数理解析研究所講究録
第 1667 巻 2009 年 28-38

強非拡大写像列について
On a strongly nonexpansive sequence

千葉大学・法経学部 青山 耕治 (Koji AOYAMA)
Faculty of Law and Economics
Chiba University

2000 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10, 41A65.
Keywords and phrases. 強非拡大列, 非拡大写像, 弱収束定理, 単調作用素.

1 序論

本稿の目的は, 写像列の強非拡大性に関する研究をまとめた文献 [3, 4] の紹介と解説を行うことである。

これまで著者は非線形写像, 特に非拡大写像の不動点問題を中心に研究を進めてきた。その中で, Bruck-Reich[9] で導入された強非拡大写像は極めて重要であると認識するに至った。実際, 後の節で述べる通り, Hilbert 空間における閉凸集合の上への距離射影や極大単調作用素のリゾルベントなどの重要な非線形写像はすべて強非拡大写像である。

一方, 非拡大写像にまつわる不動点近似理論においては, しばしば非拡大写像の列が使われる。例えば, 高橋-豊田 [21] は単調関数の変分不等式問題と非拡大写像の不動点問題の共通解を求める問題を議論し, 次の定理を示した。

定理 1.1 (高橋-豊田 [21]). C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合, $A\colon C \to H$ を α-逆強単調写像, $T\colon C \to C$ を非拡大写像とし, C の点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T P_C (x_n - \lambda_n A x_n)$$

で定義する。ここで, $\{\alpha_n\}$ は閉区間 $[a, b]$ の, $\{\lambda_n\}$ は $[c, d]$ の実数列である。ただし, $0 < a \leq b < 1$ および $0 < c \leq d < 2\alpha$ である。このとき, $\mathrm{VI}(C, A) \cap F(T) \neq \emptyset$ ならば $\{x_n\}$ は $\mathrm{VI}(C, A) \cap F(T)$ のある点に弱収束する。

定理 1.1 の仮定のもとで, $I - \lambda_n A$ 非拡大であることが知られているので, $\{I - \lambda_n A\}$ は非拡大写像の列である。ここで, I は恒等写像である。さらに, T, P_C も非拡大なので

$$T_n = \alpha_n I + (1-\alpha_n) T P_C (I - \lambda_n A)$$

とおけば, 点列 $\{x_n\}$ は非拡大写像列 $\{T_n\}$ を用いて定義されていることになる。

著者はこれまでも非拡大写像の列に注目してきたが [1,2], 特に写像の列の強非拡大性に注目し, 強非拡大性に関する性質を使って非拡大写像にまつわる収束定理を説明しようとまとめた結果が, 本稿で取り上げる文献 [3,4] である。

以下では, Hilbert 空間での結果 (文献 [3] で得られた結果) を中心に述べる。3 節の最後に Banach 空間での結果 (文献 [4] の内容) の一部を紹介する。

2 準備

本稿では, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合, H を実 Hilbert 空間とし, H の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で, ノルムを $\|\cdot\|$ で表す。H の点列 $\{x_n\}$ が x へ強収束することを $x_n \to x$ と表し, 弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ と表す。

C を H の空でない部分集合とし, T を C から H への写像とする。写像 T の不動点の集合を $F(T)$ で表す。写像 T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう。非拡大写像 T が強非拡大 (strongly nonexpansive) であるとは, $\{x_n - y_n\}$ が有界で $\|x_n - y_n\| - \|Tx_n - Ty_n\| \to 0$ となる C の任意の数列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ に対して

$$x_n - y_n - (Tx_n - Ty_n) \to 0$$

が成り立つときをいう [9]。写像 T が堅非拡大 (firmly nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|x - y - (Tx - Ty)\|^2$$

が成り立つときをいう。定義より, 堅非拡大写像は強非拡大であることが容易にわかる。

C を H の空でない閉凸部分集合とする。各 $x \in H$ に対して

$$\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$$

を満たす点 $z \in C$ が唯一存在する。この z を $P_C x$ で表し, P_C は H から C の上への距離射影と呼ばれる。P_C は堅非拡大であることが知られている。

写像 $A\colon C \to H$ が逆強単調であるとは, ある正の実数 α が存在し, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\langle x - y, Ax - Ay \rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2$$

