

# 特異点定義方程式のパラメータに関する簡単化の提案

高橋 正

TADASHI TAKAHASHI

神戸大学人間発達環境学研究科

GRADUATE SCHOOL OF HUMAN DEVELOPMENT AND ENVIRONMENT, KOBE UNIVERSITY \*

## 1 はじめに

私は、これまで、グレブナー基底を用いて、simple K3 特異点定義方程式の退化条件導出に関する研究を行ってきた。特異点定義方程式のパラメータは、様々な表示が可能であり、その退化条件を表す関係式も、最初に設定するパラメータの表示に依存する。そのパラメータ空間の構造は本質的には同じものを表している。それならば、その構造を端的に示す最も簡単な関係式が望ましい。

## 2 これまでに調べたこと

Simple K3 特異点定義方程式の退化条件導出に関して、パラメータ空間の次元が 1, 2 であるものについては、以下の結果を得た ([1])。

No.	The defining equations
$f_{52}$	$x^3 + \lambda xyzw + xz^3 + y^4 + zw^4$
$f_{56}$	$x^2y + y^3z + \lambda yz^2w^2 + z^5 + w^6$
$f_{73}$	$x^2 + y^5 + \lambda y^2z^2w^2 + yz^5 + zw^6$

No.	The non-degeneracy conditions
$f_{52}$	$\lambda^4 - 256 \neq 0$
$f_{56}$	$\lambda^3 + 27 \neq 0$
$f_{73}$	$\lambda^3 + 27 \neq 0$

パラメータが 1 つだと、simple elliptic singularities の時と同じような関係式となる。

No.	The defining equations
$f_{46}$	$x^2 + y^3 + \lambda yz^4w^4 + z^{11} + \mu z^6w^6 + zw^{12}$
$f_{61}$	$x^2z + y^4 + \lambda y^2zw^2 + z^4w + \mu z^2w^4 + w^7$
$f_{65}$	$x^2z + y^3 + \lambda yz^2w^4 + z^6w + \mu z^3w^6 + w^{11}$
$f_{80}$	$x^2 + y^3z + \lambda yz^3w^4 + z^8w + \mu z^4w^6 + w^{11}$

\*takahasi@kobe-u.ac.jp

No.	The non-degeneracy conditions
$f_{46}$	$(108 + 4\lambda^3 - 108\mu + 27\mu^2)(108 + 4\lambda^3 + 108\mu + 27\mu^2) \neq 0$
$f_{61}$	$(-2 + \lambda)(2 + \mu)(-8 + \lambda^2 - 4\mu)(8 + \lambda^2 - 4\mu) \neq 0$
$f_{65}$	$(108 + 4\lambda^3 - 108\mu + 27\mu^2)(108 + 4\lambda^3 + 108\mu + 27\mu^2) \neq 0$
$f_{80}$	$(108 + 4\lambda^3 - 108\mu + 27\mu^2)(108 + 4\lambda^3 + 108\mu + 27\mu^2) \neq 0$

パラメータが2つになると、人間の煩悩のように  $108=2^23^3$  が沢山出てくる。このくらいになると、もっと、簡単な表示ができないかと思えてくる。

### 3 特異点定義方程式のパラメータに関する簡単化とは？

特異点定義方程式のパラメータを簡単化するとは、表記するパラメータの個数を少なくするという考え方があ。その考え方だけをとるのであれば、上記の方法でよい。しかし、求める退化条件を簡単化するためには、退化条件から逆に考えることが必要になる。

退化条件を最も簡単な表記にするパラメータ設定を考えてみる。その時、simple  $K3$  特異点定義方程式のパラメータを以下のように設定することができる ([1])。

No.	The defining equations
$f_{52}$	$x^3 + 4\lambda xyzw + xz^3 + y^4 + zw^4$
$f_{56}$	$x^2y + y^3z + 3\lambda yz^2w^2 + z^5 + w^6$
$f_{73}$	$x^2 + y^5 + 3\lambda y^2z^2w^2 + yz^5 + zw^6$

No.	The non-degeneracy conditions
$f_{52}$	$\lambda^4 - 1 \neq 0$
$f_{56}$	$\lambda^3 + 1 \neq 0$
$f_{73}$	$\lambda^3 + 1 \neq 0$

