}'$ となる表現の個数を $R_2(n)$ とすると，$R_1(n)$ のときと同様にして，ある正数 C_2 があって，高々 $O(P^{1-\frac{2}{3}\rho+\varepsilon})$ の例外の $n \in (\frac{1}{2}X, X] \cap \mathcal{N}_5$ を除いて，

$$R_2(n) < C_2 P^2 (\log P)^{-5}$$

なる不等式を示すことができる．もし $C_1 > C_2$ であれば，例外の n を除いては $R_1(n) > R_2(n)$ となり，そのような n は5つの素数の3乗の和と

なる．正数 C_1, C_2 は，$\mathcal{P}'$ に依存するが，$\mathcal{P}'$ は ρ の値に応じて決められるので，C_1, C_2 は ρ の関数であり，$C_1 > C_2$ という制約が結局 ρ の上限を与える．その ρ の上限値に対して，$E_5(X) \ll X^{1-\frac{2}{3}\rho+\varepsilon}$ という評価が得られる，という仕組みである．Kumchev の $E_5(X)$ の評価は，ρ の値を 5/56 よりもほんのちょっと大きくできることから従い，我々の定理の評価は，その 5/56 を 7/76 に置き換えられることから従う．

3. 篩.

では最後に，ρ の値を Kumchev よりも，少しではあるが，大きくできる理由を記して本稿を終えたい．

Kumchev [6] は，まず，大雑把に言って，区間 $(P^{2\rho}, P^{1-8\rho}]$ 内に約数を持つような数だけを $\mathcal{A}$ が含んでいるような場合は，(4) の評価が成立することを示した．これは，この業界で言う「Type II の和」に対する評価であって，この点だけについて言うと，Wooley [10] が示したものと同等である．そして，このことから Kumchev は，区間 $(1, P^{1-10\rho}]$ 内に素因数を持たないような全ての自然数 $x \in (P, 2P]$ の集合を $\mathcal{A}$ とするとき，(4) が成立することを導いたが，これは次のように，Möbius 関数 $\mu(d)$ の有名な性質から平易に説明される．

z 未満のすべての素数の積を $\Pi(z) = \prod_{p<z} p$ とすると，

$$\sum_{\substack{P<x\le 2P\\ (x,\Pi(P^{1-10\rho}))=1}} e(x^3\alpha) = \sum_{P<x\le 2P} e(x^3\alpha) \sum_{d|(x,\Pi(P^{1-10\rho}))} \mu(d)$$
$$= \sum_{d|\Pi(P^{1-10\rho})} \mu(d) \sum_{P/d<y\le 2P/d} e((dy)^3\alpha). \qquad (7)$$

ここで $d|\Pi(P^{1-10\rho})$ だから，d の素因数はすべて $P^{1-10\rho}$ 未満なので，もしさらに $d > P^{2\rho}$ であれば，d は必ず区間 $(P^{2\rho}, P^{1-8\rho}]$ 内に約数を持ち，従って上述の Type II の評価によって，そのような d 達の寄与は，(4) の右辺で抑えられる．すると残るのは $d \le P^{2\rho}$ の寄与であるが，d がこのくらい小さいと，(7) の最後の y についての内側の和が普通の Weyl 和になっていることを使って，十分な評価を得ることができる (これは所謂「Type I の和」の評価である)．このようにして，(4) が，$\mathcal{A} = \{P < x \le 2P; (x, \Pi(P^{1-10\rho})) = 1\}$ に対して成立することが示される．これが Kumchev [5] の篩の手続きの第 1 段階であって，もちろんこの $\mathcal{A}$ は区間 $(P, 2P]$ 内の素数を全て含むが，素数でない自然数もたくさん含むから，それらの寄与を前節の後半に書いたように処理していくことになる．

上に報告した結果の改良は，主にこの第1段階の操作の改善に因る．Kumchevは区間$I_1 = (1, P^{1-10\rho}]$内に素因数を持つ数をまず篩ったわけだが，同時に区間$I_2 = (P^\rho, P^{\frac{1}{2}-4\rho}]$内に素因数を持つ数も篩えるのである．つまり，先の$\Pi(P^{1-10\rho})$を，

$$\Pi_\rho = \prod_{p \in I_1 \cup I_2} p$$

で置き換えても同じ評価(4)が成立する．このことを観察しよう．(7)と同じようにして，

$$\sum_{\substack{P<x\leq 2P \\ (x,\Pi_\rho)=1}} e(x^3\alpha) = \sum_{d|\Pi_\rho} \mu(d) \sum_{P/d<y\leq 2P/d} e((dy)^3\alpha)$$

となるが，$d \leq P^{2\rho}$の寄与は前と同じで，Type Iの和として処理できる．$d > P^{2\rho}$のときは，$d|\Pi_\rho$であるから，

(i) もしdがI_2内に素因数を持たなければ，dの素因数はすべてI_1内，つまりdの素因数はすべて$P^{1-10\rho}$未満であるから，さっきと同じで，dは区間$(P^{2\rho}, P^{1-8\rho}]$内に約数を持ち，OK.