が成り立つときをいう。このとき, A を α-逆強単調写像と呼ぶことがある。

B を H から 2^H への写像とする。このとき, 写像 B は H 上の多価写像と呼ばれる。B の有効定義域を $\mathrm{dom}(B)$ で表す。つまり, $\mathrm{dom}(B) = \{x \in H : Bx \neq \emptyset\}$ である。多価写像 B が H 上の単調作用素であるとは, すべての $x, y \in \mathrm{dom}(B)$, $u \in Bx$ および $v \in By$ に対して, $\langle x - y, u - v \rangle \geq 0$ が成り立つときをいう。H 上の単調作用素 B が極大であるとは, B' が H 上の単調作用素で $B \subset B'$ ならば $B = B'$ が成り立つときをいう。

B を H 上の極大単調作用素, r を正の実数とする。このとき, $(I + rB)^{-1}$ は B のリゾルベントと呼ばれる H から $\mathrm{dom}(B)$ の上への 1 価写像である。リゾルベント $(I+rB)^{-1}$ は堅非拡大であり, その不動点の集合と B の零点の集合 $B^{-1}0 = \{x \in H : Bx \ni 0\}$ が一致することが知られている。つまり, $B^{-1}0 = F\left((I + rB)^{-1}\right)$ が成り立つ。

非拡大写像などの非線形写像や凸解析に関する基礎概念について詳しくは [18–20] を参照するとよい。

3 強非拡大列

本節では, 強非拡大列の定義と例およびそれが持つ主な性質を述べる。特に断らない限り, C を Hilbert 空間 H の空でない部分集合, I を H 上の恒等写像とする。

C から H への非拡大写像の列 $\{T_n\}$ が強非拡大列 (strongly nonexpansive sequence) であるとは

> $\{x_n - y_n\}$ が有界で $\|x_n - y_n\| - \|T_n x_n - T_n y_n\| \to 0$ となる C 任意の点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ に対して
> $$x_n - y_n - (T_n x_n - T_n y_n) \to 0$$

が成り立つときをいう。

定義より明らかに, 一つの強非拡大写像 T を並べた列 $\{T, T, \dots\}$ は強非拡大列である。しかし, 強非拡大写像からなる写像列は強非拡大列とは限らない。したがって, 混乱を避けるために「強非拡大写像列」という用語は使わないことにする。実は表題で使ってしまっているが, これは講演申し込みの際の表題をそのまま使っているからである。

さて, 強非拡大列の例を述べる。

例 3.1. 堅非拡大写像の列は強非拡大列である。したがって, H 上の極大単調作用素 B のリゾルベントの列 $\{(I + r_n B)^{-1}\}$ は強非拡大列である。ここで, $\{r_n\}$ は正の実数列である。さらに, $\{C_n\}$ を H の空でない閉凸部分集合列とするとき, 距離射影の列 $\{P_{C_n}\}$ は強非拡大列である。

例 3.2. α を正の実数, $A\colon C \to H$ を α-逆強単調写像, $\{\lambda_n\}$ を $0 < \inf_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n < 2\alpha$ を満たす実数列とする。このとき, $\{I - \lambda_n A\}$ は強非拡大列である。

例 3.3. $\{T_n\}$ を C から H への非拡大写像の列, $\{\lambda_n\}$ を閉区間 $[0,1]$ の実数列とし, $\{U_n\}$ を各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $U_n = \lambda_n I + (1-\lambda_n)T_n$ で定義される写像の列とする。このとき, $\liminf_{n\to\infty} \lambda_n > 0$ ならば $\{U_n\}$ は強非拡大列である。

二つの強非拡大写像の合成は強非拡大になることが知られている [9, Proposition 1.1]。強非拡大列もこれと似た性質を持つ。

定理 3.4. C と D を Hilbert 空間 H の空でない部分集合, $\{S_n\}$ を D から H への非拡大写像の列, $\{T_n\}$ を C から H への非拡大写像の列とし, $\{S_n\}$ と $\{T_n\}$ は共に強非拡大列であり, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n(C) \subset D$ が成り立つと仮定する。このとき, $\{S_nT_n\}$ は強非拡大列である。

