数理解析研究所講究録
第 1667 巻 2009 年 22-27

集合値カナン写像の不動点について

城西大学・理学部　吉川美佐子 (Misako Kikkawa)
Faculty of Science, Josai University.

1. はじめに

(X, d) を距離空間とする. X 上の写像 T がカナン写像であるとは, $\alpha \in [0, 1/2)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\, d(x, Tx) + \alpha\, d(y, Ty)$$

が成り立つことをいう. 1969 年に Kannan は次の不動点存在定理を証明した.

定理 1 (Kannan [4]). (X, d) を完備距離空間とする. X 上の写像 T がカナン写像であるとする. このとき, T はただ一つの不動点を持つ.

バナッハの縮小写像の不動点定理 [1] は大変有名であり, 縮小写像については様々な研究がなされている. このカナン写像は縮小写像とは独立の概念である. X の任意のカナン写像が不動点を持つことは, X が完備であることと同値になるが, 任意の縮小写像が不動点を持っても, 完備でない距離空間が存在することも知られている. ([2], [9]) 完備性の特徴付けという点から見ると, 縮小写像の条件はカナン写像の条件より強い条件と言うことができる. このように, カナン写像の性質も興味深いものがある.

最近, 定理 1 の拡張である次の定理が証明された. [7] と [10] を参照のこと.

定理 2 ([6]). 関数 $\varphi : [0, 1) \to (1/2, 1]$ を

$$\varphi(r) = \begin{cases} 1 & (0 \leq r < \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ \dfrac{1}{1+r} & (\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1) \end{cases} \tag{1}$$

と定義する. (X, d) を完備距離空間, T を X 上の写像とする. $\alpha \in [0, 1/2)$ とし, $r := \alpha/(1-\alpha) \in [0, 1)$ とおく. 任意の $x, y \in X$ に対して,

$$\varphi(r)\, d(x, Tx) \leq d(x, y) \quad \text{ならば} \quad d(Tx, Ty) \leq \alpha\, d(x, Tx) + \alpha\, d(y, Ty)$$

が成り立つと仮定する. このとき, T はただ一つの不動点をもつ.

注意. $\varphi(r)$ の値はなるべく大きい方が定理の仮定は弱くなるので, $\varphi(r)$ が大きいほどよい定理になる. 上記の $\varphi(r)$ はすべての $r \in [0, 1)$ に対して, ベスト定数になっていることが分かっている. つまり, 定理 2 をこれ以上改良することはできない.

本稿では, 定理 2 を集合値に拡張した定理を証明する. さらに, 可換な場合に拡張した定理も紹介する.

MSC (2000). 54H25
キーワード. 縮小写像, 不動点, バナッハの不動点定理, カナン写像, ハウスドルフの距離

2. 集合値カナン写像の不動点定理

X の空でない有界閉集合の全体を $\mathrm{CB}(X)$ と書くことにする. $A, B \in \mathrm{CB}(X)$ に対して, A と B の距離 $H(A, B)$ をハウスドルフの距離とする. すなわち,

$$H(A,B) = \max\left\{ \sup_{x\in A} d(x,B),\ \sup_{y\in B} d(y,A) \right\}.$$

ただし, $d(x,B) = \inf_{y\in B} d(x,y)$.

次の定理は, 定理 2 の集合値版である.

定理 3. 関数 φ は (1) と同じとする. (X, d) を完備距離空間, T は X から $\mathrm{CB}(X)$ の中への写像とする. $\alpha \in [0, 1/2)$ とし, $r := \alpha/(1-\alpha) \in [0,1)$ とおく. 任意の $x, y \in X$ に対して,

$$\varphi(r)\, d(x,Tx) \le d(x,y) \quad \text{ならば} \quad H(Tx,Ty) \le \alpha\, d(x,Tx) + \alpha\, d(y,Ty)$$

が成り立つと仮定する. このとき, $z \in Tz$ となる $z \in X$ が存在する.

