数理解析研究所講究録
第 1670 巻 2009 年 40-46

Quillen 複体のホモトピー型について

獨協医科大学基盤教育センター数学・統計学　藤田亮介 (Ryousuke Fujita)
Department of mathematics and statistics, Dokkyo Medical University

1 序

Quillen 複体とは, 有限群 G の基本アーベル p 部分群の集合に, 包含で順序を入れた部分群複体のことである. Quillen 複体のホモトピー性質に関する研究は, 主に組み合わせ論, 有限群論の立場から行われてきた. 特に有限群論研究者のモチベーションは「非可換有限単純群, 特に 26 個の散在群の特徴付け」にある. その意味では純代数なのであるが, 扱う対象が図形であるだけに, トポロジー的な立場から有限群を眺めたいという思いが筆者にはある.

本稿では, Quillen 複体のホモトピー型に関する研究を概観するとともに, 現時点での最新の結果を紹介することを目的としたい.

2 順序複体のトポロジー

順序集合 $\mathcal{P}$ に対して, 集合

$$\Delta(\mathcal{P}) =: \{X \subseteq \mathcal{P} \mid X \text{ は } (\mathcal{P}, \leq) \text{ の全順序有限部分集合} \}$$

を考えると, 対 $(\mathcal{P}, \Delta(\mathcal{P}))$ には抽象的単体複体の構造が入る. これを $\mathcal{P}$ から構成される順序複体という. しばしば対 $(\mathcal{P}, \Delta(\mathcal{P}))$ を単に $\Delta(\mathcal{P})$ と省略する. この順序複体に対して, その幾何学的実現を $|\Delta(\mathcal{P})|$ と書くことにすると, 順序集合 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ 間の順序を保つ写像 $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ は, 自然に連続写像 $|f| : |\Delta(\mathcal{P})| \to |\Delta(\mathcal{Q})|$ を誘導する. また, 2 つの順序を保つ写像 $f, g : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ が, 任意の $x \in P$ に対して $f(x) \leq g(x)$ ならば, $|f|, |g|$ はホモトピックである. $|f|, |g|$ もしばしば単に f, g と省略する. 幾何学的実現でのトポロジーの用語をそのまま順序集合での用語として使用しよう. 以下, この約束に従う. 最大元あるいは最小元をもつ順序集合は直ちに可縮である. もっと一般に次が成り立つ.

命題 2.1. $\mathcal{P}$ を順序集合とするとき, 順序を保つ自己写像 $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ があって, 全ての元 $x \in \mathcal{P}$ に対して $x \leq f(x) \geq x_0$ となるような $x_0 \in \mathcal{P}$ があれば, $\mathcal{P}$ は可縮である.

順序複体のトポロジーでは, 上の可縮を特に**錐的に可縮** (conically contractible) とよんでいる. 次に, 順序集合 $\mathcal{P}$ の切片を次の記号で書くことにしよう.

$$\mathcal{P}_{\leq x} =: \{y \in \mathcal{P} \mid y \leq x\}$$

$\mathcal{P}_{<x}, \mathcal{P}_{\geq x}, \mathcal{P}_{>x}$ 等も同様に定義される. この記号の下で, 述べられる次の定理は順序複体の理論で基礎となるものである.

命題 2.2. $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ を順序集合とする. 順序を保つ写像 $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ があって, 任意の元 $y \in \mathcal{Q}$ に対して $f^{-1}(\mathcal{Q}_{\leq y})$ (あるいは $f^{-1}(\mathcal{Q}_{\geq y})$) が可縮ならば, f はホモトピー同値である.

この定理は Quillen によって発見され, "Fibre Lemma" と称されている ([8]). 証明は「Acyclic Carrier Theorem」を使ってなされる. この命題の直接の応用として, 次の定理が知られている.

定理 2.3. 有限順序集合 $\mathcal{P}$ に対して, $\mathcal{P}^{<} =: \{x \in \mathcal{P} \mid \mathcal{P}_{<x}$ は可縮ではない $\}$ とおく. そのとき, $\mathcal{P}^{<} \subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ を満たす任意の $\mathcal{P}$ の部分順序集合 $\mathcal{Q}$ と $\mathcal{P}$ はホモトピー同値である. 包含写像がホモトピー同値写像を誘導する.