次の定理を述べる前に, 写像列に対する近似不動点列の定義を述べる。$\{T_n\}$ を C から H への写像の列とする。このとき, C の点列 $\{z_n\}$ が $\{T_n\}$ の近似不動点列 (approximate fixed point sequence) であるとは, $z_n - T_nz_n \to 0$ が成り立つときをいう。$\{T_n\}$ の有界な近似不動点列の集合を $\tilde{F}(\{T_n\})$ で表す。つまり,

$$\tilde{F}(\{T_n\}) = \left\{\{z_n\} : z_n \in C\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \|z_n\| < \infty,\ z_n - T_nz_n \to 0\right\}$$

である。明らかに, $\{T_n\}$ の共通不動点からなる有界な点列は近似不動点列である。

定理 3.5. C と D を Hilbert 空間 H の空でない部分集合, $\{S_n\}$ を C から H への非拡大写像の列, $\{T_n\}$ を D から H への非拡大写像の列とする。さらに, $\{S_n\}$ または $\{T_n\}$ のどちらかが強非拡大列であり, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n(D) \subset C$ が成り立つと仮定する。このとき, もし

$$\tilde{F}(\{S_n\}) \cap \tilde{F}(\{T_n\}) \neq \emptyset \text{ ならば } \tilde{F}(\{S_n\}) \cap \tilde{F}(\{T_n\}) = \tilde{F}(\{S_nT_n\})$$

である。

定理 3.5 において, $\{S_n\}$ と $\{T_n\}$ のある共通不動点 1 点の繰り返し点列は $\tilde{F}(\{S_n\}) \cap \tilde{F}(\{T_n\})$ の元であるから, 定理 3.5 より次の結果を得る。

系 3.6. C, D, $\{S_n\}$, $\{T_n\}$ は定理 3.5 と同じとする。このとき, もし

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset \text{ ならば } \tilde{F}(\{S_n\}) \cap \tilde{F}(\{T_n\}) = \tilde{F}(\{S_n T_n\})$$

である。

系 3.6 の特別な場合として次の系を得る。

系 3.7. C と D を Hilbert 空間 H の空でない部分集合, $S\colon C \to H$ と $T\colon D \to H$ を非拡大写像とする。さらに, S または T のどちらかは強非拡大であり, $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ および $T(D) \subset C$ を仮定する。このとき, $F(S) \cap F(T) = F(ST)$ が成り立つ。

S, T が共に強非拡大で共通不動点を持つとき, $F(S) \cap F(T) = F(ST)$ が成り立つことはすでに知られていた [9, Lemma 2.1]。

非拡大写像と強非拡大写像の凸結合から作られる写像は, 強非拡大であることが知られている [9, Theorem 1.3]。強非拡大列についても, これと似た結果を示すことができる。

定理 3.8. C を Hilbert 空間 H の空でない部分集合, $\{S_n\}$ と $\{T_n\}$ を C から H への非拡大写像の列, $\{\lambda_n\}$ を閉区間 $[0,1]$ の実数列とし, $\{U_n\}$ を各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $U_n = \lambda_n S_n + (1-\lambda_n)T_n$ で定義される C から H への写像の列とする。さらに, $\{S_n\}$ は強非拡大列であり, $\liminf_{n\to\infty} \lambda_n > 0$ を仮定する。このとき, $\{U_n\}$ は強非拡大列である。

例 3.3 は, 定理 3.8 で $S_n \equiv I$ とした場合である。恒等写像 I は強非拡大写像であるから, $\{I, I, \dots\}$ は強非拡大列である。

補足: Banach 空間での強非拡大列について

この節の最後に Banach 空間での強非拡大列について少し触れておく。まず, 強非拡大列の概念は, その定義を変更することなくそのまま一般の Banach 空間でも議論できる。このとき, 一様凸な Banach 空間において, Bruck[8] の意味での堅非拡大写像の列は強非拡大列になる [4, Lemma 2.5]。さらに, 定理 3.4, 定理 3.5, 系 3.6 および系 3.7 はそのまま一般の Banach 空間で成り立つ [4, Theorem 3.2, Theorem 3.3, Corollary 3.4, Corollary 3.6]。また, 定理 3.8 は一様凸な Banach 空間で成り立つ [4, Theorem 3.7]。したがって, 例 3.3 も同様に一様凸な Banach 空間で成り立つ [4, Corollary 3.8]。その他, Banach 空間での強非拡大列の詳しい議論については [4] を参照して欲しい。