証明. 実数 r_1 は $0 \le r < r_1 < 1$ とする. $u_1 \in X$ とし, $u_2 \in Tu_1$ とする. $\varphi(r)\, d(u_1, Tu_1) \le d(u_1, Tu_1) \le d(u_1, u_2)$ であるから仮定から,

$$d(u_2,Tu_2) \le H(Tu_1,Tu_2) \le \alpha\, d(u_1,Tu_1) + \alpha\, d(u_2,Tu_2)$$

が成り立つ. よって,

$$d(u_2,Tu_2) \le \alpha/(1-\alpha) d(u_1,Tu_1) = r\, d(u_1,Tu_1) \le r\, d(u_1,u_2)$$

となるので, $d(u_2, u_3) \le r_1\, d(u_1, u_2)$ となる $u_3 \in Tu_2$ が存在する. したがって, X の 点列 $\{u_n\}$ で $u_{n+1} \in Tu_n$ であり, $d(u_{n+1}, u_{n+2}) \le r_1\, d(u_n, u_{n+1})$ となるものが存在する. よって,

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(u_n,u_{n+1}) \le \sum_{n=1}^{\infty} {r_1}^{n-1}\, d(u_1,u_2) < \infty$$

であるから, $\{u_n\}$ はコーシー列となる. X の完備性から, $\{u_n\}$ は収束してその収束先を $z \in X$ とする.

次に, 任意の $x \in X \setminus \{z\}$ に対して,

$$d(z,Tx) \le \alpha\, d(x,Tx) \tag{2}$$

が成り立つことを示す. $u_n \to z$ であるから, $\nu \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \ge \nu$ となる $n \in \mathbb{N}$ に対して, $d(z, u_n) \le (1/3)\, d(z, x)$ が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned}
\varphi(r)\, d(u_n,Tu_n) &\le d(u_n,Tu_n) \le d(u_n,u_{n+1}) \\
&\le d(u_n,z) + d(u_{n+1},z) \\
&\le \frac{2}{3}\, d(x,z) = d(x,z) - \frac{1}{3}\, d(x,z) \\
&\le d(x,z) - d(u_n,z) \le d(u_n,x)
\end{aligned}$$

であるから, $H(Tu_n, Tx) \le \alpha\, d(u_n, Tu_n) + \alpha\, d(x, Tx)$ となる. したがって, $n \ge \nu$ となる $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$d(u_{n+1},Tx) \le \alpha\, d(u_n,u_{n+1}) + \alpha\, d(x,Tx)$$

となる．この式で，$n \to \infty$ にすると，$x \in X \setminus \{z\}$ に対して，$d(z, Tx) \leq \alpha\, d(x, Tx)$ を得る．

次に，$z \in Tz$ を示す．$0 \leq r < 1/\sqrt{2}$ の場合から示す．$z \notin Tz$ と仮定する．$a \in Tz$ とすると $a \neq z$ なので (2) から，$d(z, Ta) \leq \alpha\, d(a, Ta)$ を得る．一方で，$\varphi(r) d(z, Tz) = d(z, Tz) \leq d(z, a)$ より，

$$H(Tz, Ta) \leq \alpha\, d(z, Tz) + \alpha\, d(a, Ta)$$

であるから，$d(a, Ta) \leq (\alpha/(1-\alpha))\, d(z, Tz) = r\, d(z, Tz)$ を得る．したがって，

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\leq d(z, Ta) + H(Ta, Tz) \\ &\leq \alpha\, d(a, Ta) + \alpha\, d(z, Tz) + \alpha\, d(a, Ta) \\ &\leq \alpha(2r+1)\, d(z, Tz) \\ &= \frac{r(2r+1)}{1+r} d(z, Tz) < \frac{1+r}{1+r} d(z, Tz) = d(z, Tz) \end{aligned}$$