(ii) もしdがI_2内に2つ以上の素因数を持てば，$d = p_1p_2d'$ (p_1, $p_2 \in I_2$)と表せ，$P^{2\rho} < p_1p_2 \leq P^{1-8\rho}$となるから，結局$d$は区間$(P^{2\rho}, P^{1-8\rho}]$内に約数を持ち，OK.

(iii) 残るのはdがI_2内にただ1つの素因数を持つ場合だけだが，このときは$d = pd'$ ($p \in I_2$, d'の素因数はすべてI_1内)という形で，d'は区間$(P^{2\rho}/p, P^{1-8\rho}/p]$内にある約数$d''$を持つことになるから[‖]，やはり$d$は区間$(P^{2\rho}, P^{1-8\rho}]$内に約数$pd''$を持つことになって，OK.

ということで，いずれにしても$d > P^{2\rho}$の場合は前出のType IIの評価に帰着でき，結局$\mathcal{A} = \{P < x \leq 2P;\ (x, \Pi_\rho) = 1\}$に対して(4)が成立することを証明できる．即ち，$\Pi(P^{1-10\rho})$を$\Pi_\rho$に置き換えてよいということで，区間$I_2$に素因数を持つ数も篩えている分，第1段階の篩の操作で得をしていることは明らかであろう．

これ以後の篩の操作は，Kumchevのものと本質的にはそう変わらない．これ以降の，素数でないものを排除する手続きを，KumchevはBuchstabの恒等式を繰り返し使うことによって実現しているが，この操作は

[‖]ここで，$d > P^{2\rho} > P^{\frac{1}{2}-4\rho} \geq p$に注意．ただし$\rho > 1/12$を仮定して，であるが．実際，そう取るので．

weighted sieve によっても表現することができ，この方がすっきりすると思う．前節の最後に，「少なくとも見た目としては，我々の手続きの方が簡潔に見えるものと思う」と記したのは，この点を指している．さらに，weighted sieve の方が付ける重みに自由度がある分，厳密にいえば優れていると言える (ようだ—少なくとも今のところ，そう見える)．実際，インパクトは小さいけれど，weighted sieve を使ったことも，最終的な結果を良くする一因にはなっているのである．

以上のような，篩の使い方に関する工夫によって，Kumchev [5] では 5/56 あたりが上限だった ρ を，大した差ではないけれども，7/76 過ぎまで大きくすることができ，その結果として今回報告する上記の定理が得られる，というわけである．

References.

[1] J. Brüdern and K. Kawada, "On the Waring-Goldbach problem for cubes", to appear in Glasgow Math. J.

[2] L. K. Hua, "On the representation of numbers as the sum of the powers of primes," Math. Z. (1938), 335–346.

[3] K. Kawada, "Note on the sum of cubes of primes and an almost prime," Arch. Math. (Basel) 69 (1997), 13–19.

[4] 川田浩一，「素数の 3 乗の和について」，京都大学数理解析研究所講究録 1384「解析的整数論とその周辺」(2004 年 7 月)，215–220.

[5] A. V. Kumchev, "On the Waring-Goldbach problem: Exceptional sets for sums of cubes and higher powers," Canad. J. Math. 57 (2005), 298–327.

[6] A. V. Kumchev, "On Weyl sums over primes and almost primes," Michigan Math. J. 54 (2006), 243–268.

[7] X.-M. Ren, "The Waring-Goldbach problem for cubes", Acta Arith. 94 (2000), 287–301.

[8] Schwarz, "Zur Darstellung von Zahlen durch Summen von Primzahlpotenzen," J. Reine Angew. Math. 206 (1961), 78–112.

[9] R. C. Vaughan, The Hardy-Littlewood method, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1997.

[10] T. D. Wooley, "Slim exceptional sets for sums of cubes," Canad. J. Math. 54 (2002), 418–428.