証明. $\mathcal{P}$ は有限順序集合であるから, $\mathcal{P}\backslash\mathcal{Q}$ には極大元が存在するが, そのうちの 1 つを x とし, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}\backslash\{x\}$ とおく. 包含写像 $\iota : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}$ の各ファイバー $\iota^{-1}(\mathcal{P}_{\leq y}) = (\mathcal{P}_1)_{\leq y}$ を考察する. ここで, (i) $y = x$, (ii) $y \neq x$ に場合分けする. まず, (i) の場合であるが, $(\mathcal{P}_1)_{\leq y} = (\mathcal{P}_1)_{\leq x} = \mathcal{P}_{<x}$ となる. 実際, $s \in \mathcal{P}_{<x}$ を取ると, $s \neq x$ であるから $\mathcal{P}_1$ の定義より $s \in (\mathcal{P}_1)_{\leq x}$ である. よって, $(\mathcal{P}_1)_{\leq x} \supseteq \mathcal{P}_{<x}$. 逆の包含は明らかである. 一方, x の選び方から $x \notin \mathcal{Q}$ である. よって, $x \notin \mathcal{P}^{<}$. ゆえに, $\mathcal{P}_{<x}$ は可縮である. (ii) の場合は $y \in \mathcal{P}_1$ であるから, $(\mathcal{P}_1)_{\leq y}$ は最大元 y をもつ. よって, $(\mathcal{P}_1)_{\leq y}$ は可縮である. (i), (ii) いずれの場合にも, Fibre Lemma により, $\iota : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}$ はホモトピー同値である. 次に, $\mathcal{P}_1\backslash\mathcal{Q}$ の極大元を x_1 とし, $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1\backslash\{x_1\}$ とおく. 上と同じ議論により, $\mathcal{P}_2$ と $\mathcal{P}_1$ はホモトピー同値である. この操作をさらに続けるが, $\mathcal{P}$ の有限性から高々有限回で $\mathcal{Q}$ に到達する. □

3 Brown 複体と Quillen 複体

前節で見たように, 順序集合 $\mathcal{P}$ に応じて様々な順序複体を考えることができ, そのホモトピー同値性を調べることが可能である.

特に, 有限群 G の部分群のある種の族を対象に, 包含を順序として定義するとき, その順序複体を「部分群複体」という. 以下, 考察対象とするのは Brown 複体, Quillen 複体とよばれる部分群複体である.

有限群 G とその位数を割る素数 p を 1 つ固定したとき,

$$\mathcal{S}_p(G) =: \{G \text{ の非自明な } p \text{ 部分群 }\}$$
$$\mathcal{A}_p(G) =: \{G \text{ の非自明な基本アーベル } p \text{ 部分群 }\}$$

をそれぞれ Brown 複体, Quillen 複体という. これらの部分群複体が注目されたのは, 1970 年代に K.S.Brown による次の " ホモロジカルなシロ—の定理 " による.

定理 3.1. $\mathcal{S}_p(G)$ のオイラー標数は, シロー p 部分群の位数を法として 1 と合同である.

また, $\mathcal{S}_p(G)$ と $\mathcal{A}_p(G)$ のホモトピー的関係については次の定理が答える.

定理 3.2. Quillen 複体は Brown 複体にホモトピー同値である.

この定理は最初に Quillen により発見された ([9]) もので, 包含写像 $\iota : \mathcal{A}_p(G) \to \mathcal{S}_p(G)$ に対して, $\mathcal{S}_p(G)$ に属する任意の p 部分群 P のファイバー $\iota^{-1}(\mathcal{S}_p(G)_{\leq P})$ に Fibre Lemma を使って直接示される. 一方, 次の命題が成り立つ.