No.	The defining equations
$f_{46}$	$x^2 + y^3 + 3\lambda yz^4w^4 + z^{11} + 2\mu z^6w^6 + zw^{12}$
$f_{61}$	$x^2z + y^4 + 2\sqrt{2}\lambda y^2zw^2 + z^4w + 2\mu z^2w^4 + w^7$
$f_{65}$	$x^2z + y^3 + 3\lambda yz^2w^4 + z^6w + 2\mu z^3w^6 + w^{11}$
$f_{80}$	$x^2 + y^3z + 3\lambda yz^3w^4 + z^8w + 2\mu z^4w^6 + w^{11}$

No.	The non-degeneracy conditions
$f_{46}$	$(\lambda^3 + \mu^2 + 1)^2 - 4\mu^2 \neq 0$
$f_{61}$	$(\mu^2 - 1)((\lambda^2 - \mu)^2 - 1) \neq 0$
$f_{65}$	$(\lambda^3 + \mu^2 + 1)^2 - 4\mu^2 \neq 0$
$f_{80}$	$(\lambda^3 - \mu^2 + 1)^2 - 4\mu^2 \neq 0$

この2系統に関しては、 $\mu = 0$  の時、パラメータが1つの場合に一致する。

数学的な美しさとは？

その美しさの下での moduli 空間の構造とは？

私は、特異点定義方程式のパラメータの簡単化とは、退化条件を最も簡単な式として表現できるパラメータ表示をすることと提案したい。数式処理システムを用いることで、退化条件を最も簡単な式にするパラメータ表示を見出すことが容易になる。このようにパラメータを設定をすることは、退化条件導出計算を省力化することにもなる。

#### 4 まだ渾沌としていること

Simple K3 特異点定義方程式の退化条件導出において、パラメータ空間の次元が 2, 3 であるものについても、まだ、以下のように美しいとはいえない状況のものが多い。

No.	The defining equations
$f_{30}$	$x^2 + y^5 + 5\lambda y^2 z^2 w^2 + 5\mu y z w^5 + z^5 w + w^8$
$f_{84}$	$x^3 + \lambda x y z w + x z^3 + y^3 z + y w^4 + \mu z^2 w^3$
$f_{86}$	$x^2 y + x w^4 + y^3 w + 5\lambda y z^2 w^2 + z^5 + 5\mu z w^5$
$f_{91}$	$x^2 + y^4 z + 3\lambda y^2 z^2 w^2 + y z^5 + y w^6 + 3\mu z^3 w^4$

No.	The non-degeneracy conditions
$f_{30}$	$16\lambda^5 + 20\lambda^2\mu - 40\lambda^4\mu^2 - 45\lambda\mu^3 + 25\lambda^3\mu^4 + 27\mu^5 + 1 \neq 0$
$f_{84}$	$(\lambda^2 - \lambda^3\mu - 27\mu^2)^2 - 4(9\lambda\mu - 8)^2 \neq 0$
$f_{86}$	$64\lambda^5 + 80\lambda^2\mu + 600\lambda^4\mu^2 + 720\lambda\mu^3 + 1600\lambda^3\mu^4 + 1728\mu^5 - 1 \neq 0$
$f_{91}$	$\mu(\lambda^3 - 12\lambda\mu - 9\lambda^4\mu + 24\lambda^2\mu^2 - 16\mu^3 + 1) \neq 0$

