数理解析研究所講究録
第 1671 巻 2009 年 113-119

Mountain pass theorem in ordered Banach spaces and its applications

佐賀大学理工学部　梶木屋 龍治 (Ryuji Kajikiya)
Department of Mathematics, Faculty of Science and Engineering, Saga University, Saga, 840-8502, Japan
E-mail: kajikiya@ms.saga-u.ac.jp

本講演では, 順序バナッハ空間において, 峠の定理を構成し, それを用いて次の楕円型偏微分方程式の正値解の存在を証明する.

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \quad (x \in \Omega), \\ u = 0 \quad (x \in \partial\Omega). \end{cases} \tag{1}$$

ここで, Ω は滑らかな境界をもつ $\mathbb{R}^N$ の有界領域である. 方程式が変分構造を持ち, 汎関数が峠の定理の仮定を満たすときに, 正値解を求める方法として, 峠の定理と Nehari 多様体の方法がある. この研究の動機を説明するために, これらの方法を概説する. 峠の定理を説明するために, 次の方程式を考える.

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u^p \quad (x \in \Omega), \\ u = 0 \quad (x \in \partial\Omega), \end{cases} \tag{2}$$

ここで, $a \in C(\overline{\Omega})$, $a \geq 0$ $(x \in \Omega)$, $a \not\equiv 0$, $N = 1, 2$ のとき $1 < p < \infty$ であり, $N \geq 3$ のとき, $1 < p < (N+2)/(N-2)$ と仮定する. $L^p(\Omega)$ ノルムを $\|u\|_p$ で, $W^{m,p}(\Omega)$ ノルムを $\|u\|_{m,p}$ で表す. (2) に対するラグランジェ汎関数 $I(u)$ を次のように定義する.

$$I(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} a(x)(u^+)^{p+1} \right) dx. \tag{3}$$

ここで, $u^+(x) = \max(u(x), 0)$ とする. このとき,

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)),$$

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega)) : \ \gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = u_1\},$$

と定義する．ただし，$I(u_1) < 0$ なるように u_1 を固定する．峠の定理により，c は I の臨界値になる．すなわち，$I'(u) = 0$, $I(u) = c > 0$ となる $u \in H_0^1(\Omega)$ が存在する．ゆえに，u は，

$$-\Delta u = a(x)(u^+)^p \quad (x \in \Omega), \quad u = 0, \quad (x \in \partial\Omega),$$

の非自明な弱解となる．楕円型方程式の正則性定理により，すべての $q \in [1, \infty)$ に対して，$u \in W^{2,q}(\Omega)$ となる．Ω において，$a \geq 0$ なので，強最大値原理により，$u(x) > 0$ となる．従って，u は (2) の正値解である．しかし，もし，$a(x)$ が符号を変えるときは，この論法は，適用できない．

次に Nehari 多様体の方法について説明する．楕円型境界値問題 (1) を考える．次のように $I(u)$, $J(u)$, N を定義する．

$$I(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u) \right) dx,$$

$$F(x,u) := \int_0^u f(x,t)dt,$$

$$J(u) := I'(u)u = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - uf(x,u) \right) dx,$$

$$N := \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \ J(u) = 0\}.$$

N は Nehari 多様体と呼ばれる．f についての適当な仮定の下に，N は空集合でなく，$I(u)$ は，N において正の下限をもつ．

$$d := \inf\{I(u) : \ u \in N\} > 0,$$

とおく．ある $u_0 \in N$ が存在して，$I(u)$ は最小値 d を u_0 において取る．ここで，$f(x,s)$ が s に関して，奇関数であると仮定する．従って，$sf(x,s)$, $F(x,s)$ は s について偶関数となる．ゆえに $u \in N$ のとき，$|u| \in N$ となる．u_0 を $|u_0|$ に置き換える．このとき，$u_0 \geq 0$, $u_0 \in N$, u_0 で I は最小値を取る．このとき，ラグランジェ乗数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して，$I'(u_0) + \lambda J'(u_0) = 0$ となる．f に対する適当な仮定の下に，$\lambda = 0$ が成り立つ．従って，u_0 は $I(u)$ の臨界点となり，正値解が得られた．

