数理解析研究所講究録
第 1667 巻 2009 年 160-168

バナッハ空間での収縮射影法による不動点近似

東京工業大学・大学院情報理工学研究科
木村泰紀 (Yasunori Kimura)

1 はじめに

実バナッハ空間の空でない閉凸集合 C 上で定義された非拡大写像に対する不動点問題を考えよう. すなわち, 写像 $T: C \to C$ が任意の $x, y \in C$ に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ をみたすとき, 集合 $F(T) = \{z \in C : z = Tz\}$ の点を求める問題である. この問題の解を近似する点列を求める方法は, 解の存在定理等とともに多くの研究がなされている. また, 写像の族に対する共通不動点を求める問題についても同様に研究が進められている.

一方, 近年盛んに研究されている写像の一つとして relatively nonexpansive 写像がある. これはヒルベルト空間における非拡大写像をバナッハ空間において拡張した概念の一つであるが, 極大単調作用素のリゾルベント等がこの写像の例となっていることもあり, その性質の解明が急速に進んでいる.

2008 年, Takahashi, Takeuchi, Kubota によって, 次の定理が証明された.

定理 1 (Takahashi-Takeuchi-Kubota [11]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を C からそれ自身への非拡大写像の族とする. また, $\{S_n\}$ を C 上の非拡大写像列で

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n) \supset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F(T_\lambda) \neq \emptyset$$

をみたすものとし, さらに $\{S_n\}$ は $\{T_\lambda\}$ に関する NST 条件 (I) をみたすものと仮定する. $\{\alpha_n\}$ を $[0, a]$ の数列とする. ただし $0 < a < 1$ である. 点 $x \in H$ に対し, 次の手順によっ

Key words and phrases. nonexpansive mapping, relatively nonexpansive mapping, hybrid method, approximation, fixed point, maximal monotone operator, resolvent, metric projection, generalized projection
2000 *Mathematics Subject Classification.* 47H09

て点列 $\{x_n\}$ を構成する: $x_1 \in C$, $C_1 = C$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) S_n x_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|z - y_n\| \le \|z - x_n\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x \end{cases}$$

とする. このとき $\{x_n\}$ は $P_F x \in C$ へと強収束する. ただし P_K は閉凸集合 K への距離射影であり, $F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F(T_\lambda)$ である.

この定理は次のような形で著者によってバナッハ空間での強収束定理に拡張されている.

定理 2 (Kimura [5]). E を狭義凸で回帰的なバナッハ空間とし, Kadec-Klee 条件およびノルムの Fréchet 微分可能性を仮定する. C を E の空でない閉凸集合とし, $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を C からそれ自身への relatively nonexpansive 写像の族とする. また, $\{S_n\}$ を C 上の relatively nonexpansive 写像列で

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n) \supset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F(T_\lambda) \neq \emptyset$$

をみたすものとし, さらに $\{S_n\}$ は $\{T_\lambda\}$ に関する NST 条件 (I) をみたすものと仮定する. $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の数列で, $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ をみたすものとする. 点 $x \in E$ に対し, 次の手順によって点列 $\{x_n\}$ を構成する: $x_1 \in C$, $C_1 = C$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n = J^*(\alpha_n J x_n + (1-\alpha_n) J S_n x_n), \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \phi(z, y_n) \le \phi(z, x_n)\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x \end{cases}$$

とする. このとき $\{x_n\}$ は $P_F x \in C$ へと強収束する. ただし P_K は閉凸集合 K への距離射影であり, $F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F(T_\lambda)$ である.

なお, 本定理の仮定に現れる NST 条件 (I) とは次の条件である: C を E の空でない閉凸集合とし, $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を C からそれ自身への relatively nonexpansive 写像の族とする. また, $\{S_n\}$ を C 上の relatively nonexpansive 写像列で

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n) \supset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F(T_\lambda) \neq \emptyset$$

をみたすものとする. $\{S_n\}$ が $\{T_\lambda\}$ に関する NST 条件 (I) [9] をみたすとは, C の任意の有界点列 $\{w_n\}$ で $\lim_{n\to\infty} \|w_n - S_n w_n\| = 0$ ものに対してつねに

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n - T_\lambda w_n\| = 0$$

が $\lambda \in \Lambda$ に対して成り立つことをいう.

