数理解析研究所講究録
第 1667 巻 2009 年 7-13

On geometrical meaning of the triangle inequality and its development

横浜国立大学・教育学研究科　峰野宏祐 (Kosuke Mineno)
Graduate schools of Education, Yokohama National University
深良中学校　中村 有花 (Yuka Nakamura)
Fukara junior high school
静岡大学・教育　大和田 智義 (Tomoyoshi Ohwada)
Faculty of Education, Shizuoka University

1 序

三角不等式は解析学におけるもっとも基本的な道具の一つであるが, 近年バナッハ空間における三角不等式の精密化や拡張が盛んに行われている (cf. [1, 2, 9, 10]). 加藤-斎藤-田村 [5] はバナッハ空間の幾何学的構造の研究に関連して n 個のバナッハ空間の元に関する精密化された三角不等式とその逆不等式を与えた. この研究に動機付けされて, その後色々な設定の元で精密化された三角不等式の研究がなされて現在も発展を続けている (cf. [3, 4, 6]). 三谷-斎藤-加藤-田村 [8] は [5] の拡張として, 更なる三角不等式の精密化に成功した. ここでは, 精密化された三角不等式の幾何学的考察を通じて, より一般的な不等式を与えるとともに, その応用として精密化された三角不等式が導かれることを解説する.

2 精密化された三角不等式の幾何学的考察

以後, X をバナッハ空間としてそのノルムを $\|\cdot\|$ で表す事にする. 三角不等式とは良く知られている通り, X の二つの元 x, y に関する不等式 $\|x+y\| \leqq \|x\|+\|y\|$ のことをいうが, ここでは X の n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する以下の一般化された三角不等式のことをさす.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \tag{T}$$

加藤-斎藤-田村は [5] で (T) の精密化として次の定理を与えた.

定理 2.1 ([5, Theorem 1]) バナッハ空間 X の 0 でない n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関して, 以下の不等式が成立する.

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + \left(n - \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \min_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\| \\
\leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \qquad \text{(KST)} \\
\leqq \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + \left(n - \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \max_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\|.
\end{aligned}$$

不等式 (T) から直ちに

$$\left(n - \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \min_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\| \geqq \left(n - \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \min_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\| \geqq 0$$

が分かるので, 上の不等式 (KST) は,(T) の左辺に非負の値

$$\left(n - \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \min_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\|$$

を加えることにより, より良い評価を与えている. しかしながら, $\min_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\|$ を $\max_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\|$ に置き換えた場合, 非負の値

$$\left(n - \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \max_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\|$$

を加えることにより (T) の右辺の値より大きくなる, すなわち逆不等式が得られる. 精密化された三角不等式 (KST) は一様非-ℓ_1^n 性といったバナッハ空間の幾何学的性質を特徴づけることに有用であるばかりでなく, 様々なバナッハ空間におけるノルム不等式を含んでいる (see. [5]).

三谷-斎藤-加藤-田村は [8] で定理 2.1 の更なる精密化に成功した.

定理 2.2 ([8, Theorem 1]) バナッハ空間 X の 0 でない n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関して, 以下の不等式が成立する.

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + \sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\|\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|}\right\|\right) (\|x_k^*\| - \|x_{k+1}^*\|) \\
\leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \qquad \text{(MSKT)} \\
\leqq \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| - \sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\|\sum_{i=n-(k-1)}^{n} \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|}\right\|\right) (\|x_{n-k}^*\| - \|x_{n-(k-1)}^*\|),
\end{aligned}$$

ただし x_i^* は $\|x_1^*\| \geqq \|x_2^*\| \geqq \cdots \geqq \|x_n^*\|$, かつ $x_0^* = x_{n+1}^* = 0$ を満たす x_i の並べ替えとする.