No.	The defining equations
$f_{57}$	$x^2 y + a x z^3 + y^4 + \lambda y^2 w^3 + \mu y z^2 w^2 + b z^4 w + w^6 (a \neq 0 \text{ or } b \neq 0)$
$f_{57}$	$x^2 y + x z^3 + y^4 + \lambda y^2 w^3 + \mu y z^2 w^2 + \nu z^4 w + w^6 (\text{for the above } a \neq 0)$
$f_{57}$	$x^2 y + y^4 + \lambda y^2 w^3 + \mu y z^2 w^2 + z^4 w + w^6 (\text{for the above } a = 0)$
$f_{64}$	$x^2 z + a x y^2 + b y^3 w + \lambda y^2 z w^2 + \mu y z^2 w^3 + z^6 + \nu z^3 w^4 + w^8 (a \neq 0 \text{ or } b \neq 0)$
$f_{64}$	$x^2 z + x y^2 + \lambda y^2 z w^2 + \mu y z^2 w^3 + z^6 + \nu z^3 w^4 + w^8 (\text{for the above } a \neq 0)$
$f_{64}$	$x^2 z + y^3 w + \lambda y z^2 w^3 + z^6 + \mu z^3 w^4 + w^8 (\text{for the above } a = 0)$
$f_{68}$	$x^2 z + y^3 + y z^5 + \lambda y z^2 w^4 + \mu z^6 w^2 + \nu z^3 w^6 + w^{10}$
$f_{74}$	$x^2 + y^4 w + \lambda y^2 z^2 w^2 + y z^5 + \mu y z w^5 + \nu z^4 w^3 + w^8$
$f_{83}$	$x^2 + y^3 + \lambda y z^4 w^4 + y w^9 + z^{10} w + \mu z^6 w^6 + \nu z^2 w^{11}$
$f_{90}$	$x^2 + y^4 z + \lambda y^2 z^2 w^2 + \mu y^2 w^5 + z^5 w + \nu z^3 w^4 + z w^7$
$f_{92}$	$x^2 + y^3 z + \lambda y z^3 w^4 + a y w^9 + z^7 w + \mu z^4 w^6 + b z w^{11} (a \neq 0 \text{ or } b \neq 0)$
$f_{92}$	$x^2 + y^3 z + \lambda y z^3 w^4 + y w^9 + z^7 w + \mu z^4 w^6 + \nu z w^{11} (\text{for the above } a \neq 0)$
$f_{92}$	$x^2 + y^3 z + \lambda y z^3 w^4 + z^7 w + \mu z^4 w^6 + z w^{11} (\text{for the above } a = 0)$

The non-degeneracy conditions are as follows:

$$f_{57} (a \neq 0) : (-2 + \lambda)(2 + \lambda)(108 - 108\lambda + 27\lambda^2 - 16\mu^3 - 144\mu\nu + 72\lambda\mu\nu - 16\mu^2\nu^2 - 128\nu^3 + 64\lambda\nu^3)(108 + 108\lambda + 27\lambda^2 - 16\mu^3 + 144\mu\nu + 72\lambda\mu\nu - 16\mu^2\nu^2 + 128\nu^3 + 64\lambda\nu^3) \neq 0.$$

$$f_{57} (a = 0) : (-2 + \lambda)(2 + \lambda)(-8 + 4\lambda - \mu^2)(8 + 4\lambda - \mu^2) \neq 0.$$

$$f_{64} (a \neq 0) : (-512 + 512\lambda^2 - 128\lambda^4 + 288\lambda\mu^2 - 16\lambda^3\mu^2 + 27\mu^4 + 768\nu - 512\lambda^2\nu + 64\lambda^4\nu - 144\lambda\mu^2\nu - 384\nu^2 + 128\lambda^2\nu^2 + 64\nu^3)(512 + 512\lambda^2 + 128\lambda^4 - 288\lambda\mu^2 - 16\lambda^3\mu^2 + 27\mu^4 + 768\nu + 512\lambda^2\nu + 64\lambda^4\nu - 144\lambda\mu^2\nu + 384\nu^2 + 128\lambda^2\nu^2 + 64\nu^3) \neq 0.$$

$$f_{64} (a = 0) : (108 + 4\lambda^3 - 108\mu + 27\mu^2)(108 + 4\lambda^3 + 108\mu + 27\mu^2) \neq 0.$$

$$f_{68} : 3125 + 16\lambda^5 + 4125\lambda^2\mu + 16\lambda^7\mu + 888\lambda^4\mu^2 + 16200\lambda\mu^3 + 16\lambda^6\mu^3 + 864\lambda^3\mu^4 + 11664\mu^5 - 5625\lambda\nu - 16\lambda^6\nu - 3420\lambda^3\mu\nu - 13500\mu^2\nu - 2592\lambda^2\mu^3\nu + 2700\lambda^2\nu^2 + 216\lambda^4\mu\nu^2 - 5670\lambda\mu^2\nu^2 + 216\lambda^3\mu^3\nu^2 - 5832\mu^4\nu^2 - 216\lambda^3\nu^3 + 6075\mu\nu^3 + 729\lambda\mu\nu^4 + 729\mu^3\nu^4 - 729\nu^5 \neq 0.$$

