

## 正規性検定統計量の提案

中川重和  
倉敷芸術科学大学\*  
SHIGEKAZU NAKAGAWA

KURASHIKI UNIVERSITY OF SCIENCE AND THE ARTS

橋口博樹  
埼玉大学大学院†  
HIROKI HASHIGUCHI  
SAITAMA UNIVERSITY

仁木直人  
東京理科大学‡  
NAOTO NIKI

TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE

### 1 はじめに

正規性の検定は統計学の古典的かつ基本的問題の一つ（例えば，[4, 11]などを参照）であり，近年では経済学のある分野においても応用されている [9, 12]．本報告では中でも総括的検定に注目し，新たな正規性の検定統計量の提案を行う．総括的検定とは，歪度，尖度の検定を個別に行うのではなく，これらを同時に行う検定方式のことである [2, 3]．特に，標本モーメントに基づく検定方式，つまり何らかの意味で標本歪度と標本尖度を組み合わせて構成された統計量に基づく方式に着目したい（なお，[8]に萌芽的研究がある）．

Jarque and Bera [6]は，ごく自然な形で組み合わせた，基準化された標本歪度の2乗と基準化された標本尖度の2乗の和として，総括的検定統計量を提案している．さらに，その統計量がPearson分布の下でのLagrange乗数検定の統計量として導かれることを示している．本報告では，Jarque-Beraタイプの統計量にある種の修正を施した統計量を提案し，その正規化変換を与える．なお，正規化変換を与える際の提案統計量分布のモーメント導出において，対称式算法 [7]と数式処理 [5]が決定的な役割を果たすことを注意する．

第2節においてJarque-Beraタイプの統計量の定義を与え，それに引き続き新たな統計量を提案する．第3節では，提案統計量分布の4次までのモーメントを与え，さらにそれに基づき正規化変換を導く．また，正規化変換の上側パーセント点とシミュレーションによるそれとの数値比較を行い，変換精度について議論する．最後に，4節では，検出力比較をJarque-Bera統計量と提案統計量において4通りの対立仮説に対する検出力の比較を行い，検定統計量としての提案統計量の妥当性を検証する．

### 2 提案統計量とその分布のモーメント

大きさ  $n$  の標本を  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  とするとき，標本歪度，標本尖度はそれぞれ  $\sqrt{b_1} = m_3/m_2^{3/2}$ ， $b_2 = m_4/m_2^2$  である．ここで， $m_r$  は  $r$  ( $\geq 2$ ) 次標本モーメントである： $m_r = (1/n) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^r$ ， $\bar{X} =$

\*nakagawa@cs.kusa.ac.jp

†hiro@mail.saitama-u.ac.jp

‡niki@ms.kagu.tus.ac.jp

$(1/n) \sum_{i=1}^n X_i$ . 与えられた標本が正規分布からの標本であると仮定すると、標本歪度  $\sqrt{b_1}$  の分布と標本尖度  $b_2$  の分布が互いに正規分布  $N(0, 6/n)$  と  $N(3, 24/n)$  に漸近的に従うことは既知である。そこで、標本歪度と標本尖度をそれぞれ漸近的な平均、分散を用いて基準化した統計量の 2 乗和が Jarque-Bera 統計量である：

$$JB = n \left[ \frac{(\sqrt{b_1})^2}{6} + \frac{(b_2 - 3)^2}{24} \right]. \quad (1)$$

もしも、標本歪度と標本尖度がそれぞれ互いに独立に正規分布に従えば、 $JB$  の分布が自由度 2 の  $\chi^2$  分布に漸近的に従うと考えてよい。しかしながら、実際は  $\sqrt{b_1}$  と  $b_2$  は無相関であるが、互いに独立ではないことに注意する [4].

次に、Urzuía [12] による Jarque-Bera 統計量の拡張を示す：

$$EJB = \frac{(\sqrt{b_1})^2}{\text{var}(\sqrt{b_1})} + \frac{(b_2 - E(b_2))^2}{\text{var}(b_2)}. \quad (2)$$

ここで、 $E(\sqrt{b_1}) = 0$ ,  $\text{var}(\sqrt{b_1}) = 6(n-2)/\{(n+1)(n+3)\}$ ,  $E(b_2) = 3(n-1)/(n+1)$ ,  $\text{var}(b_2) = 24n(n-2)(n-3)/\{(n+1)^2(n+3)(n+5)\}$ . つまり、 $EJB$  は、正規標本が得られたときの正確な平均および分散によって基準化された標本歪度と標本尖度の 2 乗和である。