上の最初の不等式は

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| + \sum_{k=2}^n \left(k - \left\|\sum_{i=1}^k \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|}\right\|\right)(\|x_k^*\| - \|x_{k+1}^*\|) \\
&= \left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| + \left(n - \left\|\sum_{i=1}^n \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|}\right\|\right)\|x_n^*\| + \sum_{k=2}^{n-1} \left(k - \left\|\sum_{i=1}^k \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|}\right\|\right)(\|x_k^*\| - \|x_{k+1}^*\|) \\
&= \left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| + \left(n - \left\|\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right)\min_{1\leqq i\leqq n}\|x_i\| + \sum_{k=2}^{n-1} \left(k - \left\|\sum_{i=1}^k \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|}\right\|\right)(\|x_k^*\| - \|x_{k+1}^*\|) \\
&\leqq \sum_{i=1}^n \|x_i\|,
\end{aligned}$$

であるので (MSKT) は (KST) より, $\sum_{k=2}^{n-1}\left(k - \left\|\sum_{i=1}^k \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|}\right\|\right)(\|x_k^*\| - \|x_{k+1}^*\|)$ の値だけ良い評価を与えると同時に, 拡張になっていることが分かる.

我々の目的は, これらの不等式 (KST), (MSKT) の幾何学的意味を考察することにより, その本質を捉えるとともに更なる精密化を行うことである. そのために, まずは 2 個の元に関する幾何学的意味を考察する. 定理 2.1 および定理 2.2 において $n = 2$ の場合はどちらも以下の通りになる.

定理 2.3 バナッハ空間 X の 0 でない *2* 個の元 x, y が $\|y\| \geqq \|x\|$ を満たすとき, 以下の不等式が成立する.

$$\begin{aligned}
\|x+y\| + \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right)\|x\| \qquad& \\
\leqq \|x\| + \|y\| \qquad& \qquad (2.3)\\
\leqq \|x+y\| + \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right)\|y\|&
\end{aligned}$$

不等式 (2.3) により精密化された非負の値は

$$\begin{aligned}
\left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right)\|x\| &= 2\|x\| - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\|x\| \\
&= \|x\| + \frac{\|x\|}{\|y\|}\|y\| - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\|x\| \\
&= \|x\| + \left\|\frac{\|x\|}{\|y\|}y\right\| - \left\|x + \frac{\|x\|}{\|y\|}y\right\|,
\end{aligned}$$

であるので, (2.3) の第 1 式は次のように変形できる.

$$\|x\| + \left\|\frac{\|x\|}{\|y\|}y\right\| - \left\|x + \frac{\|x\|}{\|y\|}y\right\| \leqq \|x\| + \|y\| - \|x+y\|.$$

すなわち, (2.3) は 2 つの三角不等式

$$\left\| x + \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| \leqq \|x\| + \left\| \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| \quad \text{及び} \quad \|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|$$

の関係を与えていることになる. このことをより明確にするために, $X = \mathbb{R}^2$ において $x = \overrightarrow{AD}$, $y = \overrightarrow{AB}$ の場合を考えると (2.3) は次の図 1 における $\triangle ACD$ とその内部に含まれる $\triangle AED$ の関係を表している.