となりこれは矛盾．よって，$z \in Tz$ を得る．

次に $1/\sqrt{2} \leq r < 1$ の場合を示す．はじめに，任意の $x \in X$ に対して，

$$H(Tx, Tz) \leq \alpha\, d(x, Tx) + \alpha\, d(z, Tz) \tag{3}$$

を示そう．$x = z$ のときは明らかに成り立つので，$x \neq z$ と仮定すると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$d(z, y_n) \leq d(z, Tx) + (1/n)\, d(x, z)$ となる $\{y_n\} \subset Tx$ が存在する．よって，

$$\begin{aligned} d(x, Tx) \leq d(x, y_n) &\leq d(x, z) + d(z, y_n) \\ &\leq d(x, z) + d(z, Tx) + \frac{1}{n}\, d(x, z) \\ &\leq d(x, z) + \alpha\, d(x, Tx) + \frac{1}{n}\, d(x, z) \end{aligned}$$

であるから，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$(1-\alpha) d(x, Tx) \leq (1 + 1/n) d(x, z)$ が成り立つ．$n \to \infty$ とすると，

$$\frac{1}{1+r} d(x, Tx) \leq d(x, z).$$

よって仮定より，(3) を得る．したがって，

$$\begin{aligned} d(z, Tz) = \lim_{n\to\infty} d(u_{n+1}, Tz) &\leq \lim_{n\to\infty} H(Tu_n, Tz) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \{\alpha\, d(u_n, Tu_n) + \alpha\, d(z, Tz)\} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \{\alpha\, d(u_n, u_{n+1}) + \alpha\, d(z, Tz)\} \end{aligned}$$

であるから，$(1-\alpha) d(z, Tz) \leq 0$ を得る．Tz は閉集合なので，$z \in Tz$ を得る．これで証明を完了する．$\square$

注意． 任意の $r \in [0, 1)$ に対して，$\varphi(r)$ はベスト定数になっている．

3. 可換なカナン写像の不動点定理

この章では, Jungck [3] にならって, 定理 2 を可換な場合に拡張する.

定理 4. 関数 φ は (1) と同じとする. (X,d) は完備距離空間, X 上の写像 S と T は以下を満たすとする:

(a) S は連続.
(b) $T(X) \subset S(X)$.
(c) S と T は可換.

$\alpha \in [0,1/2)$ とし, $r := \alpha/(1-\alpha) \in [0,1)$ とおく. 任意の $x,y \in X$ に対して,

$$\varphi(r)\,d(Sx,Tx) \le d(Sx,Sy) \quad ならば \quad d(Tx,Ty) \le \alpha\,d(Sx,Tx) + \alpha\,d(Sy,Ty)$$

が成り立つと仮定する. このとき, S と T の共通不動点がただ一つ存在する.

証明. (b) から, X 上の写像 I で任意の $x \in X$ に対して $SIx = Tx$ となるものを定義できる. $\varphi(r) \le 1$ であるから, $\varphi(r)\,d(Sx,Tx) = \varphi(r)\,d(Sx,SIx) \le d(Sx,SIx)$ が成り立つ. よって仮定より, 任意の $x \in X$ に対して,

$$d(SIx,SIIx) = d(Tx,TIx) \le \alpha\,d(Sx,SIx) + \alpha\,d(SIx,SIIx).$$

よって,

$$d(SIx,SIIx) \le \frac{\alpha}{1-\alpha} d(Sx,SIx) = r\,d(Sx,SIx) \tag{4}$$

となる. $u \in X$ とする. $u_0 = u$ とし $n \in \mathbb{N}$ に対して, $u_n = I^n u$ とする. すると, $u_{n+1} = Iu_n$, $Su_{n+1} = Tu_n$ が明らかに成り立つ. (4) から

$$\begin{aligned} d(Su_n,Su_{n+1}) &= d(SIu_{n-1},SIIu_{n-1}) \le r\,d(Su_{n-1},SIu_{n-1}) \\ &= r\,d(Su_{n-1},Su_n) \le \cdots \le r^n\,d(Su_0,Su_1) \end{aligned}$$

であり, さらに, $\sum_{n=0}^{\infty} d(Su_n,Su_{n+1}) < \infty$ となる. よって, $\{Su_n\}$ はコーシー列となり, X の完備性から $Su_n \to z$ となる $z \in X$ が存在する.