本報告では、式 (1) を修正した統計量

$$JB' = \frac{(\sqrt{b_1})^2}{6} + \frac{b_2^2}{24} \quad (3)$$

を提案する。 $JB$  ではなく、なぜ  $JB'$  なのか。第一は  $JB$  の分布のキュムラントが Cornish-Fisher 条件を満足せず、第二は標本歪度と標本尖度の 2 乗和のクラスでこの条件を満足する統計量を探した結果が  $JB'$  となるからである。

実際、正規標本が与えられたとき、 $JB'$  の分布の  $j$  次モーメントを  $\mu_j(JB')$  として、4 次までの近似ではない正確なモーメントは次式となる：

$$\mu_1(JB') = (3n-5)(n^2+12n+7)/\{8(n+5)(n+3)(n+1)\}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mu_2(JB') = & (n-2)(3n^7+239n^6+6819n^5+37283n^4-8775n^3 \\ & -329451n^2-327711n-99175)n/\{2(n+9)(n+13) \\ & (n+7)(n+11)(n+5)^2(n+3)^2(n+1)^2\}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mu_3(JB') = & (n-2)(n-3)(36n^{12}+7621n^{11}+695016n^{10} \\ & +30383269n^9+394400346n^8+1869091018n^7+233869944n^6 \\ & -24473922254n^5-63720419472n^4-33172995119n^3 \\ & +20403993840n^2+23868462025n+5853965250)n/ \\ & \{(n+11)(n+21)(n+9)(n+19)(n+7)(n+17) \\ & (n+15)(n+13)(n+5)^3(n+3)^3(n+1)^3\}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mu_4(JB') = & 3(n-2)(9n^{20}+5220n^{19}+1412049n^{18} \\ & +228644814n^{17}+22887214236n^{16}+1244202171384n^{15} \\ & +21166175101484n^{14}+134655913710880n^{13} \\ & -3878927732618n^{12}-3747328484021152n^{11} \\ & -11295468689961274n^{10}+28461458338142284n^9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +162799551197327308 n^8 + 13887780973840328 n^7 \\
& -687890843630730004 n^6 - 622240355029001648 n^5 \\
& -11630675855888855 n^4 - 43790005880628100 n^3 \\
& -303698202153555375 n^2 - 203359715388506250 n \\
& -39895978711050000) n / \{4(n+17)(n+15)(n+13)(n+29) \\
& (n+11)(n+27)(n+9)(n+25)(n+7)(n+23)(n+21) \\
& (n+19)(n+5)^4(n+3)^4(n+1)^4\}. \tag{7}
\end{aligned}$$

一般のモーメントとキュムラントの関係および上式により、 $\sqrt{n}(JB' - \mu_1(JB'))/\sqrt{\mu_2(JB')}$  の分布のキュムラントは Cornish-Fisher 仮定を満足していることがわかる。なお、キュムラント導出には、Niki and Nakagawa [7] で提案された対称式算法を用いている。

### 3 提案統計量の正規化変換

本節では、提案統計量の正規化変換を与える。 $\sqrt{\beta_1(JB')}$  と  $\beta_2(JB')$  をそれぞれ、 $JB'$  分布の基準化された歪度および、基準化された尖度とする。式(5), (6), (7)より、近似的に  $\sqrt{\beta_1(JB')} = \mu_3(JB')/(\mu_2(JB'))^{3/2}$  と  $\beta_2(JB') = \mu_4(JB')/(\mu_2(JB'))^2$  は次式となる：

$$\sqrt{\beta_1(JB')} = \frac{24 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{n^{1/2}} + \frac{2750 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}} - \frac{33968 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{n^{5/2}} + O\left(\frac{1}{n^{7/2}}\right), \tag{8}$$

$$\beta_2(JB') = 3 + 860 \cdot \frac{1}{n} + 100188 \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{30624652}{9} \cdot \frac{1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \tag{9}$$