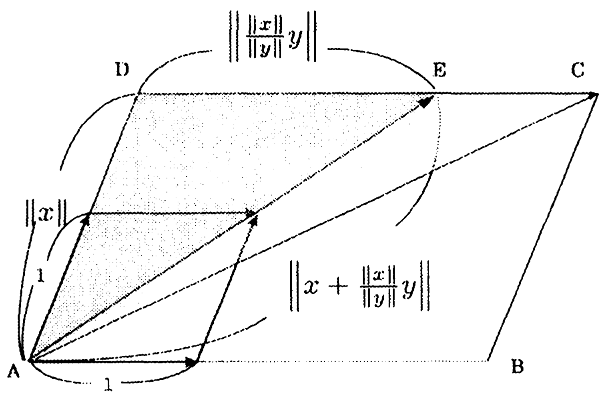

図 1: sharp triangle inequality

すなわち, $\triangle ACD$ に関する三角不等式の差分 $\|x\| + \|y\| - \|x+y\|$ $(\geqq 0)$ は, その内部に含まれる $\triangle AED$ に関する三角不等式の差分 $\|x\| + \left\| \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| - \left\| x + \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\|$ $(\geqq 0)$ よりも大きい事を示している. これは, A から C へ移動するには, D を経由するよりも, より内側にある E を経由した方が近道であることに対応していると考えられる. この考察から直ちに, 点 E より点 C に近い点を取れば, 更に良い評価を得る事が可能である. すなわち点 P を図 2 のように取ることにより, 定理 2.3 を更に精密化することが可能となる.

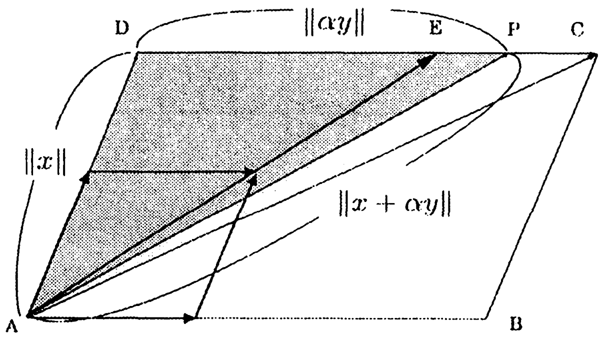

図 2: new sharp triangle inequality

以上の考察から, 直ちに定理 2.3 の拡張として次の定理を得る.

定理 2.4 (cf. [3, Theorem 2.2]) バナッハ空間 X の 0 でない 2 個の元 x, y, および $0 \leqq \alpha \leqq 1 \leqq \beta$ を満たす 2 つの実数 α, β に対して, 以下の不等式が成立する.

$$\begin{aligned} &\|x\| + \|\alpha y\| - \|x + \alpha y\| \\ &\qquad \leqq \|x\| + \|y\| - \|x + y\| \\ &\qquad\qquad \leqq \|x\| + \|\beta y\| - \|x + \beta y\| \end{aligned} \tag{2.4}$$

3 精密化された三角不等式の拡張と, その応用

この章では, 定理 2.4 を n 個の元に対して拡張するとともに, その応用についても触れる. X をバナッハ空間とし, そのノルムを $\|\cdot\|$ で表す. 正の整数 $n(\geqq 2)$ に対して, その要素全てが $[0,1]$ に含まれるような n 次正方行列全体を $M_n([0,1])$ とかき, $M_n([0,1])$ に含まれる下三角行列であって対角成分がすべて 1 であるもの全体を L_n で表す. すなわち,

$$L_n = \left\{ a = (a_{ij}) \in M_n([0,1]) \;\middle|\; \begin{array}{ll} a_{ij} = 0 & (\forall i > j);\ \text{and} \\ a_{ii} = 1 & (1 \leqq \forall i \leqq n) \end{array} \right\}.$$

整数 m を $2 \leqq m \leqq n$ を満たすように取る. このとき, 任意の L_n の元 $a = (a_{ij})$ に対して,

$$\ell_{ij}^a(m) = \begin{cases} a_{ij} \prod_{k=j+1}^{m} (1 - a_{ik}) & (2 \leqq \forall j \leqq m-1) \\ a_{im} & (j = m) \end{cases}$$

とかく. また, $a_{im} \neq 0$ $(1 \leqq \forall i \leqq m)$ であるとき,

$$r_{ij}^a(m) = \begin{cases} \ell_{ij}^a(m-1)\left(\frac{1}{a_{im}} - 1\right) & (2 \leqq \forall j \leqq m-1) \\ \frac{1}{a_{im}} & (j = m) \end{cases}$$

とする. このとき我々は, 次の定理を得た.