もし，$f(x,s)$ が s について奇関数でないならば u_0 を $|u_0|$ に置き換えることはできない．特に，$f(x,0) \neq 0$ のときは，この方法は，適用できない．本講演の目的は，$a(x)$ が符号を変えたり，$f(x,0) \neq 0$ の場合を扱うことである．そのために，順序バナッハ空間において，峠の定理を構成する．

定義 1. 次の条件 (i)–(v) を満たすときに，E をリース・バナッハ空間と呼ぶ．

(i) $(E, \leq)$ は，順序集合である．

(ii) $(E, \|\cdot\|)$ は, バナッハ空間である.

(iii) $u, v, w \in E$, $\lambda \geq 0$ とする. もし $u \leq v$ ならば, $u + w \leq v + w$ であり, $\lambda u \leq \lambda v$ である.

(iv) $E^+ := \{u \in E : \ u \geq 0\}$ は, E の閉部分集合である.

(v) 任意の $u, v \in E$, に対して, $u \vee v := \sup\{u, v\}$ と $u \wedge v := \inf\{u, v\}$ が存在する.

E^+ は, positive cone と呼ばれる. リース・バナッハ空間 E に対して, 次の記号が定義できる.

$$|u| := u \vee (-u), \quad u^+ := u \vee 0, \quad u^- := (-u) \vee 0.$$

例 2. 1 階のソボレフ空間 $W^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ は, リース・バナッハ空間である. さらに $1 \leq p < \infty$ のとき, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ に対して $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ を対応させる写像は, 連続である. この写像は, $W_0^{1,p}(\Omega)$ においても連続である. さらに, 写像 $u \mapsto u^+$ 及び, $u \mapsto u^-$ も連続となる. $m \geq 2$ のとき, $W^{m,p}(\Omega)$, $W_0^{m,p}(\Omega)$ は, リース・バナッハ空間にならない.

定義 3. $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ とする. このとき, c を次の式により定義する.

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)), \tag{4}$$

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], E^+) : \ \gamma(0) = e_0, \ \gamma(1) = e_1\}. \tag{5}$$

ここで, e_0, e_1 は次の仮定を満たすものである.

仮定 4. ある $e_0, e_1 \in E$, 及び E の開部分集合 U が存在して, 以下の条件を満たすものと仮定する.

(I_1) $e_0 \in E^+ \cap U, \quad e_1 \in E^+ \setminus \overline{U}$.

(I_2) $\max(I(e_0), I(e_1)) < \inf_{\partial U \cap E^+} I(u)$.

(I_3) もし $\{u_n\} \subset E$, $\mathrm{dist}(u_n, E^+) \to 0$, $I(u_n) \to c$, $I'(u_n) \to 0$ ならば, そのとき, $\{u_n\}$ は収束部分列をもつ.

(I_4) 次の条件 (i) または (ii) のいずれかを満たす $a \in (-\infty, c)$ と $\varepsilon > 0$ が存在する.

(i) もし, $a < I(u) < c$ かつ $u \in E_\varepsilon^+$ ならば, $I(|u|) \leq I(u)$ である.

(ii) もし, $a < I(u) < c$ かつ $u \in E_\varepsilon^+$ ならば, $I(u^+) \leq I(u)$ である.

ただし, $E_\varepsilon^+ := \{u \in E : \ \mathrm{dist}(u, E^+) \leq \varepsilon\}$.

定理 5. E を写像 $u \mapsto |u|$ が連続となるリース・バナッハ空間とする. 仮定 4 の下に, $I'(u) = 0$ かつ $I(u) = c$ となる $u \in E^+$ が存在する.

通常の峠の定理は, 非自明な臨界点の存在を保証する. しかし, 定理 5 は, 非自明かつ非負な臨界点の存在を示している. 次の条件を考える.

$(\mathrm{PS})_c$ $\quad I(u_n) \to c,\ I'(u_n) \to 0,$ ならば, $\{u_n\}$ は収束部分列をもつ.