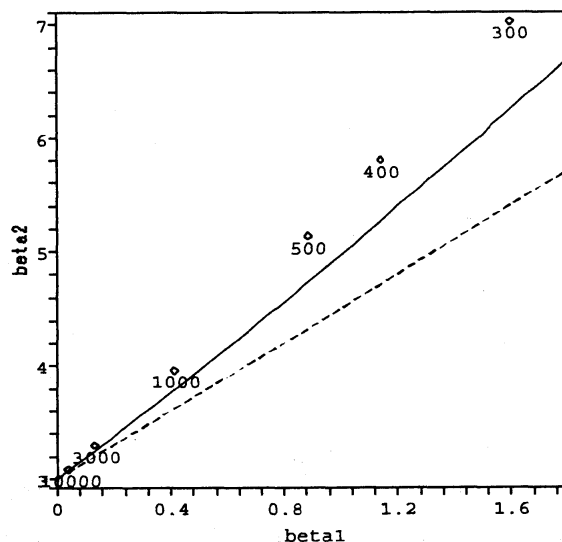


図 1: Pearson( $\beta_1, \beta_2$ ) チャート上へ  $(\beta_1(JB'), \beta_2(JB'))$  を描画:  $n = 300, 400, 500, 1000, 3000, 10000$

図 1 は, Pearson システムに対する, Pearson  $(\beta_1, \beta_2)$  チャートである [10]. 図の下側にある直線 (点線)  $2\beta_2 - 3\beta_1 - 6 = 0$  は Pearson type III 分布 ( $\chi^2$  分布) を表している. 一方, 図の上側にある曲線  $\beta_1(\beta_2 + 3)^2 = 4(4\beta_2 - 3\beta_1)(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)$  は Pearson type V 分布, つまり逆数が  $\chi^2$  分布に従う分布を表している.  $(\beta_1, \beta_2)$  チャート上に, サンプルサイズ  $n = 300, 400, 500, 1000, 3000, 10000$  に対し, 式 (8), (9) を計算した値  $(\beta_1(JB'), \beta_2(JB'))$  をプロットしている.

図 1 より, サンプルサイズ  $n$  を十分大きくするとき, 帰無分布の下では点  $(\beta_1(JB'), \beta_2(JB'))$  が Pearson システム type V 分布を表す曲線に近づくことがわかる. つまり,  $JB'$  の逆数の一次関数がある自由度を持つ  $\chi^2$  分布に漸近的に従うと考えるとよい.

上の事実を根拠とし, 提案統計量の正規化変換を与える.  $JB'$  の逆数の一次関数に従う  $\chi^2$  分布の自由度を  $A$  とし, 3 次までのモーメントが合致するように自由度  $A$  を適切に選び, さらに Wilson-Hilferty 変換を用いればよい. なお, 同様の変換は  $b_2$  の分布の正規化変換としても知られている [1].

### 命題 1

正規標本が与えられたとき,  $\sqrt{\beta_1} = \sqrt{\beta_1(JB')}$  と

$$A = 6 + \frac{8}{\sqrt{\beta_1}} \left[ \frac{2}{\sqrt{\beta_1}} + \sqrt{1 + \frac{4}{\beta_1}} \right] \quad (10)$$

とする. このとき,  $n$  が十分大きいならば

$$\left( \left( 1 - \frac{2}{9A} \right) - \left( \frac{1 - (2/A)}{1 + Z\sqrt{2/(A-4)}} \right)^{1/3} \right) / \sqrt{2/9A} \quad (11)$$

は標準正規分布に従う. ここに,  $Z = \sqrt{n}(JB' - \mu_1(JB')) / \sqrt{\mu_2(JB')}$  である.

式 (11) より, 検定に必要な上側  $100\alpha\%$  点の値を容易に得ることができる. 表 1 は,  $\alpha = 0.05, 0.01$  に関する上側  $100\alpha\%$  点  $u_\alpha$  をサンプルサイズ  $n = 40, 50, 70, 100, 200, 300, 500, 700, 1000$  に対して, 式 (11) より計算した値, および式 (3) の経験分布関数の値を示している. なお, 経験分布関数は  $10^6$  回のモンテカルロシミュレーションにより求めた値であり, この値はほぼ 3 桁まで保証されている. 従って, 表より  $n \geq 100$  であれば式 (11) はほぼ 2 桁程度は精度保証される.