4 弱収束定理

この節では, 強非拡大列に関する収束定理を三つ取り扱う。

定理 4.1. C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合, $\{T_n\}$ を C から C への非拡大写像からなる強非拡大列とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $F(T_n) \neq \emptyset$ とする。さらに, 次の二つの条件を満たす C の空でない閉凸部分集合 C_0 の存在を仮定する。

(1) すべての $z \in C_0$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n z - z\| < \infty$ である;

(2) C の任意の弱収束点列 $\{u_i\}$ に対して, $\{T_n\}$ の部分列 $\{T_{n_i}\}$ が存在して $T_{u_i}u_i - u_i \to 0$ ならば $\{u_i\}$ の弱極限は C_0 の点である。

このとき, $x_1 = x \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_{n+1} = T_n x_n$ で定義される C の点列 $\{x_n\}$ は, C_0 のある点に弱収束する。

$\{T_n\}$ の共通不動点の存在を仮定していないところが定理 4.1 の一つの特徴である。共通不動点が存在する場合の定理を次に述べるが, その準備として写像列に対する二つの条件を導入する。

$\{T_n\}$ を共通不動点を持つ C から C への写像の列とし, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$ とする。以下が成り立つとき, $\{T_n\}$ は条件 (A) を満たすという。

> $\{T_{n_i}\}$ を $\{T_n\}$ の部分列, $\{u_i\}$ を C の点列とするとき, $u_i \rightharpoonup u$ かつ $T_{n_i}u_i - u_i \to 0$ ならば $u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ である。

また, 以下が成り立つとき, $\{T_n\}$ は条件 (B) を満たすという。

> 任意の空でない C の有界集合 D と任意の $\mathbb{N}$ の増加列 $\{n_i\}$ に対して, $\{T_{n_i}\}$ の部分列 $\{T_{n_{i_j}}\}$ と非拡大写像 $T\colon C \to H$ が存在して
>
> $$F(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \text{ かつ } \lim_{j\to\infty} \sup_{y \in D} \left\| Ty - T_{n_{i_j}} y \right\| = 0$$
>
> を満たす。

定理 4.1 から次の定理を得る。

定理 4.2. C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合, $\{T_n\}$ を C から C への非拡大写像からなる強非拡大列とする。さらに, $\{T_n\}$ は共通不動点を持ち, $\{T_n\}$ は条件 (A)

を満たすと仮定する。このとき, C の点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_{n+1} = T_n x_n$ で定義すると, $\{Px_n\}$ は強収束し, $\{x_n\}$ は $\{Px_n\}$ の極限に弱収束する。ここで, P は H から $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ への距離射影である。

証明. C_0 を $\{T_n\}$ の共通不動点の集合とすると, 仮定よりすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $F(T_n) \supset C_0 \neq \emptyset$ である。T_n は閉凸集合 C 上の非拡大写像であるから $F(T_n)$ は閉凸であり, C_0 も閉凸であることがわかる。$z \in C_0$ とすると, $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n z - z\| = 0$ である。$\{u_i\}$ を C の弱収束点列, u をその極限とする。$\{T_n\}$ の部分列 $\{T_{n_i}\}$ が存在し $u_i - T_{n_i} u_i \to 0$ であると仮定すると, 条件 (A) より $u \in C_0$ である。よって, C_0 は定理 4.1 の (1) および (2) を満たすこと示がせた。したがって, 定理 4.1 より結論を得る。 □

条件 (B) は, 条件 (A) の特別な場合であるから, 定理 4.2 より直ちに次の定理を得る。

定理 4.3. C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合, $\{T_n\}$ を C から C への非拡大写像からなる強非拡大列とする。さらに, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$ および $\{T_n\}$ は条件 (B) を満たすと仮定する。C の点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x \in C$ および $x \in \mathbb{N}$ に対して $x_{n+1} = T_n x_n$ で定義する。このとき, $\{Px_n\}$ は強収束し, $\{x_n\}$ は $\{Px_n\}$ の極限に弱収束する。ここで, P は H から $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ の上への距離射影である。