命題 3.3. $\mathcal{A}_p(G) = \mathcal{S}_p(G)^{<}$

$\mathcal{S}_p(G)^{<}$ は前節の定理 2.3 で用いられた記号であり, 再述すると

$$\mathcal{S}_p(G)^{<} = \{P \in \mathcal{S}_p(G) \mid \mathcal{S}_p(G)_{<P} \text{ は非可縮 }\}$$

である. 証明を与えておこう.

証明. $P \in \mathcal{S}_p(G)$ が非基本 p 部分群であれば, 非自明なフラッティニ部分群 $\Phi(P)$ が存在する. そこで, 写像 $f : \mathcal{S}_p(G)_{<P} \to \mathcal{S}_p(G)_{<P}$; $Q \mapsto Q\Phi(P)$ と定義すれば, well-defined である. さらに, $Q \subseteq Q\Phi(P) \supseteq \Phi(P)$ であるので, 命題 2.1 より $\mathcal{S}_p(G)_{<P}$ は可縮である. よって, $\mathcal{A}_p(G) \supseteq \mathcal{S}_p(G)^{<}$ を得る. 逆の包含を示すには, $P \in \mathcal{S}_p(G)$ が基本 p 部分群であると仮定する. 基本 p 部分群 P は $\mathbb{Z}_p$ 上のベクトル空間と思えるが, $\mathcal{S}_p(G)_{<P} = \mathcal{S}_p(P)_{<P}$ であることに注意すると, この集合はベクトル空間 P の真部分空間族の束である. ゆえに, Solomon-Tits の定理より, $\mathcal{S}_p(G)_{<P}$ はいくつかの球面のブーケあるいは空集合にホモトピー同値であることがわかる. いずれにしても, 非可縮である. よって, $\mathcal{A}_p(G) \subseteq \mathcal{S}_p(G)^{<}$ である. □

再度, 命題3.3を見直そう. 言うまでもなく,「Quillen複体 $\mathcal{A}_p(G)$ はBrown複体 $\mathcal{S}_p(G)$ の中で, “可縮”というホモトピーの言葉で特徴付けされる」のである. そこで, 自然に次の様な問題が提起される.

問題 3.4. 他の部分群複体で, このようなものがあるのか?

この問題に関しては, いくつかは知られている. 例えば, Boucによる次の部分群複体がある.

$$\mathcal{B}_p(G) =: \{P \in \mathcal{S}_p(G) \mid P = O_p(N_G(P))\}$$

ここで, 記号 $O_p(N_G(P))$ は P の G における正規化群 $N_G(P)$ の最大正規 p 部分群を表す. この部分群複体は p-radical複体, あるいはBouc複体とよばれている. その定義からわかるように, 有限群 G のシロー p 部分群の集合 $\mathrm{Syl}_p(G)$ を含む族であり, $\mathcal{S}_p(G)$, 従って, $\mathcal{A}_p(G)$ とホモトピー同値であることがわかる. さて, P の G における中心化群を $C_G(P)$ とするとき, p-centric複体とよばれる次の部分群複体

$$\mathcal{C}_p(G) =: \{P \in \mathcal{S}_p(G) \mid C_G(P) \text{ の } p \text{ 元は } P \text{ に属する }\}$$

と $\mathcal{B}_p(G)$ との交わりをSawabe複体という. これを $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ とかく. すなわち,

$$\mathcal{B}_p^{cen}(G) =: \mathcal{B}_p(G) \cap \mathcal{C}_p(G)$$

である. Sawabe複体 $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ は p-centric複体 $\mathcal{C}_p(G)$ とホモトピー同値であるが, 一般には $\mathcal{B}_p(G)$ とはホモトピー同値にはならない. Sawabeの結果 [11] は次の定理である.

定理 3.5. V を $\mathcal{B}_p(G) \backslash \mathcal{B}_p^{cen}(G)$ に属する最大位数の元とし, その位数を p^d とおく. また, G のシロー p 部分群の位数を p^n とする. そのとき, $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ のオイラー標数は p^{n-d} を法として1と合同である.

変換群論的には次の問題も自然に提起される.