明らかに, $(\mathrm{PS})_c$ から (I_3) が従う.

系 6. (I_1), (I_2), $(\mathrm{PS})_c$ を仮定する. さらに, 「すべての $u \in E$ に対して, $I(|u|) \leq I(u)$」 または, 「すべての $u \in E$ に対して, $I(u^+) \leq I(u)$」 のいずれかを仮定する. このとき, $I'(u) = 0$, $I(u) = c$ を満たす $u \in E^+$ が存在する.

定理 5 の証明は省略し, 系 6 の証明の概略のみを与える.

系 6 の証明の概略. まず, すべての $u \in E$ に対して, $I(|u|) \leq I(u)$ を仮定する. 背理法を使う. $I'(u) = 0$ かつ $I(u) = c$ 満たす $u \in E^+$ が存在しないと仮定する. このとき, ある $\varepsilon, r > 0$ が存在して, もし, $\mathrm{dist}(u, E^+) \leq \varepsilon$ かつ $|I(u) - c| \leq \varepsilon$ ならば, $\|I'(u)\| \geq r$ が成り立つ. 実際に, もしこの主張が間違っているならば, $\mathrm{dist}(u_n, E^+)$, $|I(u_n) - c|$, $\|I'(u_n)\|$ がすべて 0 に収束するような列 $\{u_n\}$ が存在する. このとき, (I_3) により, u_n のある部分列は, ある点 u に収束する. 極限点 u は, $I'(u) = 0$, $I(u) = c$, $u \in E^+$ を満たす. これは, この証明の最初の仮定に反する. 従って, 上記の条件を満たす $\varepsilon, r > 0$ が存在する. このとき, 通常の deformation lemma を使って, 次のような deformation η を構成できる. $\eta \in C(E, E)$ であり. ある $\delta > 0$ が存在して, 次の条件を満たす.

(i) $u \in E^+$ ならば, $\eta(u) \in E^+_\varepsilon$ である. ただし, $\varepsilon > 0$ は, (I_4) で与えられたものである.

(ii) $\eta(e_0) = e_0$, $\eta(e_1) = e_1$.

(iii) もし $u \in E^+$ かつ $I(u) \leq c + \delta$ ならば, $I(\eta(u)) \leq c - \delta$ である.

c の定義により, 次の条件を満たす $\gamma \in \Gamma$ が存在する.

$$\max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) \leq c + \delta.$$

(iii) により, $I(\eta(\gamma(t))) \leq c - \delta$ である. $\tilde{\gamma}(t) := |\eta(\gamma(t))|$ とおく. このとき $\tilde{\gamma}(0) = |\eta(\gamma(0))| = e_0$, $\tilde{\gamma}(1) = |\eta(\gamma(1))| = e_1$ が成り立つ. さらに, $\tilde{\gamma} \in C([0,1], E^+)$ となる. ゆえに $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ である. 仮定により, すべての $t \in [0,1]$ に対して,

$$I(\tilde{\gamma}(t)) = I(|\eta(\gamma(t))|) \leq I(\eta(\gamma(t))) \leq c - \delta,$$

となる. 従って,

$$\max_{0 \le t \le 1} I(\widetilde{\gamma}(t)) \le c - \delta.$$

しかしながら, これは c の定義に反する. 結局, $I'(u) = 0$, $I(u) = c$ を満たす $u \in E^+$ は存在する. リース・バナッハ空間において, 写像 $u \mapsto |u|$ が連続なことと $u \mapsto u^+$ が連続なことは同値であることが容易に証明できる. すべての $u \in E$ に対して, $I(u^+) \le I(u)$ を仮定する. このとき, $\widetilde{\gamma}(t) = \eta(\gamma(t))^+$ と定義すれば, 今までの証明は, 有効である. □

系 6 を次の半線形楕円型偏微分方程式に応用して, 正値解の存在を証明する.

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u^p + \lambda g(x,u) \quad (x \in \Omega), \\ u = 0 \quad (x \in \partial\Omega). \end{cases} \tag{6}$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^N$ の有界領域で, その境界は滑らかと仮定する. $g(x,u)$ について次の仮定を置く.