$$f_{74} : 3125 + 16\lambda^5 + 500\lambda^2\mu - 8\lambda^4\mu^2 - 225\lambda\mu^3 + \lambda^3\mu^4 + 27\mu^5 - 200\lambda^3\nu - 5000\mu\nu - 16\lambda^5\mu\nu - 430\lambda^2\mu^2\nu + 8\lambda^4\mu^3\nu + 216\lambda\mu^4\nu - \lambda^3\mu^5\nu - 27\mu^6\nu + 4000\lambda\nu^2 + 16\lambda^6\nu^2 + 704\lambda^3\mu\nu^2 + 1800\mu^2\nu^2 - 8\lambda^5\mu^2\nu^2 - 296\lambda^2\mu^3\nu^2 + \lambda^4\mu^4\nu^2 + 36\lambda\mu^5\nu^2 - 192\lambda^4\nu^3 - 2560\lambda\mu\nu^3 + 64\lambda^3\mu^2\nu^3 + 32\mu^3\nu^3 - 8\lambda^2\mu^4\nu^3 + 768\lambda^2\nu^4 - 128\lambda\mu^2\nu^4 + 16\mu^4\nu^4 - 1024\nu^5 \neq 0.$$

$$f_{83} : 3125 + 16\lambda^5 - 5625\lambda\mu - 16\lambda^6\mu + 2700\lambda^2\mu^2 - 216\lambda^3\mu^3 - 729\mu^5 + 4125\lambda^2\nu + 16\lambda^7\nu - 3420\lambda^3\mu\nu + 216\lambda^4\mu^2\nu + 6075\mu^3\nu + 729\lambda\mu^4\nu + 888\lambda^4\nu^2 - 13500\mu\nu^2 - 5670\lambda\mu^2\nu^2 + 16200\lambda\nu^3 + 16\lambda^6\nu^3 - 2592\lambda^2\mu\nu^3 + 216\lambda^3\mu^2\nu^3 + 729\mu^4\nu^3 + 864\lambda^3\nu^4 - 5832\mu^2\nu^4 + 11664\nu^5 \neq 0.$$

$$f_{90} : \mu(-2 + \nu)(2 + \nu)(64 - \lambda^4 - 96\lambda\mu + \lambda^5\mu + 30\lambda^2\mu^2 + \lambda^3\mu^3 + 27\mu^4 + 8\lambda^2\nu - 8\lambda^3\mu\nu + 72\mu^2\nu - \lambda^4\mu^2\nu - 36\lambda\mu^3\nu - 16\nu^2 + 16\lambda\mu\nu^2 + 8\lambda^2\mu^2\nu^2 - 16\mu^2\nu^3) \neq 0.$$

$$f_{92} (a \neq 0) : 3125 + 16\lambda^5 - 5625\lambda\mu - 16\lambda^6\mu + 2700\lambda^2\mu^2 - 216\lambda^3\mu^3 - 729\mu^5 + 4125\lambda^2\nu + 16\lambda^7\nu - 3420\lambda^3\mu\nu + 216\lambda^4\mu^2\nu + 6075\mu^3\nu + 729\lambda\mu^4\nu + 888\lambda^4\nu^2 - 13500\mu\nu^2 - 5670\lambda\mu^2\nu^2 + 16200\lambda\nu^3 + 16\lambda^6\nu^3 - 2592\lambda^2\mu\nu^3 + 216\lambda^3\mu^2\nu^3 + 729\mu^4\nu^3 + 864\lambda^3\nu^4 - 5832\mu^2\nu^4 + 11664\nu^5 \neq 0.$$

$$f_{92} (a = 0) : (108 + 4\lambda^3 - 108\mu + 27\mu^2)(108 + 4\lambda^3 + 108\mu + 27\mu^2) \neq 0.$$

これらの関係式も、何か美しい表示が潜んでいるのではないかと考えている。それを見出すことは、数式処理システムではなく、人間の思考と洞察力であろう。

## 参 考 文 献

- [1] T. Takahashi, An Application of Greobner Bases for the Moduli of Hypersurface Simple K3 Singularities, 数式処理, Vol. 11, No.3,4, pp. 43–55, 2005.