この定義において, relatively nonexpansive 写像の族を非拡大写像の族に置き換えれば, [9] による定義と一致する. したがって, 定理 2 は定理 1 の一種の拡張となっている.

本稿では, これらの定理で仮定されている NST 条件 (I) をさらに弱めた形の条件を考察し, その条件のもとで強収束定理を証明する. 証明方法は [6] および [5] で用いられた, 集合値解析の手法を用いたものである.

2 準備

本稿であつかう空間はつねに実バナッハ空間である. 実バナッハ空間 E に対し, その共役空間を E^*, $x \in E$ のノルムを $\|x\|$, $x^* \in E^*$ の x での値を $\langle x, x^* \rangle$ でそれぞれあらわす.

$B = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とし, $B \times B \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上の関数 $f(x, y, t) = (\|x + ty\| - \|x\|)/t$ を考えよう. E が滑らかであるとは, 任意の $x, y \in B$ において $\lim_{t \to 0} f(x, y, t)$ が存在することをいう. また, この極限が $y \in B$ に関して一様に収束するとき, E は Fréchet 微分可能なノルムをもつという.

E から E^* への集合値写像 J が

$$Jx = \{x^* \in E : \|x\|^2 = \langle x, x^* \rangle = \|x^*\|^2\}$$

と定義されるとき, J を双対写像という. E が回帰的かつ狭義凸で滑らかなバナッハ空間のとき, J は全単射となり, このとき E^* 上の双対写像 J^* は J の逆写像となる. さらに, E が Fréchet 微分可能なノルムを持つときは, J はノルム位相からノルム位相の意味で連続な写像となる.

$x \in E$ に弱収束する E の点列 $\{x_n\}$ が $\|x_n\| \to \|x\|$ をみたすときに $\{x_n\}$ が x に強収束することが導かれるとき, E は Kadec-Klee 条件をみたすという. E^* が Fréchet 微分可能なノルムをもつことと, E が回帰的で狭義凸なバナッハ空間で, さらに Kadec-Klee 条件をみたすことは同値である. 詳細は [10] を参照せよ.

E を回帰的で狭義凸かつ滑らかなバナッハ空間とし, $E \times E$ 上の関数 ϕ を, $x, y \in E$ に対して

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$$

で定義する. C を E の空でない閉凸集合とするとき, 写像 $S : C \to C$ が relatively nonexpansive [2, 3, 4, 7] であるとは, $F(S) = \hat{F}(S) \neq \emptyset$ であり, さらに任意の $z \in F(S)$ と $x \in C$ に対して

$$\phi(z, Sx) \leq \phi(z, x)$$

が成り立つことをいう. ただし, $F(S)$, $\hat{F}(S)$ はそれぞれ

$$F(S) = \{z \in C : z = Sz\},$$
$$\hat{F}(S) = \{u \in C : \exists \{u_n\} \subset C, u_n \rightharpoonup u, \|u_n - Su_n\| \to 0 \ (n \to \infty)\}$$

で定義される C の部分集合である. ここで $u_n \rightharpoonup u$ は $\{u_n\}$ が u に弱収束することをあらわしている.

回帰的バナッハ空間 E の空でない閉凸集合列を $\{C_n\}$ とする. これに対して $\text{s-Li}_n C_n$ および $\text{w-Ls}_n C_n$ を

$$\operatorname*{s-Li}_n C_n = \{x \in E : \exists \{x_n\},\ x_n \to x,\ x_n \in C_n\ (\forall n \in \mathbb{N})\},$$
$$\operatorname*{w-Ls}_n C_n = \{x \in E : \exists \{x_{n_i}\},\ x_{n_i} \rightharpoonup x,\ x_{n_i} \in C_{n_i}\ (\forall i \in \mathbb{N})\}$$

で定義する. E の閉凸集合 C_0 に対して $C_0 = \text{s-Li}_n C_n = \text{w-Ls}_n C_n$ が成り立つとき, $\{C_n\}$ は C_0 に Mosco 収束する [8] といい,

$$C_0 = \operatorname*{M-lim}_{n \to \infty} C_n$$

とあらわす. 詳細は [1] を参照せよ.