(g0) $g \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty), \mathbb{R})$, $g(x,0) \ge 0$ $(x \in \Omega)$.

(g1) 次の条件を満たす $q, C > 0$, $\theta \in [0,2]$ が存在する. $N = 1,2$ のとき, $1 < q < \infty$ であり, $N \ge 3$ のとき, $1 < q < (N+2)/(N-2)$ である. また, すべての $s \ge 0$, $x \in \Omega$ に対して,

$$|g(x,s)| \le C(|s|^q + 1), \quad (p+1)G(x,s) - sg(x,s) \le C|s|^\theta + C,$$

である. ただし, $G(x,s)$ は次の積分で定義する.

$$G(x,s) := \int_0^s g(x,t)dt \quad (s \ge 0,\ x \in \Omega). \tag{7}$$

(g2) ある $a_0 > 0$ があり, Ω において $a(x) \ge a_0 > 0$ であり, $s \to \infty$ のとき, $x \in \Omega$ に関して一様に, $s^{-p}|g(x,s)|$ は 0 に収束する.

定理 7. $N = 1,2$ のとき, $1 < p < \infty$ とする. $N \ge 3$ のとき, $1 < p < (N+2)/(N-2)$ とする. $a \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, ある $x_0 \in \Omega$ が存在して, $a(x_0) > 0$ を満たすものとする. $g(x,s)$ は, (g0) を満たし, さらに (g1) または (g2) のいずれかを満たすものとする. このとき, ある $\lambda_0 > 0$ が存在して, $\lambda \in [0, \lambda_0)$ のときに, (6) は, 正値解をもつ.

注意 8. $g(x,s)$ は符号を変えてもよいし, また $g(x,0) > 0$ となってもよい. 従って, 通常の峠の定理, 及び Nehari 多様体の方法は, この問題に対して適用できない.

定理 7 を証明するために, 次の補題を用意する.

補題 9. すべての $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$ に対して, $G(x,s) \le G(x,|s|)$ が成り立つように, $g(x,s)$ を $s \in \mathbb{R}$ 上に拡張することができる.

証明. $h(x,s) := g(x,s) - g(x,0)$ とおく. このとき $h(x,0) = 0$ なので, $h(x,s)$ は, s についての奇関数として拡張できる. このとき, $g(x,s) := h(x,s) + g(x,0)$ として, $g(x,s)$ を $s \le 0$ に拡張する. $H(x,s) := \int_0^s h(x,t)dt$ とおく. このとき,

$$G(x,s) = H(x,s) + g(x,0)s$$

が成り立つ. $H(x,s)$ は s について偶関数であり, (g0) により, $g(x,0) \ge 0$ なので, すべての $s \ge 0$ に対して,

$$G(x,-s) = H(x,-s) - g(x,0)s \le H(x,s) + g(x,0)s = G(x,s).$$

□

定理 7 の証明. $E := H_0^1(\Omega)$ とおく. これは, 写像 $u \mapsto |u|$ が連続なリース・バナッハ空間である. $I(u)$ を次式により定義する.

$$I(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}a(x)|u|^{p+1} - \lambda G(x,u) \right) dx.$$

(g1) または (g2) により, $I(u)$ はパレ・スメイル条件を満たす. $\rho > 0$ を十分小さく選び,

$$U := \{u \in H_0^1(\Omega) : \ \|u\|_{H_0^1} < \rho\}$$

と定義する. $e_0 = 0$ とおく. 十分小さな $\lambda_0 > 0$ を選び, $\lambda \in [0,\lambda_0)$ のときに, $I(e_1) < 0$ かつ $\|e_1\|_{H_0^1} > \rho$ を満たす $e_1 \ge 0$ を選ぶことができる. 従って, $I(u)$ は, (I_1), (I_2) を満たす. $G(x,s) \le G(x,|s|)$ なので, すべての $u \in E$ に対して, $I(|u|) \le I(u)$ が成り立つ. 系 6 により, $I'(u) = 0$, $I(u) = c > 0$, $u \ge 0$ を満たす, $u \in H_0^1(\Omega)$ が存在する. Ω において $u(x) > 0$ が成り立つことを証明する. (4) の c を c_λ と表し, 対応する臨界点を u_λ と書く. すなわち, $\lambda \in [0,\lambda_0)$ に対して,