定理 3.1 $n \geqq 2$ とし, L_n の任意の元 $a = (a_{ij})$ をとる. このときバナッハ空間 X の任意の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して, 次の不等式が成立する.

$$\sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} \|\ell_{ij}^a(n) x_i\| - \left\| \sum_{i=1}^{j} \ell_{ij}^a(n) x_i \right\| \right) \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|.$$

更に $a_{in} \neq 0$ $(1 \leqq \forall i \leqq n)$ の仮定のもとで, 以下の逆不等式が成立する.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \\ &\leqq \left(\sum_{i=1}^{n} \|r_{in}^a(n) x_i\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} r_{in}^a(n) x_i \right\| \right) - \sum_{j=2}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{j} \|r_{ij}^a(n) x_i\| - \left\| \sum_{i=1}^{j} r_{ij}^a(n) x_i \right\| \right) \end{aligned}$$

定理3.1の応用として, L_n の元 $a=(a_{ij})$ を適当に選ぶことにより, 直ちに定理2.2を導くことが可能である. すなわち定理3.1は定理2.1及び定理2.2の拡張となっている.

系 3.2 (cf. [8, Theorem 1]) バナッハ空間 X の0でない n 個の元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ に関して, 以下の不等式が成立する.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + \sum_{j=2}^{n}\left(j - \left\|\sum_{i=1}^{j} \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|}\right\|\right)(\|x_j^*\| - \|x_{j+1}^*\|) \leqq \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|,$$

かつ

$$\sum_{i=1}^{n}\|x_i\| \leqq \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| - \sum_{j=2}^{n}\left(j - \left\|\sum_{i=1}^{j} \frac{{}^*x_i}{\|{}^*x_i\|}\right\|\right)(\|{}^*x_{j+1}\| - \|{}^*x_j\|)$$

ここで $x_1^*,\cdots,x_n^*$ と ${}^*x_1,\cdots,{}^*x_n$ は $\|x_1^*\| \geqq \|x_2^*\| \geqq \cdots \geqq \|x_n^*\|$, $\|{}^*x_n\| \geqq \|{}^*x_{n-1}\| \geqq \cdots \geqq \|{}^*x_1\|$ および ${}^*x_0 = x_{n+1}^* = 0$ をみたす x_i の並べ替えとする.

本質的に, この系は定理2.2と同等であるが, 忠実な形で導くことも可能である. その詳細は [7] を参照して頂きたい.

参考文献

[1] S.S. Dragomir, *Reverses of the triangle inequality in Banach spaces*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **6**(5)(2005), Art. 129, pp. 46.

[2] S.S. Dragomir, *Inequalities for the p-angular distance in normed linear spaces,* to appear in Math. Inequal. Appl..

[3] M. Fujii, M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Sharp mean triangle inequality*, to appear in Math. Inequal. Appl..

[4] C.-Y. Hsu, S.-Y. Shaw and H.-J. Wong, *Refinements of generalized triangle inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **344**(2008), 17–31.

[5] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Sharp triangle Inequality and its reverse in Banach spaces,* Math. Inequal. Appl. **10** no.2(2007), 451–460.

[6] L. Maligranda, *Some remarks on the triangle inequality for norms,* Banach J. Math. Anal., **2** no.2(2008), 31–41.

[7] K. Mineno, Y. Nakamura, S. Nakamura, C. Tamiya and T. Ohwada, *On relation between triangle inequalities in Banach spaces and its applications,* Preprint.

[8] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, M. Kato and T. Tamura, *On sharp triangle Inequalities in Banach spaces,* J. Math. Anal. Appl. **10** no.2(2007), 451–460.

[9] J. Pěcarić and R. Rajić, *The Dunkl-Williams inequality with n elements in normed linear spaces,* Math. Inequal. Appl. **10** no.2(2007), 461–470.

[10] S. Saitoh *Generalizations of the triangle inequality,* JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **4**(2003), no. 3, Article 62, 5 pp.