5 単調作用素に関する問題への応用

本節では, 第 3 節および第 4 節で得られた結果を, 単調作用素または単調関数に関する次の三つの問題に応用する。

1. 有限個の極大単調作用素の共通零点を求める問題
2. 逆強単調関数に対する変分不等式問題
3. 極大単調作用素と逆強単調関数の和の零点を求める問題

5.1 有限個の極大単調作用素の共通零点を求める問題

ここでは次の問題を取り扱う。

問題 5.1. N を正の整数とし, $\{B_k : k = 0, \ldots, N-1\}$ を H 上の極大単調作用素の族とする。このとき, $\{B_k\}$ の共通零点, つまり, $z \in \bigcap_{k=0}^{N-1} B_k^{-1} 0$ を求めよ。

$\{B_k\}$ のリゾルベントを周期的に用いることにより，問題 5.1 の解に弱収束する点列が得られる。

定理 5.2. N を正の整数，$\{B_k : k = 0, \dots, N-1\}$ を共通零点を持つ H 上の極大単調作用素の族，$\{r_n\}$ を $\inf_{n\in\mathbb{N}} r_n > 0$ を満たす正の実数列，$\{x_n\}$ を $x_1 = x \in H$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \left(I + r_n B_{c(n)}\right)^{-1} x_n$$

で定義される H の点列とする。ただし，$c(n) = n \bmod N$ である。このとき，$\{x_n\}$ は $\{B_k\}$ のある共通零点に弱収束する。

この定理の証明には，定理 4.1(この場合は，定理 4.2 を使ってもよい。) と共に例 3.1，定理 3.4，系 3.6 および系 3.7 が使われる。

定理 5.2 からすぐに有限個の非拡大写像の共通不動点に関する次の結果を得ることができる。

系 5.3. C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合，N を正の整数，$\{T_k : k = 0, \dots, N-1\}$ を共通不動点を持つ C から C への非拡大写像の族，$\{t_n\}$ を $0 < t_n \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} t_k < 1$ を満たす数列，$\{x_n\}$ を $x_1 = x \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = t_n x_n + (1 - t_n) T_{c(n)} x_{n+1}$$

で定義される C の点列とする。ただし，$c(n) = n \bmod N$ である。このとき，$\{x_n\}$ は $\{T_k\}$ のある共通不動点に弱収束する。

系 5.3 は，[23, Theorem 2] の一般化になっている。実際，[23, Theorem 2] では，系 5.3 の仮定に加えてさらに $t_n \to 0$ が仮定されている。

5.2 逆強単調関数に対する変分不等式問題

ここでは次のような逆強単調写像に対する変分不等式問題を取り扱う。

問題 5.4. C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とし，$A \colon H \to H$ を逆強単調写像とする。このとき，すべての $y \in C$ に対して $\langle y - x, Ax \rangle \geq 0$ を満たす $x \in C$ を求めよ。

問題 5.4 の解の集合を $\mathrm{VI}(C, A)$ で表す。ここで，P_C を H から C の上への距離射影，I

を恒等写像, λ を正の実数とするとき

$$\mathrm{VI}(C, A) = F(P_C(I - \lambda A))$$

が成り立つから, 問題 5.4 を写像 $P_C(I - \lambda A)$ の不動点問題へ書き換えることができる。しかし, 何らかの制限から P_C が使えないとすると, 問題 5.4 は取り扱いが難しくなる。以下では, 実行可能集合 C がある閉凸集合列で近似される場合を取り扱う。このような問題は [24] で議論されている。

定理 5.5. *C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合, $\{C_n\}$ を H の空でない閉凸部分集合の列, $\{\lambda_n\}$ を正の実数列, α を正の実数, $A\colon H \to H$ を α-逆強単調写像とする。さらに, 以下を仮定する。*

- $\mathrm{VI}(C, A) \neq \emptyset$ かつ各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{VI}(C_n, A) \neq \emptyset$;
- すべての $y \in H$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} \|P_{C_n} y - P_C y\| < \infty$;
- すべての $r > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} \sup\{\|P_{C_n} z - P_C z\| : \|z\| \leq r\} = 0$;
- $0 < \inf_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n < 2\alpha$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n - \lambda| < \infty$ を満たす $\lambda > 0$ が存在する。