3 収縮射影法による収束定理

本節では, 写像族に仮定されていた NST 条件 (I) を弱めた条件を仮定し, 定理 2 と同様の結果を導く. ただし, 係数 $\{\alpha_n\}$ の条件については定理 2 より強い条件を仮定する. これは定理 1 で仮定されているものと同じである.

最初に主定理の証明で用いられる, 集合列の収束とそれに対応する距離射影列の関係を述べた次の結果を紹介しよう.

定理 3 (Tsukada [12]). E を回帰的かつ狭義凸なバナッハ空間で Kadec-Klee 条件をみたすものとし, $\{C_n\}$ を E の空でない閉凸集合の列とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, P_{C_n} を E から C_n への距離射影とする. このとき, $\text{M-lim}_{n\to\infty} C_n = C_0$ が存在して空でないならば, 任意の $x \in E$ に対して $\{P_{C_n}x\}$ は $P_{C_0}x \in C$ に強収束する.

では, 本稿の主定理を述べよう.

定理 4. E を狭義凸で回帰的なバナッハ空間とし, Kadec-Klee 条件およびノルムの Fréchet 微分可能性を仮定する. C を E の空でない閉凸集合とし, $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を C から

それ自身への relatively nonexpansive 写像の族とする．また，$\{S_n\}$ を C 上の relatively nonexpansive 写像列で

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n) \supset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F(T_\lambda) \neq \emptyset$$

をみたすものとし，さらに次の条件を仮定する：

(∗) C の点列 $\{w_n\}$ と $\{S_n w_n\}$ がともに $w \in C$ に強収束するならば，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\{T_\lambda w_n\}$ も w に強収束する．

また，$\{\alpha_n\}$ を $[0, a]$ の数列とする．ただし $0 < a < 1$ である．点 $x \in E$ に対し，次の手順によって点列 $\{x_n\}$ を構成する：$x_1 \in C$, $C_1 = C$ とし，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n = J^*(\alpha_n J x_n + (1 - \alpha_n) J S_n x_n), \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \phi(z, y_n) \leq \phi(z, x_n)\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x \end{cases}$$

とする．このとき $\{x_n\}$ は $P_F x \in C$ へと強収束する．ただし P_K は閉凸集合 K への距離射影であり，$F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F(T_\lambda)$ である．

注意． 条件 (∗) は NST 条件 (I) よりも弱い条件である．実際，NST 条件 (I) が成り立っていると仮定をしよう．このとき，$\{w_n\}$ と $\{S_n w_n\}$ がともに $w \in C$ に強収束するという (∗) の仮定から $\{w_n\}$ は有界でありかつ

$$\lim_{n \to \infty} \|w_n - S_n w_n\| = \lim_{n \to \infty} \|w - w\| = 0$$

が成り立つ．よって NST 条件 (I) より

$$\lim_{n \to \infty} \|w_n - T_\lambda w_n\| = 0$$

が任意の $\lambda \in \Lambda$ で成り立つが，$\{w_n\}$ は w に強収束することから $\{T_\lambda w_n\}$ も w に強収束し，(∗) がみたされていることがわかる．

証明． ϕ の定義を用いると

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \{z \in C_n : \phi(z, y_n) \leq \phi(z, x_n)\} \\ &= \{z \in C : 2 \langle z, J x_n - J y_n \rangle + \|y_n\|^2 - \|x_n\|^2 \leq 0\} \cap C_n \end{aligned}$$