問題 3.6. 同変版の順序複体, 特に部分群複体の理論は?

部分群複体の理論を同変カテゴリーで考えるためには, 共役作用を考えるのが自然であり, その下で部分群複体は G 複体になる. 一般に, 前節の命題2.2にあたる次の命題 [14] が知られている.

命題 3.7. $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ を G 順序集合とする. 順序を保つ G 写像 $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ があって, 任意の元 $y \in \mathcal{Q}$ に対して $f^{-1}(\mathcal{Q}_{\leq y})$ (あるいは $f^{-1}(\mathcal{Q}_{\geq y})$) が G_y 可縮ならば, f は G ホモトピー同値である.

この命題を基礎として, 既述の命題, 定理は同変版に拡張することができる.

4 Quillen 複体のホモトピー型

この節では, Quillen 複体のホモトピー型を考える. そもそも, Brown 複体や Quillen 複体は p 部分群の全順序列を, その単体とするものであり, 位数が低い群を除いて, 一般に直接描写することは不可能である. 筆者が非常に興味をそそられたのは次の Quillen の定理 [9] である.

定理 4.1. 有限可解群 G について, $O_p(G)$ が非自明であるための必要十分条件は Brown 複体 $\mathcal{S}_p(G)$ が可縮になることである.

この定理は, 可縮というホモトピーの言葉で, 群 G の特徴付けを見事に主張している. そこで, 次の問題を提起した.

問題 4.2. Brown 複体 $\mathcal{S}_p(G)$(あるいは Quillen 複体 $\mathcal{A}_p(G)$) が球面にホモトピー同値になるか? またそのときの特徴付けはどうなるのか?

これに対する筆者の解答は以下の定理である.

定理 4.3. どのような有限群 G に対しても, Quillen 複体 $\mathcal{A}_p(G)$ は球面にホモトピー同値にならない.

証明. $\mathcal{A}_p(G)$ が n 次元球面 S^n にホモトピー同値であるとすると, オイラー標数 $\chi(\mathcal{A}_p(G)) = 1 + (-1)^n$ である. 一方, ホモロジカルなシローの定理により, $\chi(\mathcal{A}_p(G)) = 1 + kp^m$ (ここで $m \geq 1, k$ は適当な整数). よって, $kp^m = (-1)^n$ である. これは矛盾である. □

それでは, Quillen 複体 $\mathcal{A}_p(G)$ のホモトピー型の正体は何なのか? これに対する 1 つの解答は 2005 年の Francesco の次の定理 [3] である.

定理 4.4. G を有限可解群, p を G の位数の奇素因数とする. そのとき, Quillen 複体 $\mathcal{A}_p(G)$ はいくつかの球面のブーケにホモトピー同値である.

なお, この定理で述べている各球面については次元の相違性を許すが, 筆者は次元の精緻化を主張する次の定理を得た.

定理 4.5. m, n は偶奇性が一致する自然数とする. そのとき, Quillen 複体 $\mathcal{A}_p(G)$ は S^m と S^n のブーケにホモトピー同値にはならない. 特に, その Quillen 複体 $\mathcal{A}_p(G)$ が S^m と S^n のブーケにホモトピー同値になるような有限可解群は存在しない.

証明. $\mathcal{A}_p(G)$ が m 次元球面 S^m と n 次元球面 S^n のブーケにホモトピー同値であるとする. オイラー標数を計算しよう. ここで, $\tilde{\chi}(\mathcal{A}_p(G)) = \chi(\mathcal{A}_p(G)) - 1$

とおくと, $\tilde{\chi}(\mathcal{A}_p(G)) = (-1)^m + (-1)^n$ である. m, n の偶奇性の条件から, この値は 2 あるいは -2. ホモロジカルなシローの定理により, G のシロー部分群は位数 2 の巡回群に限定される. そのとき, Quillen 複体 $\mathcal{A}_p(G)$ はいくつかの点からなる 0 次元複体であるが, これは矛盾である. □

さらに, これを一般化すれば次の系を得る.