H の点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x \in H$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = P_{C_n}(x_n - \lambda_n A x_n)$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $\mathrm{VI}(C, A)$ のある点に弱収束する。

定理 5.5 の証明には, 定理 4.1 の他に, 例 3.1, 例 3.2 および定理 3.4 などを使う。

5.3 極大単調作用素と逆強単調関数の和の零点を求める問題

最後に, 例えば Passty [15] で議論されている次の問題を取り上げる。

問題 5.6. *C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合, $A\colon C \to H$ を逆強単調写像, B を H 上の極大単調作用素とする。このとき, A と B の和の零点, つまり, $x \in (A+B)^{-1}0$ を求めよ。*

問題 5.6 のもとで, すべての $r > 0$ に対して

$$(A + B)^{-1}0 = F\left((I + rB)^{-1}(I - rA)\right)$$

が成り立つ。これにより, 問題 5.6 を写像 $(I+rB)^{-1}(I-rA)$ の不動点問題とみなすことができる。定理 4.3, 例 3.2 および定理 3.4 を使うと次の定理を得る。

定理 5.7. C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合, α を正の定数, $A\colon C \to H$ を α-逆強単調写像, B を H 上の極大単調作用素, $J_r = (I+rB)^{-1}$ を $r > 0$ に対する B のリゾルベント, $\{r_n\}$ を正の実数列とする。さらに, $(A+B)^{-1}0 \neq \emptyset$, $\mathrm{dom}(B) \subset C$ かつ $0 < \inf_{n\in\mathbb{N}} r_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} r_n < 2\alpha$ を仮定する。C の点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = J_{r_n}(x_n - r_n A x_n)$$

で定義する。このとき, $\{Px_n\}$ は強収束し, $\{x_n\}$ は $\{Px_n\}$ の極限に弱収束する。ここで, P は H から $(A+B)^{-1}0$ の上への距離射影である。

強非拡大列に関する結果の応用として定理 5.7 を [3] に書いた。しかし, 例えば文献 [13] で, もっと一般的な形の結果がすでに得られていたようだ (残念ながら, 本稿執筆時点でその文献を入手できていない)。

参考文献

[1] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 2350–2360.

[2] ———, *Finding common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Sci. Math. Jpn. **66** (2007), 89–99.

[3] ———, *On a strongly nonexpansive sequence in Hilbert spaces*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis **8** (2007), 471–489.

[4] ———, *Strongly nonexpansive sequences and their applications in Banach spaces*, Fixed Point theory and its Applications, Yokohama Publishers, Yokohama, 2008, pp. 1–18.

[5] F. E. Browder, *Convergence theorems for sequences of nonlinear operators in Banach spaces*, Math. Z. **100** (1967), 201–225.

[6] ———, *Nonlinear maximal monotone operators in Banach space*, Math. Ann. **175** (1968), 89–113.

[7] F. E. Browder and W. V. Petryshyn, *Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **20** (1967), 197–228.

[8] R. E. Bruck Jr., *Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **47** (1973), 341–355.

[9] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[10] K. Eshita and W. Takahashi, *Approximating zero points of accretive operators in general Banach spaces*, JP J. Fixed Point Theory Appl. **2** (2007), 105–116.

[11] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[12] G. J. Minty, *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space*, Duke Math. J. **29** (1962), 341–346.

[13] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong and weak convergence theorems by an improved splitting method*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **9** (2002), 99–107.

[14] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.

[15] G. B. Passty, *Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **72** (1979), 383–390.

[16] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75–88.

[17] ———, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optimization **14** (1976), 877–898.

[18] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[19] 高橋渉, 『凸解析と不動点近似』, 横浜図書, 2000.

[20] ———, 『非線形・凸解析学入門』, 横浜図書, 2005.

[21] W. Takahashi and M. Toyoda, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings*, J. Optim. Theory Appl. **118** (2003), 417–428.

[22] K.-K. Tan and H. K. Xu, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process*, J. Math. Anal. Appl. **178** (1993), 301–308.

[23] H.-K. Xu and R. G. Ori, *An implicit iteration process for nonexpansive mappings*, Numer. Funct. Anal. Optim. **22** (2001), 767–773.

[24] Q. Yang and J. Zhao, *Generalized KM theorems and their applications*, Inverse Problems **22** (2006), 833–844.