次に, $Sx \ne z$ である $x \in X$ に対して,

$$d(z,Tx) \le \alpha\,d(Sx,Tx) \tag{5}$$

が成り立つことを示す. $Su_n \to z$ であるから, 十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対しては, $\varphi(r)\,d(Su_n,Tu_n) \le d(Su_n,Sx)$ が成り立つから

$$d(Tu_n,Tx) \le \alpha\,d(Su_n,Tu_n) + \alpha\,d(Sx,Tx).$$

したがって, $Sx \ne z$ である $x \in X$ に対して,

$$\begin{aligned} d(z,Tx) &= \lim_{n\to\infty} d(Su_{n+1},Tx) = \lim_{n\to\infty} d(Tu_n,Tx) \\ &\le \lim_{n\to\infty} \{\alpha\,d(Su_n,Tu_n) + \alpha\,d(Sx,Tx)\} = \alpha\,d(Sx,Tx) \end{aligned}$$

を得る.

次に, z が S の不動点であることを示す. $z \ne Sz$ であると仮定する. すると,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(r)d(Su_n,Tu_n) = 0 < d(z,Sz) = \lim_{n\to\infty} d(Su_n,SSu_n)$$

であるから, 十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対しては,

$$d(Tu_n,TSu_n) \le \alpha\,d(Su_n,Tu_n) + \alpha\,d(SSu_n,TSu_n).$$

よって,

$$\begin{aligned} d(z, Sz) &= \lim_{n\to\infty} d(Su_{n+1}, SSu_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} d(Tu_n, STu_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(Tu_n, TSu_n) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \{\alpha\, d(Su_n, Tu_n) + \alpha\, d(SSu_n, TSu_n)\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \{\alpha\, d(Su_n, Tu_n) + \alpha\, d(SSu_n, STu_n)\} = 0 \end{aligned}$$

となることより $z = Sz$ を得る.

次に, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$d(T^n z, T^{n+1} z) \leq r^n\, d(z, Tz) \tag{6}$$

を示す. $T^0 z = z$ とおくと,

$$\varphi(r)\, d(ST^{n-1}z, T^n z) \leq d(ST^{n-1}z, T^n z) = d(ST^{n-1}z, T^n Sz) = d(ST^{n-1}z, ST^n z)$$

であるから,

$$\begin{aligned} d(T^n z, T^{n+1} z) &\leq \alpha\, d(ST^{n-1}z, TT^{n-1}z) + \alpha\, d(ST^n z, TT^n z) \\ &= \alpha\, d(T^{n-1}z, T^n z) + \alpha\, d(T^n z, T^{n+1} z) \end{aligned}$$

を得る. よって, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $d(T^n z, T^{n+1} z) \leq r\, d(T^{n-1}z, T^n z)$ が成り立つ. この式より, (6) がいえる.

次に, z は T の不動点であることを示すが, 以下の 3 つの場合に分けて考える.

(a) $0 \leq r < 1/\sqrt{2}$
(b) $1/\sqrt{2} \leq r < 1$ かつ $\sharp\{n : Su_n \neq z\} = \infty$
(c) $1/\sqrt{2} \leq r < 1$ かつ $\sharp\{n : Su_n \neq z\} < \infty$

(a) の場合は, $2r^2 < 1$ となっている. 今, $SIz = Tz \neq z$ と仮定すると, $d(SIz, SI^2 s) \leq r\, d(Sz, SIz) = d(z, SIz)$ であることより, $SI^2 z \neq z$ である. (4) と (5) から,

$$\begin{aligned} d(z, SIz) &\leq d(z, SI^2 z) + d(SI^2 z, SIz) \\ &\leq \alpha\, d(SIz, SI^2 z) + d(SI^2 z, SIz) \\ &\leq (\alpha+1) r\, d(z, SIz) \\ &= \frac{r + 2r^2}{1+r}\, d(z, SIz) < \frac{r+1}{1+r}\, d(z, SIz) = d(z, SIz) \end{aligned}$$