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \le t \le 1} I(\gamma(t)), \quad I'(u_\lambda) = 0, \quad I(u_\lambda) = c_\lambda.$$

このとき, アプリオリ評価, $1/C \le c_\lambda \le C$ が得られる. ここで $C > 0$ は λ に無関係な正定数である. この評価から, 解 u_λ の $H_0^1(\Omega)$ 有界性, $\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_0$ が得られる. このとき, bootstrap 法により, $\|u_\lambda\|_{W^{2,q}(\Omega)} \le C_q$ がすべての $\lambda \in [0,\lambda_0)$ とすべての $q \in [1,\infty)$ に対して成り立つ. ここで, C_q は q にのみ依存する正定数である. $\lambda > 0$ が十分小さいとき, $u_\lambda(x)$ は真に正であることを証明する. これを否定して, $u_{\lambda_n}(x_n) = 0$ を満たす $\lambda_n \ge 0$ と $x_n \in \Omega$ が存在して, λ_n は 0 に収束するものと仮定する. 簡単のため, u_{λ_n} を u_n と書き直す.

部分列を選んで, x_n はある点 $x_0 \in \overline{\Omega}$ に収束し, u_n はある関数 u_0 に $W^{2,q}(\Omega)$ において弱収束するようにできる. このとき u_0 は, 次の方程式の解である.

$$-\Delta u_0 = a(x)u_0^p \quad (x \in \Omega), \qquad u_0 = 0 \quad (x \in \partial\Omega).$$

さらに, $1/C \le c_{\lambda_n}$ において, $n \to \infty$ として次式が得られる.

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u_0|^2 - \frac{1}{p+1}a(x)|u_0|^{p+1} \right) dx \ge 1/C.$$

従って, $u_0 \not\equiv 0$ となる. $c = \|au_0^{p-1}\|_\infty$ とおく. 方程式 $-\Delta u_0 = au_0^p$ の両辺に cu_0 を加えて,

$$(c - \Delta)u_0 = cu_0 + au_0^p \ge (c - \|au_0^{p-1}\|_\infty)u_0 = 0.$$

ホップの最大値原理により,

$$u_0 > 0 \ (x \in \Omega), \quad \partial u_0/\partial\nu < 0 \ (x \in \partial\Omega). \tag{8}$$

ただし, $\partial u_0/\partial\nu$ は外向き法線微分を表す. もし, $x_0 \in \Omega$ ならば, $u_0(x_0) = 0$ となり, これは矛盾である. $x_0 \in \partial\Omega$ の場合を考える. n が十分大きいとき, x_n は $\partial\Omega$ に十分近い. そこで, $\mathrm{dist}(x_n, \partial\Omega) = |x_n - y_n|$ なる $y_n \in \partial\Omega$ を選ぶ. このとき, $(y_n - x_n)/|y_n - x_n|$ は外向き単位法線ベクトルである. $u_n(x_n) = u_n(y_n) = 0$ なので, x_n と y_n を結ぶ線分上に $u(x)$ を制限して, ロルの定理を使う. このとき, $\partial u_n(z_n)/\partial\nu = 0$ を満たす z_n がこの線分上に存在する. x_n, y_n は x_0 に収束するので, z_n も x_0 に収束する. すべての $q \in [1, \infty)$ に対して, u_n は u_0 に $W^{2,q}(\Omega)$ で弱収束するので, それは, $C^1(\overline{\Omega})$ で強収束している. 従って, $\partial u_0(x_0)/\partial\nu = 0$ となり, これは (8) に矛盾している. 結局, ある $\lambda_0' > 0$ が存在して, $\lambda \in [0, \lambda_0')$ のとき, $u_\lambda(x) > 0$ $(x \in \Omega)$ となる. □