表 1:  $JB'$  の上側  $100\alpha\%$  点 ( $\alpha = 0.05, 0.01$ )

$n$	$\alpha = 0.05$		$\alpha = 0.01$	
	(11)	経験分布	(11)	経験分布
40	0.75004	0.74165	1.17774	1.16679
50	0.71557	0.70876	1.09277	1.08039
70	0.66626	0.65972	0.96986	0.95163
100	0.61944	0.61396	0.85383	0.83731
200	0.54536	0.54176	0.68036	0.67171
300	0.51170	0.50890	0.60893	0.60496
500	0.47822	0.47636	0.54348	0.54194
700	0.46080	0.45963	0.51163	0.51130
1000	0.44561	0.44499	0.48506	0.48517

表 2: Power with  $10^4$  replications for  $n = 20, 35, 50, 100$  and  $\alpha = 0.1$ 

$n$		$t_5$	$\chi_2^2$	Laplace	log-normal
20	<i>JB</i>	0.314	0.790	0.397	1.000
	<i>EJB</i>	0.329	0.704	0.422	1.000
	<i>JB'</i>	0.339	0.604	0.438	0.999
35	<i>JB</i>	0.430	0.970	0.536	1.000
	<i>EJB</i>	0.441	0.943	0.562	1.000
	<i>JB'</i>	0.457	0.792	0.595	1.000
50	<i>JB</i>	0.530	0.998	0.654	1.000
	<i>EJB</i>	0.545	0.994	0.679	1.000
	<i>JB'</i>	0.569	0.889	0.723	1.000
100	<i>JB</i>	0.721	1.000	0.865	1.000
	<i>EJB</i>	0.735	1.000	0.879	1.000
	<i>JB'</i>	0.780	0.989	0.919	1.000

#### 4 検出力の比較

本節では, *JB*, *EJB*, *JB'* を正規性の検定統計量として用いる時の検出力比較を行う. つまり,

帰無仮説:  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  が標準正規分布に従う,

対立仮説:  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  が他の分布に従う,

とする検定に対し, 対立仮説の他の分布として, 自由度 5 の  $t$  分布, 自由度 2 の  $\chi^2$  分布, 平均 0, 分散 25 の Laplace 分布, 平均 0, 分散 25 の対数正規分布の 4 通りの場合を考える. 表 2 は, 有意水準  $\alpha = 0.1$ , サンプルサイズ  $n = 20, 35, 50, 100$  に対して,  $10^4$  回のシミュレーションで得られた検出力を示す. 対立仮説が自由度 2 の  $\chi^2$  分布以外では, *JB'* の検出力は他の統計量のそれとほぼ同等もしくは高い検出力を示している.

#### 参 考 文 献

- [1] Anscombe, F. J. and Glynn, W. J. Distribution of the kurtosis statistic  $b_2$  for normal samples. *Biometrika*, **70**(1), 227–234(1983).
- [2] Bowman, K. O. and Shenton, L. R. Omnibus test contours for departures from normality based on  $\sqrt{b_1}$  and  $b_2$ . *Biometrika*, **62**(2), 243–250(1975).
- [3] D'Agostino, R. B. and Pearson, E. S. Tests for departure from normality. Empirical results for the distributions of  $b_2$  and  $\sqrt{b_1}$ . *Biometrika*, **60**, 613–622(1973).
- [4] D'Agostino, R. B. and Stephens, M. A. *Goodness-Of-Fit Techniques (Statistics, a Series of Textbooks and Monographs)* Marcel Dekker Inc., New York., (1986).

- [5] Hearn, A. C. *REDUCE User's Manual, Version 3.8. Report*, (2004).
- [6] Jarque, C. M. and Bera, A. K. A test for normality of observations and regression residuals. *Internat. Statist. Rev.*, **55**(2), 163–172(1987).
- [7] Niki, N. and Nakagawa, S. Computer algebra application to the distribution theory of multivariate statistics, *Proceedings of the First Asian Technological Conference in Mathematics*, 689-696(1995).
- [8] Nakagawa, S., Niki, N. and Hashiguchi, H. An omnibus test for normality. *Proceedings of the ninth Japan-China symposium on statistics*, 191-194 (2007).
- [9] Poitras, G. More on the correct use of omnibus tests for normality. *Econom. Lett.* **90**(3), 304–309(2006).
- [10] Stuart, A and Ord, J. K. *Kendall's Advanced Theory of Statistics, vol. I, 6th ed.*, Edward Arnold, (1994).
- [11] Thode, H. C. *Testing for normality (Statistics, a Series of Textbooks and Monographs)*. Marcel Dekker Inc., New York (2002).
- [12] Urzúa, C. M. On the correct use of omnibus tests for normality. *Econom. Lett.*, 90(3), 304–309(1996).