系 4.6. q を素数とする. そのとき, Quillen 複体 $\mathcal{A}_p(G)$ は n 次元球面の q 個の S^n のブーケにホモトピー同値にはならない. 特に, その Quillen 複体 $\mathcal{A}_p(G)$ が q 個の S^n のブーケにホモトピー同値になるような有限可解群は存在しない.

最後に非可解群の場合を触れておこう. 例えば, G が 5 次交代群 A_5 の場合, Quillen 複体 $\mathcal{A}_p(A_5)$ は $p = 2, 3, 5$ のいずれの場合も可縮ではない ([4]). 対称群に関しては Ksontini による次の結果 [5, 6] が知られている.

定理 4.7. n 次対称群 S_n の Quillen 複体 $\mathcal{A}_p(S_n)$ について, p が奇素数であるとき, 単連結であるための必要十分条件は, $3p + 2 \le n < p^2$ あるいは $n \ge p^2 + p$ を満すことである. また, $p = 2$ のとき, 単連結であるための必要十分条件は, $n = 4$ または $n \ge 7$ となることである.

これとは別に, Shareshian は「GAP」を使って, Quillen 複体 $\mathcal{A}_3(S_{13})$ のホモロジー群を計算し, トーション・フリー加群ではないことを示した ([10]). これは Quillen 複体 $\mathcal{A}_3(S_{13})$ が球面のブーケにホモトピー同値ではないことを意味している.

参考文献

[1] Björner A., *Homotopy type of posets and lattice complementation*, J. Combinatorial Theory, Series A. **30**(1981), 90–100.

[2] Björner A and Walker J.W., *A homotopy complementation formula for partially ordered sets*, Europ. J. Combinatorics. **4**(1983),11-19.

[3] F. Francesco., *On the homotopy type of the Quillen complex of finite soluble groups*, J. Algebra. **283**(2005), 639–654.

[4] Fujita F., *On the homotopy equivalence of the subgroup complex(Japanese)*, RIMS Kokyuroku. **1575**(2008), 22–39.

[5] Ksontini R., *Simple connectivity of the Quillen complex of the symmetric group*, J. Combinatorial Theory, Series A. **103**(2003), 257–279.

[6] Ksontini R., *The fundamental group of the Quillen complex of the symmetric group*, J. Algebra. **282**(2004), 33–57.

[7] Pulkus J and Welker V., *On the homotopy type of the p-subgroup complex for finite solvable groups*, J. Austral. Math. Soc, Series A. **69**(2000), 212-228.

[8] Quillen D., *Higher algebraic K-theory I*, Lecture Notes in Mathematics.,vol.**341**, Springer-Verlag, Berlin, 1973, pp.85–147.

[9] Quillen D., *Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group*, Advances in Math. **28**(1978), 101–128.

[10] Shareshian J., *Hypergraph matching complexes and Quillen complexes of symmetric groups*, J. Combinatorial Theory, Series A. **106**(2004), 299–314.

[11] Sawabe M., *On the reduced Lefschetz module and the centric p-radical subgroups*, Tokyo J. Math. **28**(2005), 79–90.

[12] Symonds P., *The orbit space of the p-subgrpup complex is contractible*, Comment. Math. Helv. **73**(1998), 400–405.

[13] Thévenaz J., *Permutation Representations Arising from Simplicial Complexes*, J. Combinatorial Theory, Series A. **46**(1987), 121-155.

[14] Thévenaz J and Webb P.J., *Homotopy Equivalence of Posets with a Group Action*, J. Combinatorial Theory, Series A. **56**(1991), 173–181.

[15] Walker J.W., *Homotopy type and Euler characteristic of partially ordered set*, Europ. J. Combinatorics. **2**(1981), 373–384.

[16] Webb P.J., *Subgroup complexes*, Proc. Symp. in Pure Math. **47**(1987), the Arcata Conf. in Representation of Finite Groups, Vol , 349–365.

[17] Welker V., *The Poset of Conjugacy Classes of Subgroups in a Finite Solvable Group*, J. Algebra. **148**(1992), 203-218.