数理解析研究所講究録
第 1670 巻 2009 年 47-50

実閉体上への Borsuk-Ulam 型定理の拡張について

長崎生光、川上智博、原靖浩、牛瀧文宏

603-8334 京都市北区大将軍西鷹司町 13 京都府立医科大学数学教室、
640-8510 和歌山市栄谷 930 和歌山大学教育学部数学教室、
560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科数学教室、
603-8555 京都市北区上賀茂本山 京都産業大学理学部数理科学科数学教室

nagasaki@koto.kpu-m.ac.jp
kawa@center.wakayama-u.ac.jp
hara@math.sci.osaka-u.ac.jp
ushitaki@ksuvx0.kyoto-su.ac.jp

1. 序文

ここでは、実閉体 R の通常の構造 $(R, +, \cdot, >)$ の順序極小拡張 $\mathcal{N} = (R, +, \cdot, >, ...)$ において、Borsuk-Ulam 型定理について考察する。順序極小構造は、実数体の順序極小拡張 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >, \dots)$ に限っても、[6] により、非可算無限個存在することが知られている。

デファイナブルカテゴリーに関しては、[1], [2] などに性質がまとめられている。また、[7] では、少し一般化された形でまとめられている。

ここでは、デファイナブル集合は、すべてパラメータつきとし、デファイナブル写像は連続とし、特に断らなければ、すべて $\mathcal{N} = (R, +, \cdot, >, ...)$ で考えるものとする。

2000 *Mathematics Subject Classification*. 57S10, 57S17, 55M20, 55M35, 03C64.
Keywords and Phrases. Borsuk-Ulam 型定理、順序極小構造, 実閉体.

$\mathcal{N}$ が順序極小とは、R の任意のデファイナブル集合が点と開区間の有限和となることである。ここで、開区間とは、(a,b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$ を表すものとする。

k を自然数とし、C_k を位数 k の巡回群とする。

$\mathcal{S}^n$ を $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の単位球面で、対蹠点作用による C_2 作用をもつとする。変換群論的視点による古典的 Borsuk-Ulam 定理は、連続 C_2 写像 $\mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^m$ が存在すれば、$n \leq m$ となることを証明している。

古典的 Borsuk-Ulam 定理の拡張が、[8], [5] によりなされている。

Smith ホモロジーを用いることにより、 [8], [5] の一般化を証明することができる。

定理 2.1 ([4]). X を弧状連結自由 C_k 空間、Y をハウスドルフ自由 C_k 空間とする。ある自然数 n が存在して、各 $1 \leq q \leq n$ に対して $H_q(X;\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) = 0$ かつ $H_{n+1}(Y/C_k;\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) = 0$ ならば、X から Y への連続 C_k 写像は存在しない。ただし、ここでのホモロジーは特異ホモロジーを表すとする。

以下の例により、定理 2.1 において、$k = 1, \infty$ ととることができない。

例 2.2. *(1)* n を自然数とし、Y を一点からなる集合とする。このとき、定値写像 $\mathbb{R}^n \to Y$ は連続写像で、$\mathbb{R}^n$ と Y は定理 *2.1* の条件を満たす。よって、$k = 1$ ととることができない。

(2) n を自然数とする。$\mathbb{R}^n$ の自由 $\mathbb{Z}$ 作用として $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (g, x_1, \ldots, x_n) \mapsto (g + x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を考える。このとき、$\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}$ は定理 *2.1* の条件を満たし、写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x_1, \ldots, x_n) = x_1$ は連続 $\mathbb{Z}$ 写像である。よって、$k = \infty$ ととることができない。

$R = \mathbb{R}_{alg}$ のとき、C^∞ 関数はよい性質をもたない。

$a, b \in \mathbb{R}_{alg}$ に対して、$[a,b]_{\mathbb{R}_{alg}} = \{x \in \mathbb{R}_{alg} | a \leqq x \leqq b\}, (a,b)_{\mathbb{R}_{alg}} = \{x \in \mathbb{R}_{alg} | a < x < b\}$ とする。

$$f : [1,10]_{\mathbb{R}_{alg}} \to \mathbb{R}_{alg}, f(x) = \begin{cases} x, & 1 \leqq x < \pi \\ x - 5, & \pi < x < 2\pi \\ -x + 30, & 2\pi < x \leqq 10 \end{cases} \quad \text{とする.}$$