とあらわすことができる．$C_1 = C$ は明らかに閉凸集合なので，数学的帰納法により $\{C_n\}$

は閉凸集合列である．また，$z \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F(S_k)$ とすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
\phi(z, y_n) &= \phi(z, J^*(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JS_n x_n)) \\
&= \|z\|^2 - 2\langle z, JJ^*(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JS_n x_n)\rangle \\
&\quad + \|J^*(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JS_n x_n)\|^2 \\
&= \|z\|^2 - 2\langle z, \alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JS_n x_n\rangle \\
&\quad + \|\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JS_n x_n\|^2 \\
&\leq \|z\|^2 - 2\alpha_n\langle z, Jx_n\rangle - 2(1-\alpha_n)\langle z, JS_n x_n\rangle \\
&\quad + \alpha_n\|x_n\|^2 + (1-\alpha_n)\|S_n x_n\|^2 \\
&\leq \alpha_n(\|z\|^2 - 2\langle z, Jx_n\rangle + \|x_n\|^2) \\
&\quad + (1-\alpha_n)(\|z\|^2 - 2\langle z, JS_n x_n\rangle + \|S_n x_n\|^2) \\
&= \alpha_n\phi(z, x_n) + (1-\alpha_n)\phi(z, S_n x_n) \\
&\leq \alpha_n\phi(z, x_n) + (1-\alpha_n)\phi(z, x_n) \\
&= \phi(z, x_n)
\end{aligned}$$

となり，$z \in C_{n+1}$ が成り立つ．$z \in C_1 = C$ は明らかに成り立つので，$\emptyset \neq \bigcap_{k=1}^{\infty} F(S_k) \subset C_n$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ．したがって $\{C_n\}$ は空でない閉凸集合の列であり，P_{C_n} が $n \in \mathbb{N}$ に対して存在するので $\{x_n\}$ は妥当な定義となっている．また，$\{C_n\}$ は包含関係に関して単調非増加であるから

$$\operatorname*{M-lim}_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

であり，また

$$\emptyset \neq \bigcap_{k=1}^{\infty} F(S_k) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

であるから，$C_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ とすると定理 3 より $\{P_{C_n}x\}$ は $P_{C_0}x$ に強収束する．つまり $\{x_n\}$ が $P_{C_0}x$ に強収束することがわかる．$x_0 = P_{C_0}x$ が $F = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F(T_\lambda)$ に属することを示そう．$x_0 \in C_n$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つので，$0 \leq \phi(x_0, y_n) \leq \phi(x_0, x_n)$ が成り立ち，さらに $\{\phi(x_0, x_n)\}$ は 0 に収束するので $\{\phi(x_0, y_n)\}$ も 0 に収束する．したがって $\{y_n\}, \{Jy_n\}$ はともに有界である．$\{Jy_{n_i}\}$ を $\{Jy_n\}$ の任意の部分列としよう．このとき $\{n_i\}$ のある部分列 $\{n_{i_j}\}$ が存在して，$\{Jy_{n_{i_j}}\}$ が $y_0^* \in E^*$ に弱収束する．各 $j \in \mathbb{N}$ に対して $y_{n_{i_j}} = v_j$ とあらわすと，

$$(\|x_0\| - \|v_j\|)^2 = \|x_0\|^2 - 2\|x_0\|\|v_j\| + \|v_j\|^2 \leq \phi(x_0, v_j) = \phi(x_0, y_{n_{i_j}})$$

が成り立つ. よって $\lim_{j\to\infty}\|Jv_j\| = \lim_{j\to\infty}\|v_j\| = \|x_0\|$ が得られ,

$$\lim_{j\to\infty}\langle x_0, v_j\rangle = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{2}(\|x_0\|^2 + \|v_j\|^2 - \phi(x_0, v_j)) = \|x_0\|^2$$

が成り立つ. さらにノルムの弱下半連続性より

$$\begin{aligned}\|x_0\|^2 &= \lim_{j\to\infty}\langle x_0, Jv_j\rangle = \langle x_0, y_0^*\rangle \\ &\le \|x_0\|\,\|y_0^*\| \\ &\le \|x_0\|\liminf_{j\to\infty}\|Jv_j\| = \|x_0\|\lim_{j\to\infty}\|Jv_j\| \\ &= \|x_0\|^2.\end{aligned}$$