となるがこれは矛盾. よって, $SIz = Tz = z$ を得る. (b) の場合は, $\{u_n\}$ の部分列 $\{u_{n_j}\}$ で $Su_{n_j} \neq z$ となるものが存在する. よって,

$$\begin{aligned} d(Su_{n_j}, Tu_{n_j}) &\leq d(Su_{n_j}, z) + d(Tu_{n_j}, z) \\ &\leq d(Su_{n_j}, z) + \alpha\, d(Su_{n_j}, Tu_{n_j}) \end{aligned}$$

であるから, 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して, $\varphi(r)\, d(Su_{n_j}, Tu_{n_j}) \leq d(Su_{n_j}, z)$ である. よって仮定から,

$$d(Tu_{n_j}, Tz) \leq \alpha\, d(Su_{n_j}, Tu_{n_j}) + \alpha\, d(Sz, Tz)$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} d(z,Tz) &= \lim_{j\to\infty} d(Su_{n_j+1},Tz) = \lim_{j\to\infty} d(Tu_{n_j},Tz) \\ &\le \lim_{j\to\infty} \{\alpha\, d(Su_{n_j},Tu_{n_j}) + \alpha\, d(Sz,Tz)\} \\ &= \alpha\, d(z,Tz) \end{aligned}$$

を得る. したがって, $Tz = z$ が成り立つ. (c) の場合は, $\nu \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \ge \nu$ に対して, $Su_n = z$ である. 特に, $Su_\nu = Su_{\nu+1} = z$ である. よって,

$$Tz = TSu_\nu = STu_\nu = SSu_{\nu+1} = Sz = z$$

となる. これで, すべての場合において, z が S と T の共通不動点であることが示せた.

最後に共通不動点がただ一つであることを示す. y を S と T の共通不動点であると仮定すると, $\varphi(r)\, d(Sz,Tz) = 0 \le d(Sz,Sy)$ から,

$$d(z,y) = d(Tz,Ty) \le \alpha\, d(Sz,Tz) + \alpha\, d(Sy,Sy) = 0$$

となるので, $z = y$ を得る □

注意. $\varphi(r)$ は任意の $\in [0,1)$ に対してベスト定数になっている.

参考文献

[1] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math., **3** (1922), 133–181.

[2] E. H. Connell, *Properties of fixed point spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **10** (1959), 974–979.

[3] G. Jungck, *Commuting mappings and fixed points*, Amer. Math. Monthly, **83** (1976), 261–263.

[4] R. Kannan, *Some results on fixed points II*, Amer. Math. Monthly, **76** (1969), 405–408.

[5] M. Kikkawa, *Two generalizations of a fixed point theorem of Kannan*, submitted.

[6] M. Kikkawa and T. Suzuki, *Some similarity between contractions and Kannan mappings*, Fixed Point Theory Appl., (2008), Article ID 649749, 1–8.

[7] ——— *Three fixed point theorems for generalized contractions with constants in complete metric spaces*, Nonlinear Anal. (2007), doi:10.1016/j.na.2007.08.064.

[8] S. B. Nadler, Jr., *Multi-valued contraction mappings*, Pacific J. Math., **30** (1969), 475–488.

[9] P. V. Subrahmanyam, *Completeness and fixed-points*, Monatsh. Math., **80** (1975), 325–330.

[10] T. Suzuki and M. Kikkawa, *Some remarks on a recent generalization of the Banach contraction principle*, Proceedings of ICFPTA2007, 151–161.

[11] T. Suzuki, *A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness*, Proc. Amer. Math. Soc., **136** (2008), 1861–1869.