このとき、f は C^∞ 級関数であるが、デファイナブルでない。この f に対して、中間値の定理、最大値・最小値の定理、ロルの定理、平均値の定理が不成立となる。$f' > 0$ ならば、関数 f が増加しているという定理も不成立となる。

S^n を R^{n+1} の単位球面とする。$R = \mathbb{R}_{alg}$ のとき、S^n は弧状連結でも連結でもない。これより、$X = S^{2n+1}, Y = S^{2m+1}$ のときでさえも、古典的 Borsuk-Ulam 定理と定理 2.1 を適用することができない。

特異デファイナブルホモロジーが [9] によって導入された。この特異デファイナブルホモロジーを用いて、定理 2.1 のデファイナブル版を得ることができる。

定理 2.3 ([4]). *X をデファイナブル連結デファイナブル集合で、自由デファイナブル C_k 作用をもっているとする。Y を自由デファイナブル C_k 作用をもったデファイナブル集合とする。ある自然数 n が存在して、各 $1 \leq q \leq n$ に対して $H_q(X;\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) = 0$ かつ $H_{n+1}(Y/C_k;\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) = 0$ ならば、X から Y へのデファイナブル C_k 写像は存在しない。ただし、ここでのホモロジーは特異デファイナブルホモロジーを表すとする。*

定理 2.3 の Y に関する条件は、$\dim Y \leq n$ ならば満たされるものである。

定理 2.3 の系として、[3] の一般化を得る。

系 2.4 ([4]). *(1) k を 3 以上の自然数とし、C_k が S^{2m+1} と S^{2n+1} にデファイナブルかつ自由に作用しているとする。デファイナブル C_k 写像 $f : S^{2m+1} \to S^{2n+1}$ が存在すれば、$m \leq n$ である。*

(2) S^m と S^n が自由デファイナブル C_2 作用をもっているとする。デファイナブル C_2 写像 $f : S^m \to S^n$ が存在すれば、$m \leq n$ である。

定理 2.3 を用いることにより、以下の定理を得る。

定理 2.5 ([4]). *k を素数とし、X をデファイナブル連結デファイナブル集合で、自由デファイナブル C_k 作用をもっているとする。ある自然数 n が存在して、各 $1 \leq q \leq n$ に対して $H_q(X;\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) = 0$ とする。Y がデファイナブル集合で、$H_{n+1}(Y^*/C_k;\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) = 0$ を満たすならば、任意のデファイナブル写像 $f : X \to Y$ は C_k 一致点をもつ。すなわち、g を C_k の生成元とするとき、$x \in X$ が存在して $f(x) = f(gx) = \cdots = f(g^{k-1}x)$ となる。ただし、Y^* は、Y の k 個の直積集合から対角線集合を除いた集合で、Y^* 上の自由デファイナブル C_k 作用を $g(y_1, y_2, \ldots, y_k) = (y_2, y_3, \ldots, y_k, y_1)$ と定義したものである。*

References

[1] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[2] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.

[3] I. Nagasaki, T. Kawakami, Y. Hara and F. Ushitaki, The Borsuk-Ulam theorem in a real closed field, Far East J. Math. Sci. (FJMS) 33 (2009), 113–124.

[4] I. Nagasaki, T. Kawakami, Y. Hara and F. Ushitaki, The Smith homology and Borsuk-Ulam type theorems, preprint.

[5] Pedro L. Q Pergher, Denise de Mattos and Edivaldo L. dos Santos, *The Borsuk-Ulam theorem for general spaces*, Arch. Math. (Basel) **81** (2003), 96–102.
[6] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751-777.
[7] M. Shiota, *Geometry of subanalyitc and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150** (1997), Birkhäuser.
[8] J.W. Walker, *A homology version of the Borsuk-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly **90** (1983), 466–468.
[9] A. Worheide, *O-minimal homology*, Ph.D. thesis (1996), University of Illinois at Urbana-Champaign.