したがって $y_0^* = Jx_0$ が成り立つ. 仮定より E は Fréchet 微分可能なノルムを持つので, E^* は Kadec-Klee 条件をみたし,

$$\lim_{j\to\infty}\|Jv_j\| = \lim_{j\to\infty}\|v_j\| = \|x_0\| = \|Jx_0\|$$

より $\{Jv_j\} = \{Jy_{n_{i_j}}\}$ は Jx_0 に強収束することがわかる. したがって, $\{Jy_n\}$ の任意の部分列 $\{Jy_{n_i}\}$ が, Jx_0 に強収束する部分列を持つことから, $\{Jy_n\}$ 自身が Jx_0 に強収束することが得られた. ここで

$$\begin{aligned}\|Jx_0 - Jy_n\| &= \|Jx_0 - (\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JS_nx_n)\| \\ &\ge \|Jx_0 - \alpha_n Jx_0 - (1-\alpha_n)JS_nx_n\| - \alpha_{i_j}\|Jx_n - Jx_0\| \\ &= (1-\alpha_n)\|Jx_0 - JS_nx_n\| - \alpha_n\|Jx_n - Jx_0\|\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\|Jx_0 - JS_nx_n\| &\le \frac{1}{1-\alpha_n}(\|Jx_0 - Jy_n\| + \alpha_n\|Jx_n - Jx_0\|) \\ &\le \frac{1}{1-a}(\|Jx_0 - Jy_n\| + \alpha_n\|Jx_n - Jx_0\|)\end{aligned}$$

が $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ. 再び E が Fréchet 微分可能なノルムを持つことから, J がノルム位相からノルム位相で連続となることを用いて

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\|Jx_0 - JS_nx_n\| \le \frac{1}{1-a}(0+0) = 0.$$

さらに仮定より, E^* も Fréchet 微分可能なノルムを持つことから, J^* もノルム位相からノルム位相で連続となり,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_0 - S_nx_n\| = \lim_{n\to\infty}\|J^*Jx_0 - J^*JS_nx_n\| = 0$$

を得る. 条件 $(*)$ より, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\{T_\lambda x_n\}$ も x_0 に強収束する. したがって, $x_0 \in \hat{F}(T_\lambda) = F(T_\lambda)$ が任意の $\lambda \in \Lambda$ で成り立つので $x_0 \in F$ が示された. $x_0 = P_{C_0}x$ であり, さらに $x_0 \in F \subset C_0$ であることから, $x_0 = P_F x$ が成り立つことが得られ, これで定理が示された. $\square$

参考文献

[1] G. Beer, *Topologies on closed and closed convex sets*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[2] D. Butnariu, S. Reich, and A. J. Zaslavski, *Asymptotic behavior of relatively nonexpansive operators in Banach spaces*, J. Appl. Anal. **7** (2001), 151–174.

[3] D. Butnariu, S. Reich, and A. J. Zaslavski, *Weak convergence of orbits of nonlinear operators in reflexive Banach spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. **24** (2003), 489–508.

[4] Y. Censor and S. Reich, *Iterations of paracontractions and firmly nonexpansive operators with applications to feasibility and optimization*, Optimization **37** (1996), 323–339.

[5] Y. Kimura, *Strong convergence theorems by a hybrid method for families of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proceedings of Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, Yokohama Publishers, to appear.

[6] Y. Kimura and W. Takahashi, *On a hybrid method for a family of relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **357** (2009), 356–363.

[7] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[8] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. in Math. **3** (1969), 510–585.

[9] K. Nakajo, K. Shimoji, and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 11–34.

[10] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis: fixed point theory and its applica-*

tions, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[11] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.

[12] M. Tsukada, *Convergence of best approximations in a smooth Banach space*, J. Approx. Theory **40** (1984), 301–309.